

Άσκηση 1

Ημερομηνία Παράδοσης: 31 Οκτωβρίου 2006

Σημειώσεις:

1. Στις απαντήσεις που θα παραδώσετε σημειώστε στην πρώτη σελίδα το ονοματεπώνυμό σας, τον αριθμό μητρώου σας και το τμήμα σας.
2. Οι ασκήσεις πρέπει να γίνουν ατομικά. Οποιαδήποτε μορφή αντιγραφής απαγορεύεται.
3. Η παρούσα άσκηση πρέπει να παραδοθεί το αργότερο μέχρι την αρχή του μαθήματος της 31ης Οκτωβρίου, δηλαδή μέχρι τις 15:15. Καθυστερημένες ασκήσεις δε θα γίνουν δεκτές.
4. Σε περίπτωση που έχετε ερωτήσεις στείλτε email στην ηλεκτρονική λίστα του μαθήματος: em201-list@tem.uoc.gr

Πρόβλημα 1 [20 μονάδες]

- (α') [10 μονάδες] Αποδείξτε ότι αν A και B άπειρα αριθμησιμα σύνολα, τότε και το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ είναι αριθμησιμο.
- (β') [10 μονάδες] Χρησιμοποιείστε το αποτέλεσμα του παραπάνω ερωτήματος για να δείξετε επαγωγικά ότι το σύνολο \mathbb{N}^k , $k \geq 2$, όπου

$$\mathbb{N}^k = \begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{N}, & k = 2 \\ \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{k-1}, & k > 2 \end{cases},$$

είναι αριθμησιμο σύνολο.

Πρόβλημα 2 [20 μονάδες]

Κατασκευάστε τους πίνακες αληθείας για τις παρακάτω προτάσεις:

- (α') [5 μονάδες] $(p \rightarrow p) \vee (p \rightarrow \bar{p})$
- (β') [5 μονάδες] $(p \vee \bar{q}) \rightarrow \bar{p}$
- (γ') [5 μονάδες] $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$
- (δ') [5 μονάδες] $(\bar{q} \rightarrow \bar{p}) \rightarrow (p \rightarrow q)$

Πρόβλημα 3 [15 μονάδες] Από ένα σύνολο 210 φοιτητών, 90 φορούν καπέλο στην τάξη, 71 φορούν κασκόλ και 50 φορούν και καπέλο και κασκόλ. Από τους 84 φοιτητές που φορούν πουλόβερ, 46 φορούν καπέλο, 41 φορούν κασκόλ και 32 φορούν και καπέλο και κασκόλ. Όλοι όσοι δεν φορούν ούτε καπέλο ούτε κασκόλ φορούν γάντια.

(α') [5 μονάδες] Πόσοι φοιτητές φορούν γάντια;

(β') [5 μονάδες] Πόσοι φοιτητές που δεν φορούν πουλόβερ, φορούν καπέλο αλλά όχι κασκόλ;

(γ') [5 μονάδες] Πόσοι φοιτητές που δεν φορούν πουλόβερ, δεν φορούν ούτε καπέλο, ούτε κασκόλ;

Πρόβλημα 4 [20 μονάδες] Έστω μια διμελής σχέση πάνω στο σύνολο όλων των θετικών ακέραιων τέτοια ώστε

$$R = \{(a, b) \mid \text{το } a - b \text{ είναι ένας περιττός θετικός ακέραιος}\}.$$

Είναι η R ανακλαστική; Συμμετρική; Αντισυμμετρική; Μεταβατική; Είναι μία σχέση ισοδυναμίας; Είναι μία σχέση μερικής διάταξης;

Πρόβλημα 5 [25 μονάδες] Έστω μια διμελής σχέση επί του A . Έστω $R_1, R_2, \dots, R_i, \dots$ οι διαδοχικές μεταβατικές επεκτάσεις της R . Αποδείξτε με επαγωγή ότι αν το (a, b) ανήκει στην R_i (για κάποιο $i \geq 1$), τότε υπάρχουν n στοιχεία στο A , $n \leq 2^i - 1$, x_1, x_2, \dots, x_n , τέτοια ώστε τα $(a, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, b)$ να ανήκουν όλα στην R .

Σύνολο μονάδων: 100