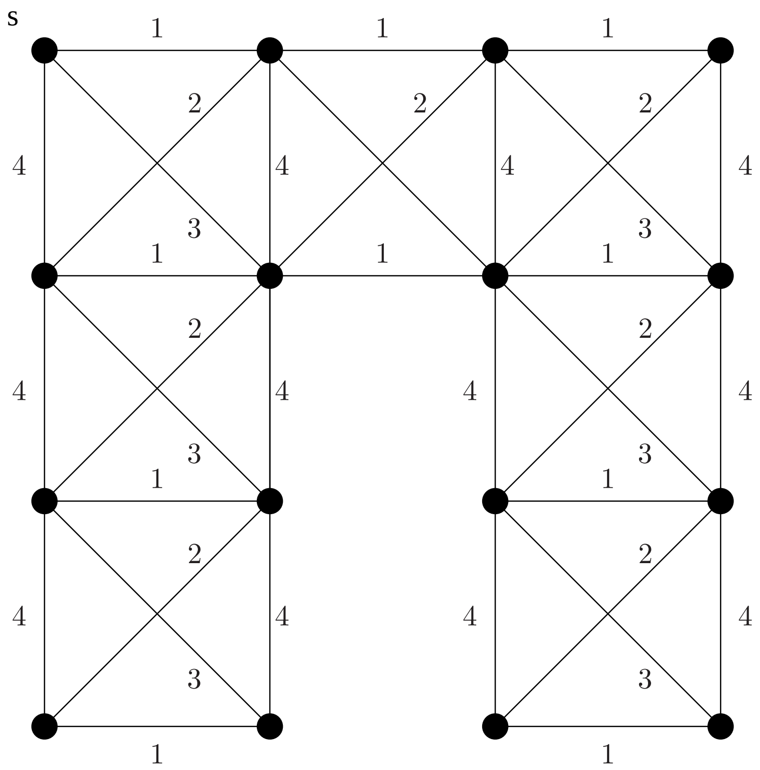
Άσκηση 3

Ημερομηνία Παράδοσης: 5 Δεκεμβρίου 2006

Σημειώσεις:

1. Στις απαντήσεις που θα παραδώσετε σημειώστε στην πρώτη σελίδα το ονοματεπώνυμό σας, τον αριθμό μητρώου σας και το τμήμα σας.
2. Οι ασκήσεις πρέπει να γίνον ατομικά. Οποιαδήποτε μορφή αντιγραφής απαγορεύεται.
3. Η παρούσα άσκηση πρέπει να παραδοθεί το αργότερο μέχρι την αρχή του μαθήματος της 5ης Δεκεμβρίου, δηλαδή μέχρι τις 15:15. Καθυστερημένες ασκήσεις δε θα γίνουν δεκτές.
4. Σε περίπτωση που έχετε ερωτήσεις στείλτε email στην ηλεκτρονική λίστα του μαθήματος: em201-list@tem.uoc.gr

Πρόβλημα 1 [20 μονάδες] Υπολογίστε τα μονοπάτια ελαχίστου μήκους από τον κόμβο s σε κάθε άλλο κόμβο του παρακάτω μη κατευθυνόμενου βεβαρυμένου γραφήματος. Ποιά τα μήκη των μονοπατιών ελαχίστου μήκους που βρήκατε;



Πρόβλημα 2 [20 μονάδες] Έστω μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$, με $|V| \geq 2$. Θεωρείστε το γράφημα $G' = (V', E')$, το οποίο προκύπτει αν προσθέσουμε ένα κόμβο u στο G και τον συνδέσουμε με ακμή με κάθε κόμβο του G. Δηλαδή, $V' = V \cup \{u\}$ και $E' = E \cup \{(u, v) \,|\, v \in V\}$. Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα, τεκμηριώνοντας τις απαντήσεις σας:

(α′) [10 μονάδες] Αν ο G έχει μονοπάτι Euler, ο G' έχει μονοπάτι Euler;

(β′) [10 μονάδες] Αν ο G έχει κύκλωμα Euler, ο G' έχει κύκλωμα Euler;

Πρόβλημα 3 [20 μονάδες] Μία διατεταγμένη n-άδα $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ μη αρνητικών ακεραίων ονομάζεται *γραφηματώδης*, αν υπάρχει ένα γραμμικό μη κατευθυνόμενο γράφημα χωρίς βρόχους, με n κορυφές των οποίων οι βαθμοί είναι $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

(α′) [5 μονάδες] Δείξτε ότι η $(4, 3, 2, 2, 1)$ είναι γραφηματώδης.

(β′) [5 μονάδες] Δείξτε ότι η $(3, 3, 3, 1)$ δεν είναι γραφηματώδης.

(γ′) [10 μονάδες] Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέστε ότι $d_1 \geq d_2 \geq \ldots d_n$. Αποδείξτε ότι η $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ είναι γραφηματώδης αν και μόνο αν η $(d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1} - 1, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n)$ είναι γραφηματώδης.

Πρόβλημα 4 [20 μονάδες] Ένα γραμμικό επίπεδο γράφημα χωρίς βρόχους λέγεται *τριγωνοποίηση*, αν κάθε χωρίο του, εκτός από το άπειρο χωρίο, έχει ακριβώς τρεις ακμές, και αν δεν είναι δυνατόν να προσθέσουμε ακμή μεταξύ δύο κορυφών του γραφήματος χωρίς να πάψει να είναι επίπεδο. Έστω τριγωνοποίηση T με $n \geq 5$ κορυφές, της οποίας το άπειρο χωρίο έχει 5 κορυφές. Βρείτε τον αριθμό των ακμών της T συναρτήσει του αριθμού των κορυφών της, δηλαδή συναρτήσει του n.

Υπόδειξη: Βρείτε σχέση μεταξύ του αριθμού των χωρίων της T και του αριθμού των ακμών της T.

Πρόβλημα 5 [20 μονάδες] Ένα γράφημα ονομάζεται *αυτοσυμπληρούμενο* αν είναι ισόμορφο με το συμπλήρωμά του.

(α′) [5 μονάδες] Βρείτε ένα αυτοσυμπληρούμενο γράφημα με τέσσερεις κορυφές.

(β′) [5 μονάδες] Βρείτε ένα αυτοσυμπληρούμενο γράφημα με πέντε κορυφές.

(γ′) [10 μονάδες] Δείξτε ότι κάθε αυτοσυμπληρούμενο γράφημα G έχει είτε $4k$ είτε $4k + 1$ κορυφές.

Υπόδειξη: Κατ΄ αρχήν παρατηρήστε ότι το άθροισμα των βαθμών των κορυφών ενός γραφήματος είναι ίσο με το διπλάσιο του αριθμού των ακμών του (γιατί;). Στη συνέχεια υπολογίστε τον αριθμό των ακμών του G συναρτήσει του αριθμού των κορυφών του G, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο G και το συμπλήρωμά του είναι ισόμορφοι γράφοι.

Σύνολο μονάδων: 100