Άσκηση 1 - Λύσεις

Πρόβλημα 1 [20 μονάδες]

(α') ***[10 μονάδες]*** *Αποδείξτε ότι αν A και B άπειρα αριθμήσιμα σύνολα, τότε και το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ είναι αριθμήσιμο.*

(β') ***[10 μονάδες]*** *Χρησιμοποιείστε το αποτέλεσμα του παραπάνω ερωτήματος για να δείξετε επαγωγικά ότι το σύνολο $\mathbb{N}^k$, $k \geq 2$, όπου*

$$\mathbb{N}^k = \begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{N}, & k = 2 \\ \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{k-1}, & k > 2 \end{cases},$$

είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Λύση:

(α') **1ος τρόπος.** Καθώς τόσο το A όσο και το B είναι άπειρα αριθμήσιμα σύνολα, μπορώ να απαριθμήσω τα στοιχεία τους, δηλαδή μπορώ να γράψω:

$$A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, \ldots\},$$
$$B = \{b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_j, \ldots\}.$$

Αρκεί να αντιστοιχίσω τα στοιχεία του $A \times B$ με τα στοιχεία κάποιου αριθμήσιμου συνόλου. Όντως κάθε στοιχείο (a_i, b_j) του $A \times B$ μπορώ να το αντιστοιχίσω με το στοιχείο (i, j) του $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, το οποίο γνωρίζω ότι είναι αριθμήσιμο. Συνεπώς και το $A \times B$ είναι αριθμήσιμο.

2ος τρόπος. Καθώς τόσο το A όσο και το B είναι άπειρα αριθμήσιμα σύνολα, μπορώ να απαριθμήσω τα στοιχεία τους, δηλαδή μπορώ να γράψω:

$$A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, \ldots\},$$
$$B = \{b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_j, \ldots\}.$$

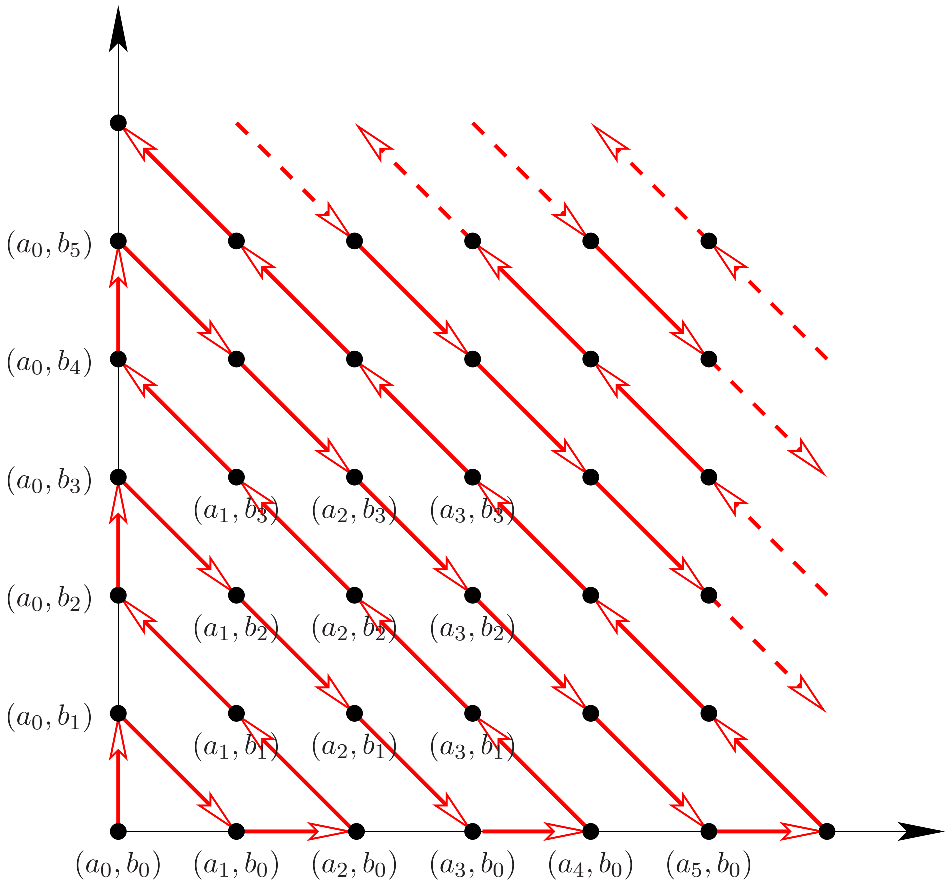
Σε ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων θα απεικονίσω το στοιχείο (a_i, b_j) του $A \times B$ στο σημείο (i, j). Τότε θα απαριθμήσω τα στοιχεία του $A \times B$ με τη σειρά που δείχνει το Σχήμα 1.

(β') Το ζητούμενο προφανώς ισχύει για $k = 2$, καθώς έχουμε ήδη δείξει (στις διαλέξεις) ότι το σύνολο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο.

Έστω ότι το σύνολο $\mathbb{N}^k$, $k \geq 2$ είναι αριθμήσιμο.

Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\mathbb{N}^{k+1}$ είναι αριθμήσιμο. Πράγματι, επειδή $k \geq 2$, έχουμε ότι $k + 1 \geq 3$. Συνεπώς, $\mathbb{N}^{k+1} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}^k$. Αλλά από την επαγωγική μου υπόθεση, το $\mathbb{N}^k$ είναι αριθμήσιμο. Τότε, επειδή και το $\mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο, και χρησιμοποιώντας το ερώτημα (α'), προκύπτει ότι και το $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^k$ είναι αριθμήσιμο. Με άλλα λόγια το $\mathbb{N}^{k+1}$ είναι αριθμήσιμο.

□



Σχήμα 1: Η απαρίθμηση των στοιχείων του συνόλου $A \times B$.

Πρόβλημα 2 [20 μονάδες] *Κατασκευάστε τους πίνακες αληθείας για τις παρακάτω προτάσεις:*

(α΄) [5 μονάδες] $(p \to p) \vee (p \to \overline{p})$

(β΄) [5 μονάδες] $(p \vee \overline{q}) \to \overline{p}$

(γ΄) [5 μονάδες] $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

(δ΄) [5 μονάδες] $(\overline{q} \to \overline{p}) \to (p \to q)$

Λύση: Οι πίνακες αληθείας παρατίθενται παρακάτω.

(α΄)

p	$\overline{p}$	$p \to p$	$p \to \overline{p}$	$(p \to p) \vee (p \to \overline{p})$
T	F	T	F	T
F	T	T	T	T

(β΄)

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \vee \overline{q}$	$(p \vee \overline{q}) \to \overline{p}$
T	T	F	F	T	F
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T

(γ΄) Στον παρακάτω πίνακα, s είναι η πρόταση $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$.

p	q	r	$q \to r$	$p \to (q \to r)$	$p \to q$	$p \to r$	$(p \to q) \to (p \to r)$	s
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	F	F	T
T	F	F	T	T	F	F	T	T
F	T	F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T	T

(δ΄)

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{q} \to \overline{p}$	$p \to q$	$(\overline{q} \to \overline{p}) \to (p \to q)$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

$\square$

Πρόβλημα 3 [15 μονάδες] *Από ένα σύνολο 210 φοιτητών, 90 φορούν καπέλο στην τάξη, 71 φορούν κασκόλ και 50 φορούν και καπέλο και κασκόλ. Από τους 84 φοιτητές που φορούν πουλόβερ, 46 φορούν καπέλο, 41 φορούν κασκόλ και 32 φορούν και καπέλο και κασκόλ. Όλοι όσοι δεν φορούν ούτε καπέλο ούτε κασκόλ φορούν γάντια.*

(α΄) *[5 μονάδες] Πόσοι φοιτητές φορούν γάντια;*

(β΄) *[5 μονάδες] Πόσοι φοιτητές που δεν φορούν πουλόβερ, φορούν καπέλο αλλά όχι κασκόλ;*

(γ΄) *[5 μονάδες] Πόσοι φοιτητές που δεν φορούν πουλόβερ, δεν φορούν ούτε καπέλο, ούτε κασκόλ;*

Λύση: Θα ορίσουμε κατ΄ αρχήν τα εξής σύνολα:

$$\begin{aligned} S &= \{\text{φοιτητές}\},\\ H &= \{\text{φοιτητές που φορούν καπέλο}\},\\ C &= \{\text{φοιτητές που φορούν κασκόλ}\},\\ P &= \{\text{φοιτητές που φορούν πουλόβερ}\},\\ G &= \{\text{φοιτητές που φορούν γάντια}\}. \end{aligned}$$

Από τα δεδομένα της άσκησης έχω τις παρακάτω σχέσεις:

$$|S| = 210, \quad |P| = 84, \quad |H| = 90, \quad |C| = 71,$$

$$|H \cap C| = 50, \quad |P \cap C| = 41, \quad |P \cap H| = 46, \quad |P \cap H \cap C| = 32.$$

Τέλος θα σημειώσουμε κάποιες σχέσεις συνόλων που θα χρησιμοποιηθούν παρακάτω. Κατ΄ αρχήν θα συμβολίζουμε με X^c το συμπληρωματικό του X ως προς το S, δηλαδή $X^c = S \setminus X$. Επίσης, για κάθε X, Y και Z ισχύουν:

$$X^c \cap Y^c = (X \cup Y)^c, \quad \text{και}$$

$$(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z).$$

(α΄) Γάντια φορούν όσοι φοιτητές δεν φορούν ούτε καπέλο ούτε κασκόλ, δηλαδή $G = S \setminus (H \cup C)$. Συνεπώς:

$$|H \cup C| = |H| + |C| - |H \cap C| = 90 + 71 - 50 = 111, \quad \text{και}$$

$$|G| = |S| - |H \cup C| = 210 - 111 = 99,$$

δηλαδή 99 φοιτητές φορούν γάντια.

(γ΄) Το σύνολο του οποίου ζητάμε να βρούμε το μέγεθος είναι το $P^c \cap H^c \cap C^c$. Επειδή $P^c \cap H^c \cap C^c = (P \cup H \cup C)^c$ και

$$\begin{aligned} |P \cup H \cup C| &= |P| + |H| + |C| - |P \cap H| - |P \cap C| - |H \cap C| + |P \cap H \cap C| \\ &= 84 + 90 + 71 - 46 - 41 - 50 + 32 = 245 - 137 + 32 = 277 - 137 = 140 \end{aligned}$$

προκύπτει ότι $|P^c \cap H^c \cap C^c| = |S| - |P \cup H \cup C| = 210 - 140 = 70$, δηλαδή οι φοιτητές που δε φορούν ούτε πουλόβερ, ούτε καπέλο, ούτε κασκόλ είναι 70.

(β΄) Το σύνολο του οποίου ζητάμε να βρούμε το μέγεθος είναι το $P^c \cap H \cap C^c$. Παρατηρούμε όμως ότι:

$$\begin{aligned}(P^c \cap H \cap C^c) \cup (P^c \cap H^c \cap C^c) &= (H \cap (P^c \cap C^c)) \cup (H^c \cap (P^c \cap C^c)) \\ &= (H \cup H^c) \cap (P^c \cap C^c) \\ &= S \cap (P^c \cap C^c) \\ &= P^c \cap C^c\end{aligned}$$

Δηλαδή, δεδομένου ότι τα σύνολα $P^c \cap H \cap C^c$ και $P^c \cap H^c \cap C^c$ είναι ξένα μεταξύ τους (παρατηρήστε ότι $P^c \cap H \cap C^c \subseteq H$, $P^c \cap H^c \cap C^c \subseteq H^c$, και ότι $H \cap H^c = \emptyset$), έχουμε

$$|P^c \cap H \cap C^c| = |P^c \cap C^c| - |P^c \cap H^c \cap C^c|.$$

Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε το μέγεθος του συνόλου $P^c \cap C^c$. Αλλά

$$\begin{aligned}|P^c \cap C^c| &= |(P \cup C)^c| = |S| - |P \cup C| = |S| - (|P| + |C| - |P \cap C|) \\ &= 210 - (84 + 71 - 41) = 210 - 114 = 96.\end{aligned}$$

Οπότε έχουμε

$$|P^c \cap H \cap C^c| = |P^c \cap C^c| - |P^c \cap H^c \cap C^c| = 96 - 70 = 26,$$

δηλαδή υπάρχουν 26 φοιτητές που δεν φορούν πουλόβερ, φορούν καπέλο, αλλά όχι κασκόλ.

□

Πρόβλημα 4 [20 μονάδες] *Έστω μια διμελής σχέση πάνω στο σύνολο όλων των θετικών ακεραίων τέτοια ώστε*

$$R = \{(a, b) \mid \textit{το } a - b \textit{ είναι ένας περιττός θετικός ακέραιος}\}.$$

Είναι η R ανακλαστική; Συμμετρική; Αντισυμμετρική; Μεταβατική; Είναι μία σχέση ισοδυναμίας; Είναι μία σχέση μερικής διάταξης;

Λύση: Θα συμβολίσουμε με $\mathbb{Z}_+$ το σύνολο των θετικών ακεραίων, και με Π_+ το σύνολο των θετικών περιττών ακεραίων.

Η διμελής σχέση R δεν είναι ανακλαστική, γιατί για κάθε $a \in \mathbb{Z}_+$, $a - a = 0 \notin \Pi_+$. Συνεπώς, για κάθε $a \in \mathbb{Z}_+$, $(a, a) \notin R$, δηλαδή η R δεν είναι ανακλαστική.

Η R δεν είναι συμμετρική. Παρατηρώ ότι ενώ $(5, 2) \in R$, το ζεύγος $(2, 5)$ δεν ανήκει στην σχέση R, γιατί $2 - 5 = -3 \notin \Pi_+$.

Η R είναι αντισυμμετρική. Έστω $a, b \in \mathbb{Z}_+$, $a \neq b$ και έστω ότι $(a, b) \in R$. Αυτό σημαίνει ότι $a - b \in \Pi_+$, δηλαδή, ο a είναι μεγαλύτερος του b και μάλιστα η διαφορά τους είναι κάποιος θετικός περιττός ακέραιος. Συνεπώς ο $b - a$ θα είναι κάποιος αρνητικός περιττός ακέραιος, δηλαδή θα έχουμε ότι $(b, a) \notin R$.

Η R δεν είναι μεταβατική. Παρατηρώ ότι $(7, 4), (4, 1) \in R$, αλλά $(7, 1) \notin R$.

Επειδή η R δεν είναι ανακλαστική σχέση, δεν είναι ούτε σχέση ισοδυναμίας ούτε σχέση μερικής διάταξης. □

Πρόβλημα 5 [25 μονάδες] *Έστω μια διμελής σχέση επί του A. Έστω $R_1, R_2, \ldots, R_i, \ldots$ οι διαδοχικές μεταβατικές επεκτάσεις της R. Αποδείξτε με επαγωγή ότι αν το (a,b) ανήκει στην R_i (για κάποιο $i \geq 1$), τότε υπάρχουν n στοιχεία στο A, $n \leq 2^i - 1$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, τέτοια ώστε τα $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, b)$ να ανήκουν όλα στην R.*

Λύση: Ας ξεκινήσουμε με τη βάση της επαγωγής, δηλαδή θέλω να δείξω ότι το ζητούμενο ισχύει για $i = 1$. Έστω $(a,b) \in R_1$. Διακρίνω τις δύο παρακάτω δυνατές περιπτώσεις:

$\boxed{(a,b) \in R}$ Στην περίπτωση αυτή το ζητούμενο ισχύει για $n = 0$, καθώς $n = 0 \leq 1 = 2^1 - 1 = 2^i - 1$, και $(a,b) \in R$, από υπόθεση.

$\boxed{(a,b) \in R_1 \setminus R}$ Στην περίπτωση αυτή, και από τον ορισμό της μεταβατικής επέκτασης, υπάρχει $c \in A$, τέτοιο ώστε $(a,c), (c,b) \in R$. Δηλαδή το θεώρημα ισχύει για $n = 1$, $x_1 = c$, και $n = 1 \leq 1 = 2^i - 1$.

Υποθέτουμε τώρα ότι το ζητούμενο ισχύει για $i = k$, δηλαδή, αν R_k, $k \geq 1$, η k-οστή μεταβατική επέκταση της R, τότε υπάρχουν n στοιχεία του A, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, όπου $0 \leq n \leq 2^k - 1$, και

$$(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, b) \in R.$$

Θα δείξουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $i = k+1$. Έστω R_{k+1} η $(k+1)$-οστή μεταβατική επέκταση της R, και έστω $(a,b) \in R_{k+1}$. Διακρίνω τις δύο παρακάτω δυνατές περιπτώσεις:

$\boxed{(a,b) \in R_k}$ Από την επαγωγική μου υπόθεση υπάρχουν n στοιχεία $x_1, x_2, \ldots, x_n$ στο R, με $n \leq 2^k - 1$, τέτοια ώστε $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, b) \in R$. Αλλά $2^k - 1 < 2^{k+1} - 1$, δηλαδή υπάρχουν n στοιχεία $x_1, x_2, \ldots, x_n$ στο R, με $n \leq 2^{k+1} - 1$, τέτοια ώστε

$$(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, b) \in R,$$

το οποίο και θέλαμε να αποδείξουμε.

$\boxed{(a,b) \in R_{k+1} \setminus R_k}$ Στην περίπτωση αυτή, και από τον ορισμό της μεταβατικής επέκτασης, υπάρχει $c \in A$, τέτοιο ώστε $(a,c), (c,b) \in R_k$. Από την επαγωγική μας υπόθεση, υπάρχουν μ στοιχεία $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$ στο R με $\mu \leq 2^k - 1$, τέτοια ώστε

$$(a, y_1), (y_1, y_2), \ldots, (y_{\mu-1}, y_\mu), (y_\mu, c) \in R.$$

Επίσης υπάρχουν ν στοιχεία $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ στο R με $\nu \leq 2^k - 1$, τέτοια ώστε

$$(c, z_1), (z_1, z_2), \ldots, (z_{\nu-1}, z_\nu), (z_\nu, b) \in R.$$

Θεωρείστε το σύνολο $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $n = \mu + \nu + 1$ στοιχείων του A, όπου

$$x_i = \begin{cases} y_i, & 1 \leq i \leq \mu, \\ c, & i = \mu + 1, \\ z_{i-\mu-1}, & \mu + 2 \leq i \leq \mu + \nu + 1. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, b) \in R$, και επίσης

$$n = \mu + \nu + 1 \leq (2^k - 1) + (2^k - 1) + 1 = 2 \cdot 2^k - 2 + 1 = 2^{k+1} - 1.$$

Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση το ζητούμενο ισχύει και για $i = k + 1$. □