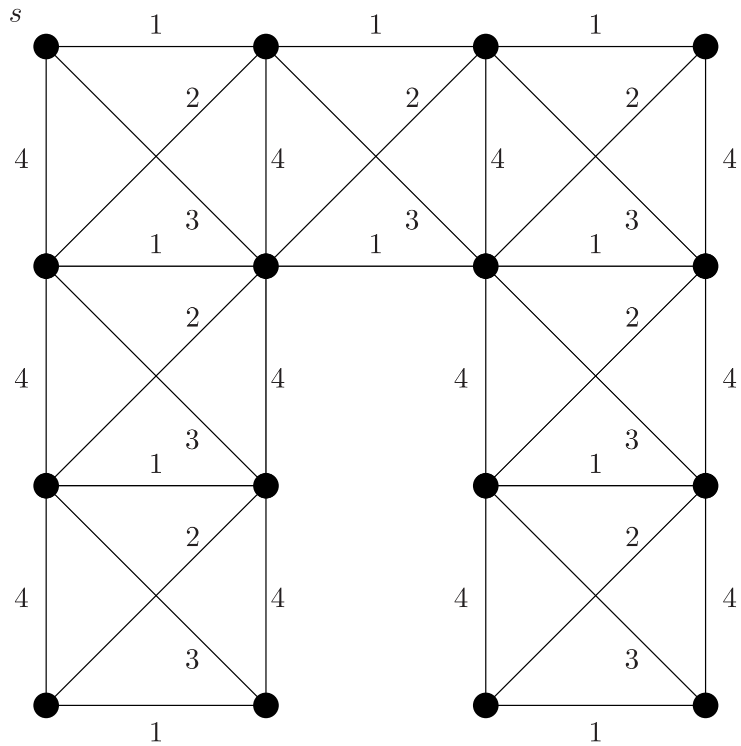
Άσκηση 3 - Λύσεις

Πρόβλημα 1 [20 μονάδες] *Υπολογίστε τα μονοπάτια ελαχίστου μήκους από τον κόμβο s σε κάθε άλλο κόμβο του παρακάτω μη κατευθυνόμενου βεβαρυμένου γραφήματος. Ποιά τα μήκη των μονοπατιών ελαχίστου μήκους που βρήκατε;*



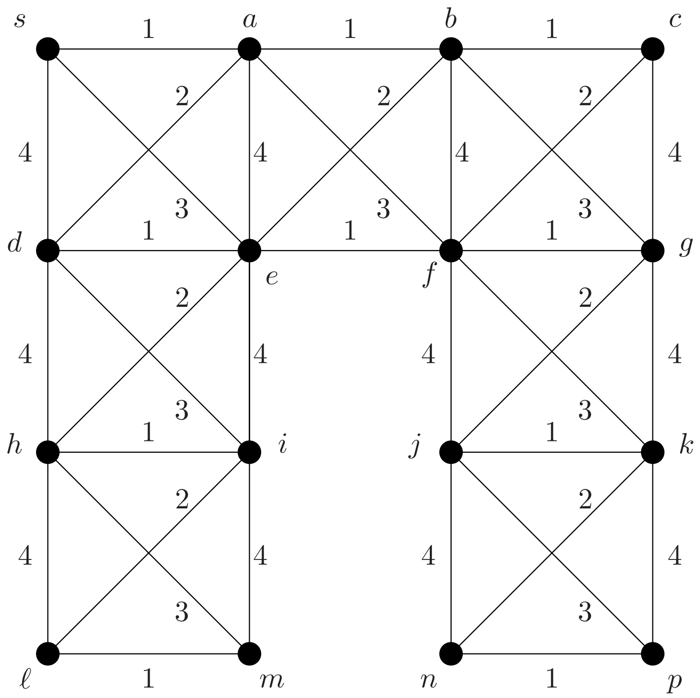
Λύση: Θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο που παρουσιάστηκε στο μάθημα. Προκειμένου να παρουσιάσουμε την εξέλιξη του αλγορίθμου δίνουμε ονόματα στους κόμβους όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.

Ο αλγόριθμος που παρουσιάστηκε στο μάθημα και τον οποίο θα χρησιμοποιήσουμε για την επίλυση της άσκησης έχει ως εξής:

1. Αρχικά έστω $P = \{s\}$ και $T = V \setminus \{s\}$. Για κάθε κορυφή v στο T έστω $\delta(v)$ ελάχιστη απόσταση του v από τον s, αν χρησιμοποιήσουμε ως μονοπάτι ένα μονοπάτι του οποίου όλοι οι κόμβοι, εκτός φυσικά τον v, ανήκουν στο P.
2. Επιλέγουμε την κορυφή του T που έχει τη μικρότερη τιμή $\delta(v)$, μεταξύ όλων των κορυφών του T. Έστω x η κορυφή αυτή.
3. Αν το x είναι το t τότε σταματάμε. Αν όχι, έστω $P' = P \cup \{x\}$ και $T' = T \setminus \{x\}$. Για κάθε κορυφή v του T', υπολογίζουμε την τιμή $\delta(v)$ σύμφωνα με τη σχέση:

$$\delta(v) = \min\{\delta(v), \delta(x) + w(x, v)\},$$

όπου $w(x, v)$ είναι το βάρος της ακμής του γράφου από τον κόμβο x στον κόμβο v. Αν δεν υπάρχει ακμή μεταξύ των δύο κόμβων το $w(x, v)$ θεωρείται άπειρο.



Σχήμα 1: Το γράφημα του 1ου προβλήματος με ονοματισμένους όλους τους κόμβους.

4. Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2 και 3 χρησιμοποιώντας το P' ως P και το T' ως T.

Στον παρακάτω πίνακα δείχνουμε σε κάθε γραμμή τις τιμές των ποσοτήτων $\delta(v)$ για όλους του κόμβους του γράφου ακριβώς πριν από κάθε εκτέλεση του βήματος 2. Οι τιμές του $\delta(v)$ σε «παχιά» γραμματοσειρά (boldface) αντιστοιχούν σε κόμβους που είναι στο σύνολο P. Σε κάθε πεπερασμένη τιμή του $\delta(v)$ ο κόμβος σε παρενθέσεις είναι ο πατρικός κόμβος του εν λόγω κόμβου στο τρέχον ελάχιστο μονοπάτι (αυτό δηλαδή που έχουμε υπολογίσει μέχρι στιγμής) που φτάνει στον κόμβο αυτό. Η πρώτη στήλη είναι ο αύξων αριθμός της κάθε επανάληψης (ή αλλιώς ο αριθμός των φορών που έχουμε εκτελέσει το βήμα 2).

α/α	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	ℓ	m	n	p
0	1 (s)	∞	∞	4 (s)	3 (s)	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	**1** (s)	2 (a)	∞	3 (a)	3 (s)	4 (a)	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2	**1** (s)	**2** (a)	3 (b)	3 (a)	3 (s)	4 (a)	5 (b)	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
3	**1** (s)	**2** (a)	**3** (b)	3 (a)	3 (s)	4 (a)	5 (b)	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
4	**1** (s)	**2** (a)	**3** (b)	**3** (a)	3 (s)	4 (a)	5 (b)	7 (d)	6 (d)	∞	∞	∞	∞	∞	∞
5	**1** (s)	**2** (a)	**3** (b)	**3** (a)	**3** (s)	4 (a)	5 (b)	5 (e)	6 (d)	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	**1** (s)	**2** (a)	**3** (b)	**3** (a)	**3** (s)	**4** (a)	5 (b)	5 (e)	6 (d)	8 (f)	7 (f)	∞	∞	∞	∞
7	**1** (s)	**2** (a)	**3** (b)	**3** (a)	**3** (s)	**4** (a)	**5** (b)	5 (e)	6 (d)	7 (g)	7 (f)	∞	∞	∞	∞
8	**1** (s)	**2** (a)	**3** (b)	**3** (a)	**3** (s)	**4** (a)	**5** (b)	**5** (e)	6 (d)	7 (g)	7 (f)	9 (h)	8 (h)	∞	∞
9	**1** (s)	**2** (a)	**3** (b)	**3** (a)	**3** (s)	**4** (a)	**5** (b)	**5** (e)	**6** (d)	7 (g)	7 (f)	8 (i)	8 (h)	∞	∞
10	**1** (s)	**2** (a)	**3** (b)	**3** (a)	**3** (s)	**4** (a)	**5** (b)	**5** (e)	**6** (d)	**7** (g)	7 (f)	8 (i)	8 (h)	11 (j)	10 (j)
11	**1** (s)	**2** (a)	**3** (b)	**3** (a)	**3** (s)	**4** (a)	**5** (b)	**5** (e)	**6** (d)	**7** (g)	**7** (f)	8 (i)	8 (h)	9 (k)	10 (j)
12	**1** (s)	**2** (a)	**3** (b)	**3** (a)	**3** (s)	**4** (a)	**5** (b)	**5** (e)	**6** (d)	**7** (g)	**7** (f)	**8** (i)	8 (h)	9 (k)	10 (j)
13	**1** (s)	**2** (a)	**3** (b)	**3** (a)	**3** (s)	**4** (a)	**5** (b)	**5** (e)	**6** (d)	**7** (g)	**7** (f)	**8** (i)	**8** (h)	9 (k)	10 (j)
14	**1** (s)	**2** (a)	**3** (b)	**3** (a)	**3** (s)	**4** (a)	**5** (b)	**5** (e)	**6** (d)	**7** (g)	**7** (f)	**8** (i)	**8** (h)	**9** (k)	10 (j)
15	**1** (s)	**2** (a)	**3** (b)	**3** (a)	**3** (s)	**4** (a)	**5** (b)	**5** (e)	**6** (d)	**7** (g)	**7** (f)	**8** (i)	**8** (h)	**9** (k)	**10** (j)

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι τα ελάχιστα μονοπάτια από τον κόμβο s σε κάθε άλλο κόμβο του γραφήματος είναι αυτά που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Τα ελάχιστα μήκη φαίνονται επίσης στον πίνακα αυτό (είναι οι τιμές του $\delta(v)$ στην τελευταία γραμμή του παραπάνω πίνακα).

Τελικός κόμβος	Μονοπάτι	Μήκος μονοπατιού
a	$s \to a$	1
b	$s \to a \to b$	2
c	$s \to a \to b \to c$	3
d	$s \to a \to d$	3
e	$s \to e$	3
f	$s \to a \to f$	4
g	$s \to a \to b \to g$	5
h	$s \to e \to h$	5
i	$s \to a \to d \to i$	6
j	$s \to a \to b \to g \to j$	7
k	$s \to a \to f \to k$	7
ℓ	$s \to a \to d \to i \to \ell$	8
m	$s \to e \to h \to m$	8
n	$s \to a \to f \to k \to n$	9
p	$s \to a \to b \to g \to j \to p$	10

□

Πρόβλημα 2 [20 μονάδες] *Έστω μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$, με $|V| \geq 2$. Θεωρείστε το γράφημα $G' = (V', E')$, το οποίο προκύπτει αν προσθέσουμε ένα κόμβο u στο G και τον συνδέσουμε με ακμή με κάθε κόμβο του G. Δηλαδή, $V' = V \cup \{u\}$ και $E' = E \cup \{(u, v) \mid v \in V\}$. Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα, τεκμηριώνοντας τις απαντήσεις σας:*

(α′) [10 μονάδες] *Αν ο G έχει μονοπάτι Euler, ο G' έχει μονοπάτι Euler;*

(β′) [10 μονάδες] *Αν ο G έχει κύκλωμα Euler, ο G' έχει κύκλωμα Euler;*

Λύση:

(α′) Θα εξετάσουμε τις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

1. Ο G έχει μηδέν κόμβους περιττού βαθμού.

Αναγκαστικά ο G θα πρέπει να έχει τουλάχιστον τρεις κόμβους (δηλαδή $|V| \geq 3$), καθώς υπάρχει μόνο ένα συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα με δύο κόμβους, και σε αυτό και οι δύο κόμβοι έχουν βαθμό ένα. Με την προσθήκη του κόμβου u όλοι οι κόμβοι στο σύνολο V θα έχουν περιττό βαθμό, δηλαδή στον G' υπάρχουν τουλάχιστον $|V| \geq 3$ κόμβοι με περιττό βαθμό. Συνεπώς δεν μπορεί να έχει μονοπάτι Euler.

2. Ο G έχει δύο κόμβους περιττού βαθμού.

Αν $|V| = 2$, τότε το γράφημα G' είναι το πλήρες γράφημα με τρεις κόμβους (το γράφημα K_3 δηλαδή), το οποίο έχει μονοπάτι Euler.

Αν $|V| = 3$, τότε υπάρχει ένα γραφήμα G που έχει μονοπάτι Euler (υπό την προϋπόθεση ότι έχει δύο κόμβους με περιττό βαθμό) και αυτό φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Το γράφημα G' που προκύπτει από το γράφημα G του παραπάνω σχήματος έχει δύο κόμβους με περιττό βαθμό και δύο με άρτιο βαθμό, συνεπώς έχει μονοπάτι Euler.

Αν $|V| = 4$, τότε το G έχει δύο κόμβους με περιττό βαθμό και δύο κόμβους με άρτιο βαθμό. Με την προσθήκη του κόμβου u, ο βαθμός του u θα είναι 4, οι δύο κόμβοι του G που είχαν άρτιο βαθμό στον G' θα έχουν περιττό βαθμό, ενώ οι δύο κόμβοι του G που είχαν περιττό βαθμό, στο G' θα έχουν άρτιο βαθμό. Συνεπώς το G' θα έχει τρεις κόμβους με άρτιο βαθμό και δύο κόμβους με περιττό βαθμό. Συνεπώς για $|V| = 4$ (και υπό την προϋπόθεση ότι το γράφημα G έχει δύο κόμβους περιττού βαθμού), το G' θα έχει μονοπάτι Euler.

Αν $|V| \geq 5$, τότε ο G έχει τουλάχιστον τρεις κόμβους με άρτιο βαθμό. Με την προσθήκη του κόμβου u, ο G' θα έχει τουλάχιστον τρεις κόμβους με περιττό βαθμό, οπότε ο G' δεν είναι δυνατόν να έχει μονοπάτι Euler.

Συνοψίζοντας, αν το γράφημα G έχει μονοπάτι Euler τότε το γράφημα G' έχει μονοπάτι Euler αν και μόνο αν ισχύουν οι παρακάτω δύο προϋποθέσεις:

- $2 \leq |V| \leq 4$, και
- το γράφημα G έχει δύο κόμβους περιττού βαθμού.

(β') Η απάντηση είναι όχι.

Εφ' όσον ο G έχει κύκλωμα Euler, όλοι του οι κόμβοι έχουν ζυγό βαθμό. Αυτό σημαίνει επίσης ότι $|V| \geq 3$, καθώς υπάρχει μόνο ένα συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα με δύο κόμβους, και σε αυτό και οι δύο κόμβοι έχουν βαθμό ένα. Με την προσθήκη του κόμβου u όλοι οι κόμβοι στο σύνολο V θα έχουν περιττό βαθμό, δηλαδή στον G' υπάρχουν τουλάχιστον $|V| \geq 3$ κόμβοι με περιττό βαθμό. Συνεπώς δεν μπορεί να έχει κύκλωμα Euler.

□

Πρόβλημα 3 [20 μονάδες] *Μία διατεταγμένη n-άδα $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ μη αρνητικών ακεραίων ονομάζεται γραφηματώδης, αν υπάρχει ένα γραμμικό μη κατευθυνόμενο γράφημα χωρίς βρόχους, με n κορυφές των οποίων οι βαθμοί είναι $d_1, d_2, \ldots, d_n$.*

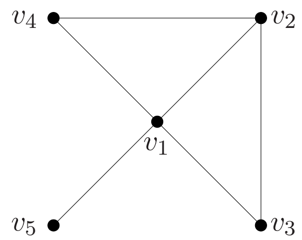
(α') [5 μονάδες] *Δείξτε ότι η $(4, 3, 2, 2, 1)$ είναι γραφηματώδης.*

(β') [5 μονάδες] *Δείξτε ότι η $(3, 3, 3, 1)$ δεν είναι γραφηματώδης.*

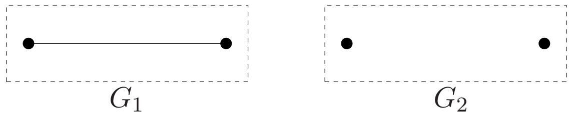
(γ') [10 μονάδες] *Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέστε ότι $d_1 \geq d_2 \geq \ldots d_n$. Αποδείξτε ότι η $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ είναι γραφηματώδης αν και μόνο αν η $(d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1} - 1, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n)$ είναι γραφηματώδης.*

Λύση:

(α') Το παρακάτω γράφημα αντιστοιχεί στη διατεταγμένη πεντάδα $(4, 3, 2, 2, 1)$. Παρατηρούμε ότι ο κόμβος v_i έχει βαθμό d_i, όπου d_i είναι το i-στό στοιχείο της διατεταγμένης πεντάδας.



(β′) Έστω ότι η τετράδα $(3, 3, 3, 1)$ είναι γραφηματώσδης, και έστω G το αντίστοιχο μη κατευθυνόμενο γράφημα χωρίς βρόχους. Έστω v μία από τις κορυφές του G που έχει βαθμό 3. Θεωρούμε το γράφημα G' που προκύπτει αν αφαιρέσουμε από τον G την κορυφή v και όλες τις προσπίπτουσες ακμές στην κορυφή v. Το νέο γράφημα G' έχει τρεις κορυφές με βαθμούς 2, 2 και 0, καθώς η κορυφή v θα πρέπει αναγκαστικά να συνδέεται και με τις τρεις άλλες κορυφές για να έχει βαθμό 3. Αυτό όμως δεν είναι δυνατό γιατί οι δύο κορυφές του G' με μη μηδενικό βαθμό πρέπει να συνδέονται μεταξύ τους και μόνο μεταξύ τους, και να έχουν βαθμό 2 και οι δύο. Τέτοιο γραμμικό γράφημα όμως δεν υπάρχει, δηλαδή καταλήγουμε σε άτοπο (τα μόνα γραμμικά γραφήματα με δύο κορυφές είναι τα γραφήματα G_1 και G_2 που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα).



(γ′) Θα δείξουμε πρώτα ότι αν η $(d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1} - 1, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$ είναι γραφηματώδης, τότε και η $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ είναι γραφηματώδης. Πράγματι, εφ′ όσον η $(d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1} - 1, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$ είναι γραφηματώδης, υπάρχει γράφημα $G = (V, E)$, με σύνολο κόμβων $V = \{v_2, v_3, \dots, v_n\}$, των οποίων οι βαθμοί είναι:

$$\deg(v_k) = \begin{cases} d_k - 1, & 2 \le k \le d_1 + 1 \\ d_k, & d_1 + 2 \le k \le n \end{cases},$$

όπου $\deg(v_i)$ είναι ο βαθμός του κόμβου v_i στο γράφημα G. Ας κατασκευάσουμε τώρα ένα νέο γράφημα G' με σύνολο κόμβων το $V' = V \cup \{v_1\}$, όπου v_1 είναι ένας νέος κόμβος (δηλαδή $v_1 \notin V$), και σύνολο ακμών το $E' = E \cup \{(v_1, v_k) \,|\, 2 \le k \le d_1 + 1\}$, δηλαδή συνδέουμε με ακμή τον κόμβο v_1 με τους κόμβους $v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}\}$ με ευθύγραμμα τμήματα. Θα συμβολίσουμε με $\deg'(v_i)$ το βαθμό του κόμβου v_i στο γράφημα G'. Παρατηρούμε ότι στο γράφημα G' οι κόμβοι v_k, $d_1+2 \le k \le n$, δεν αλλάζουν βαθμό. Κατά συνέπεια, $\deg'(v_k) = d_k$, $d_1 + 2 \le k \le n$. Ο κόμβος v_1 έχει προφανώς βαθμό d_1, δηλαδή $\deg'(v_1) = d_1$, καθώς είναι συνδεδεμένος με d_1 κόμβους στο γράφημα G' (είναι συνδεδεμένος με τους κόμβους $v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}$, των οποίων το πλήθος είναι $(d_1 + 1) - 2 + 1 = d_1$). Τέλος ο βαθμός των κόμβων v_k, $2 \le k \le d_1 + 1$, στο γράφημα G' είναι κατά ένα μεγαλύτερος από το βαθμό τους στο γράφημα G, καθώς στο γράφημα G' συνδέονται και με τον κόμβο v_1. Με άλλα λόγια $\deg'(v_k) = \deg(v_k) + 1 = (d_k - 1) + 1 = d_k$, $2 \le k \le d_1 + 1$. Συνοψίζοντας παρατηρούμε ότι $\deg'(v_k) = d_k$, $1 \le k \le n$, το οποίο σημαίνει ότι βρήκαμε μη κατευθυνόμενο γραμμικό γράφημα, το G', του οποίου οι βαθμοί των κορυφών αντιστοιχούν στην n-άδα $(d_1, d_2, \dots, d_n)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η n-άδα $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ είναι γραφηματώδης.

Τώρα θα δείξουμε ότι αν η $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ είναι γραφηματώδης, τότε και η $(d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1} - 1, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$ γραφηματώδης. Εφ′ όσον η $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ είναι γραφηματώδης, υπάρχει γραμμικό γράφημα $G = (V, E)$ όπου $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, και

$\deg_G(v_i) = d_i$, $1 \leq i \leq n$, όπου $\deg_G(v_k)$ συμβολίζει το βαθμό της κορυφής v_k στο γράφημα G. Για την ακρίβεια (και αυτό θα το δείξουμε παρακάτω) υπάρχει γραμμικό γράφημα G όπως παραπάνω με την επιπλέον ιδιότητα ότι οι d_1 γείτονες της κορυφής v_1 είναι οι κορυφές $v_2, v_3, \ldots, v_{d_1+1}$. Δεδομένου λοιπόν ενός γραμμικού γραφήματος G όπως παραπάνω θεωρούμε το γραμμικό γράφημα $G' = (V', E')$ που προκύπτει από το γράφημα G αν αφαιρέσουμε από αυτό την κορυφή v_1 και όλες τις προσπίπτουσες σε αυτήν ακμές. Δηλαδή, $V' = V \setminus \{v_1\}$ και $E' = E \setminus \{(v_1, u) \,|\, u \in V \setminus \{v_1\}\}$. Οι βαθμοί των κορυφών του γραφήματος G' είναι:

$$\deg_{G'}(v_i) = \begin{cases} d_i - 1, & 2 \leq i \leq d_1 + 1 \\ d_i, & d_1 + 2 \leq i \leq n \end{cases},$$

καθώς όλοι οι γείτονες της κορυφής v_1 στο G έχουν βαθμό στο G' κατά ένα λιγότερο (αφαιρέσαμε την ακμή που τους συνέδεε με την κορυφή v_1). Καταφέραμε λοιπόν να κατασκευάσουμε γραμμικό γράφημα G' του οποίου οι κορυφές έχουν βαθμούς τα στοιχεία της διατεταγμένης $(n-1)$-άδας $(d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1} - 1, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n)$. Κατά συνέπεια η διατεταγμένη $(n-1)$-άδα $(d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1} - 1, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n)$ είναι γραφηματώδης.

Μένει να δείξουμε ότι με αφετηρία την n-άδα $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ πάντα μπορούμε να κατασκευάσουμε γραμμικό γράφημα G με σύνολο κορυφών $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, όπου $\deg_G(v_i) = d_i$, $1 \leq i \leq n$, και στο οποίο γράφημα G η κορυφή v_1 έχει γείτονες τις κορυφές $v_2, v_3, \ldots, v_{d_1+1}$. Έστω ότι κάτι τέτοιο δεν ισχύει. Έστω N_G το *μεγίστου μεγέθους* σύνολο των διαδοχικών (στην ακολουθία κορυφών) γειτόνων του v_1, ξεκινόντας από την κορυφή v_2. Με άλλα λόγια το σύνολο N_G είναι της μορφής $N_G = \{v_2, v_3, \ldots, v_{j_G - 1}\}$, με $2 \leq j_G \leq d_1 + 1$ (πρόσεξτε ότι είναι δυνατόν το j_G να είναι ίσο με 2 οπότε στην περίπτωση αυτή το σύνολο N_G είναι το κενό σύνολο). Μεταξύ όλων των δυνατών γραμμικών γραφημάτων G διαλέγω εκείνο που μεγιστοποιεί το μέγεθος του αντίστοιχου συνόλου N_G, ή ισοδύναμα μεγιστοποιεί την τιμή του δείκτη j_G. Εφ' όσον $j_G \leq d_1 + 1$ υπάρχει k, με $k > j_G$, και άρα $k \geq d_1 + 2$, τέτοιο ώστε η κορυφή v_k να είναι γείτονας του v_1 στο γράφημα G. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

$\boxed{\deg_G(v_{j_G}) = \deg_G(v_k)}$ Τότε μπορώ να ανταλλάγω τους ρόλους των κόμβων v_{j_G} και v_k, το οποίο όμως αντιβαίνει με τη θεώρησή μας ότι το j_G που ορίσαμε παραπάνω είναι το μέγιστο δυνατό. Καταλήγουμε λοιπόν σε άτοπο.

$\boxed{\deg_G(v_{j_G}) > \deg_G(v_k)}$ Στην περίπτωση αυτή θα κατασκευάσω παρακάτω ένα νέο γραμμικό γράφημα Γ στο οποίο η τιμή του j_Γ θα είναι μεγαλύτερη από την τιμή του j_G. Επειδή $\deg_G(v_{j_G}) > \deg_G(v_k)$ υπάρχει κορυφή v_λ η οποία συνδέεται με την κορυφή v_{j_G}, αλλά δε συνδέεται με την κορυφή v_k. Προφανώς $\lambda \neq 1$ γιατί η κορυφή v_1, από τον ορισμό του j_G, δεν συνδέεται με την κορυφή v_1. Κατασκευάζω λοιπόν ένα νέο γραμμικό γράφημα $\Gamma = (V_\Gamma, E_\Gamma)$ ως εξής: $V_\Gamma = V$ και $E_\Gamma = (E \cup \{(v_1, v_{j_G}), (v_k, v_\lambda)\}) \setminus \{(v_1, v_k), (v_{j_G}, v_\lambda)\}$. Με απλά λόγια, για να φτιάξω το Γ αφαίρεσα από το G τις ακμές που συνδέουν τις κορυφές v_1, v_k και v_{j_G}, v_λ πρόσθεσα ακμές που συνδέουν τις κορυφές v_1, v_{j_G} και v_k, v_λ. Παρατηρούμε ότι οι βαθμοί των κορυφών στο γράφημα Γ είναι ίσοι με τους βαθμούς των (ίδιων) κορυφών στο γράφημα G, δηλαδή, $\deg_\Gamma(v_i) = d_i$, $1 \leq i \leq n$. Από την άλλη μεριά το σύνολο N_Γ είναι το $N_\Gamma = \{v_2, v_3, \ldots, v_{j_G - 1}, v_{j_G}\}$, δηλαδή το μέγεθός του είναι μεγαλύτερο από το μέγεθος του N_G. Ισοδύναμα η τιμή του δείκτη j_Γ είναι μεγαλύτερη από την τιμή του δείκτη j_G, καθώς $j_\Gamma = j_G + 1 > j_G$, το οποίο αντιβαίνει με τη «μεγιστότητα» του μεγέθους του συνόλου N_G. Άρα και πάλι καταλήγουμε σε άτοπο.

$\square$

Πρόβλημα 4 [20 μονάδες] *Ένα γραμμικό επίπεδο γράφημα χωρίς βρόχους λέγεται τριγωνοποίηση, αν κάθε χωρίο του, εκτός από το άπειρο χωρίο, έχει ακριβώς τρεις ακμές, και αν δεν είναι δυνατόν να προσθέσουμε ακμή μεταξύ δύο κορυφών του γραφήματος χωρίς να πάψει να είναι επίπεδο. Έστω τριγωνοποίηση T με $n \geq 5$ κορυφές, της οποίας το άπειρο χωρίο έχει 5 κορυφές. Βρείτε τον αριθμό των ακμών της T συναρτήσει του αριθμού των κορυφών της, δηλαδή συναρτήσει του n.*

Λύση: Έστω v, e και f ο αριθμός των κόμβων, ακμών και χωρίων της τριγωνοποίησης T. Επειδή η T είναι επίπεδο γράφημα ισχύει η σχέση του Euler, δηλαδή

$$v - e + f = 2. \tag{1}$$

Παρατηρούμε κατ΄ αρχήν ότι από τον ορισμό της τριγωνοποίησης δεν είναι δυνατόν να έχουμε ακμές που και οι δύο πλευρές του να αποτελούν σύνορο του ίδιου χωρίου. Με άλλα λόγια κάθε ακμή έχει σε κάθε πλευρά της διαφορετικά χωρία.

Επειδή κάθε χωρίο της T έχει τρεις ακμές, εκτός από το άπειρο χωρίο που έχει πέντε, συμπεραίνουμε ότι αν αθροίσουμε τις ακμές ανά πεπερασμένο χωρίο και προσθέσουμε σε αυτό τις ακμές του άπειρου χωρίου, θα έχουμε δύο φορές το αριθμό των ακμών. Αυτό συμβαίνει γιατί μετράμε κάθε ακμή δύο φορές, μία για καθένα από τα δύο χωρία στα οποία ακουμπάει. Κατά συνέπεια ισχύει η σχέση:

$$3(f - 1) + 5 = 2e \tag{2}$$

Απαλείφοντας από το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) το f, προκύπτει η σχέση που θέλουμε, η οποία είναι:

$$e = 3v - 8.$$

□

Πρόβλημα 5 [20 μονάδες] *Ένα γράφημα ονομάζεται* αυτοσυμπληρούμενο *αν είναι ισόμορφο με το συμπλήρωμά του.*

(α΄) ***[5 μονάδες]*** *Βρείτε ένα αυτοσυμπληρούμενο γράφημα με τέσσερεις κορυφές.*

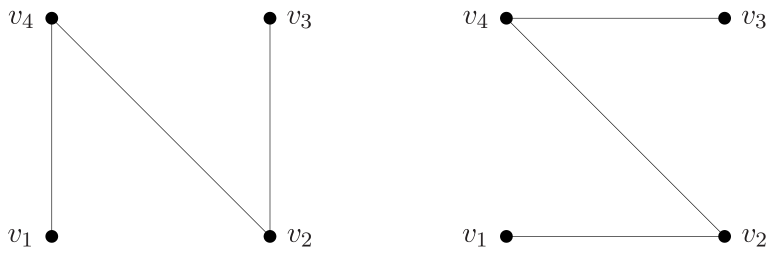
(β΄) ***[5 μονάδες]*** *Βρείτε ένα αυτοσυμπληρούμενο γράφημα με πέντε κορυφές.*

(γ΄) ***[10 μονάδες]*** *Δείξτε ότι κάθε αυτοσυμπληρούμενο γράφημα G έχει είτε $4k$ είτε $4k+1$ κορυφές.*

Υπόδειξη: *Κατ΄ αρχήν παρατηρήστε ότι το άθροισμα των βαθμών των κορυφών ενός γραφήματος είναι ίσο με το διπλάσιο του αριθμού των ακμών του (γιατί;). Στη συνέχεια υπολογίστε τον αριθμό των ακμών του G συναρτήσει του αριθμού των κορυφών του G, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο G και το συμπλήρωμά του είναι ισόμορφοι γράφοι.*

Λύση:

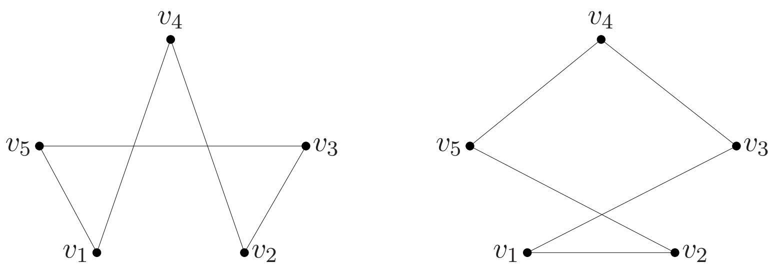
(α΄) Το γράφημα G στα αριστερά του παρακάτω σχήματος είναι αυτοσυμπληρούμενο. Στα δεξιά φαίνεται το συμπληρωματικό του $\overline{G}$ ως προς τον K_4 (το πλήρες γράφημα με τέσσερεις κορυφές).



Μία συνάρτηση που περιγράφει την αντιστοίχιση των κορυφών του G με τις κορυφές του $\overline{G}$ είναι η συνάρτηση f που δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

x	$f(x)$
v_1	v_1
v_2	v_4
v_3	v_3
v_4	v_2

(β′) Το γράφημα στα αριστερά του παρακάτω σχήματος είναι αυτοσυμπληρούμενο. Στα δεξιά φαίνεται το συμπληρωματικό του ως προς τον K_5 (το πλήρες γράφημα με πέντε κορυφές).



Μία συνάρτηση που περιγράφει την αντιστοίχιση των κορυφών του G με τις κορυφές του $\overline{G}$ είναι η συνάρτηση f που δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

x	$f(x)$
v_1	v_1
v_2	v_4
v_3	v_5
v_4	v_3
v_5	v_2

(γ′) Έστω $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ το σύνολο κορυφών του G (n είναι ο αριθμός κορυφών του G), και έστω $d_1, d_2, \ldots, d_n$ οι βαθμοί των κορυφών του G. Επειδή το $\overline{G}$ είναι ισόμορφο του G, υπάρχει συνάρτηση σ «1–1» και «επί» από το V το V που αντιστοιχίζει τις κορυφές του G με τις κορυφές του $\overline{G}$. Έστω επίσης $d'_{\sigma(1)}, d'_{\sigma(2)}, \ldots, d'_{\sigma(n)}$ οι βαθμοί των αντίστοιχων κορυφών του $\overline{G}$. Επειδή οι G και $\overline{G}$ είναι συμπληρωματικοί ως προς τον K_n θα ισχύει

$$d'_{\sigma(i)} = n - d_i - 1, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Αυτό όμως σημαίνει ότι

$$\sum_{i=1}^{n} d'_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^{n} (n - d_i - 1) = n(n-1) - \sum_{i=1}^{n} d_i.$$

Αλλά $\sum_{i=1}^{n} d'_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^{n} d'_i$, και επειδή οι γράφοι G και $\overline{G}$ είναι ισόμορφοι θα έχουμε $\sum_{i=1}^{n} d'_i = \sum_{i=1}^{n} d_i$. Κατά συνέπεια προκύπτει η σχέση

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = n(n-1) - \sum_{i=1}^{n} d_i,$$

δηλαδή

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Έστω m ο αριθμός των ακμών του G. Το άθροισμα των βαθμών ενός γραφήματος είναι διπλάσιο του αριθμού των ακμών του γραφήματος, γιατί όταν αθροίζω τους βαθμούς μετράω κάθε ακμή δύο φορές (μία για κάθε άκρο της). Συνεπώς $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m$, το οποίο σημαίνει ότι

$$m = \frac{n(n-1)}{4}. \tag{3}$$

Ο αριθμός m των ακμών του G πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός, το οποίο με βάση τη σχέση (3) σημαίνει ότι το n θα πρέπει αναγκαστικά να είναι της μορφής $4k$ ή $4k+1$ (αν το n ήταν της μορφής $4k+2$ ή $4k+3$, τότε ο λόγος $\frac{n(n-1)}{4}$ θα ήταν ρητός αλλά όχι ακέραιος). Συνεπώς το αυτοσυμπληρούμενο γράφημα G πρέπει να έχει $4k$ ή $4k+1$ κορυφές.

$\square$