Άσκηση 4 - Λύσεις

Πρόβλημα 1 [30 μονάδες] *Προσδιορίστε τη διακριτή αριθμητική συνάρτηση που αντιστοιχεί σε κάθε μία από τις παρακάτω γεννήτριες συναρτήσεις:*

(α΄) [10 μονάδες]

$$A(z) = \frac{1+z^2}{4-4z-z^2}$$

(β΄) [10 μονάδες]

$$A(z) = \frac{1}{1-z^3}$$

(γ΄) [10 μονάδες]

$$A(z) = \frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)}$$

Λύση:

(α΄) Οι ρίζες του τριωνύμου $4-4z-z^2$ είναι οι $z_{1,2} = -2 \pm 2\sqrt{2}$. Συνεπώς,

$$\frac{1+z^2}{4-4z-z^2} = \frac{1+z^2}{(2+2\sqrt{2}+z)(2-2\sqrt{2}+z)}.$$

Αλλά

$$\frac{1}{(2+2\sqrt{2}+z)(2-2\sqrt{2}+z)} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{1}{2+2\sqrt{2}+z} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{1}{2-2\sqrt{2}+z}.$$

Κατά συνέπεια:

$$\begin{aligned}\frac{1+z^2}{4-4z-z^2} &= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{1+z^2}{2+2\sqrt{2}+z} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{1+z^2}{2-2\sqrt{2}+z}\\ &= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{1}{2+2\sqrt{2}+z} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{z^2}{2+2\sqrt{2}+z} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{1}{2-2\sqrt{2}+z} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{z^2}{2-2\sqrt{2}+z}.\end{aligned}$$

Η γεννήτρια συνάρτηση $\frac{1}{2+2\sqrt{2}+z}$ αντιστοιχεί στην αριθμητική συνάρτηση $(-2-2\sqrt{2})^n$, ενώ η γεννήτρια συνάρτηση $\frac{1}{2-2\sqrt{2}+z}$ αντιστοιχεί στην αριθμητική συνάρτηση $(-2+2\sqrt{2})^n$. Οι δε γεννήτριες συναρτήσεις $\frac{z^2}{2+2\sqrt{2}+z}$ και $\frac{z^2}{2-2\sqrt{2}+z}$ αντιστοιχούν στις αριθμητικές συναρτήσεις

$$\begin{cases} 0 & n = 0,1 \\ (-2-2\sqrt{2})^{n-2} & n \geq 2 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} 0 & n = 0,1 \\ (-2+2\sqrt{2})^{n-2} & n \geq 2 \end{cases}$$

Συνεπώς η δοσμένη γεννήτρια συνάρτηση αντιστοιχεί στην αριθμητική συνάρτηση a_n όπου $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, ενώ για $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{4\sqrt{2}}(-2-2\sqrt{2})^n - \frac{1}{4\sqrt{2}}(-2-2\sqrt{2})^{n-2} + \frac{1}{4\sqrt{2}}(-2+2\sqrt{2})^n + \frac{1}{4\sqrt{2}}(-2+2\sqrt{2})^{n-2} \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{2}}(1 + \frac{1}{(-2-2\sqrt{2})^2})(-2-2\sqrt{2})^n + \frac{1}{4\sqrt{2}}(1 + \frac{1}{(-2+2\sqrt{2})^2})(-2+2\sqrt{2})^n \\ &= -\frac{13+8\sqrt{2}}{4\sqrt{2}(-2-2\sqrt{2})^2}(-2-2\sqrt{2})^n + \frac{13-8\sqrt{2}}{4\sqrt{2}(-2+2\sqrt{2})^2}(-2+2\sqrt{2})^n \end{aligned}$$

Συνοψίζοντας,

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ -\frac{13+8\sqrt{2}}{4\sqrt{2}(-2-2\sqrt{2})^2}(-2-2\sqrt{2})^n + \frac{13-8\sqrt{2}}{4\sqrt{2}(-2+2\sqrt{2})^2}(-2+2\sqrt{2})^n & n \geq 2 \end{cases}$$

(β΄) Παρατηρούμε κατ΄ αρχήν ότι

$$\frac{1}{1-z^3} = \frac{1}{(1-z)(1+z+z^2)} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-z} + \frac{1}{3}\frac{2+z}{1+z+z^2}.$$

Οι ρίζες του τριωνύμου $1 + z + z^2$ είναι $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ και $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$, συνεπώς μπορούμε να γράψουμε το κλάσμα $\frac{2+z}{1+z+z^2}$ ως εξής:

$$\frac{2+z}{1+z+z^2} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} + z} + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} + z}.$$

Κατά συνέπεια

$$\frac{1}{1-z^3} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-z} + \frac{1-i\sqrt{3}}{6}\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} + z} + \frac{1+i\sqrt{3}}{6}\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} + z},$$

η οποία γεννήτρια συνάρτηση αντιστοιχεί στην αριθμητική συνάρτηση

$$a_n = \frac{1}{3} + \frac{1-i\sqrt{3}}{6}(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3})^n + \frac{1+i\sqrt{3}}{6}(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3})^n$$

(γ΄) Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)} &= \frac{1}{(1-z)^3(1+z)(1+z+z^2)} \\ &= \frac{1}{72}\frac{47-52z+17z^2}{(1-z)^3} + \frac{1}{8}\frac{1}{1+z} + \frac{1}{9}\frac{2+z}{1+z+z^2}. \end{aligned}$$

Από το προηγούμενο ερώτημα είδαμε ότι

$$\frac{2+z}{1+z+z^2} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} + z} + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} + z},$$

δηλαδή η γεννήτρια συνάρτηση $\frac{2+z}{1+z+z^2}$ αντιστοιχεί στην αριθμητική συνάρτηση b_n, όπου

$$b_n = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\,(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3})^n + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\,(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3})^n,$$

για κάθε $n \geq 0$. Ακολουθώντας το παράδειγμα 9.17 του βιβλίου παρατηρούμε ότι η γεννήτρια συνάρτηση $\frac{1}{(1-z)^3}$ αντιστοιχεί την αριθμητική συνάρτηση $c_n = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, $n \geq 0$. Συνεπώς η αριθμητική συνάρτηση d_n που αντιστοιχεί στη γεννήτρια συνάρτηση $\frac{47-52z+17z^2}{(1-z)^3}$ θα είναι η

$$d_n = \begin{cases} 47c_n & n=0 \\ 47c_n - 52c_{n-1} & n=1 \\ 47c_n - 52c_{n-1} + 17c_{n-2} & n \geq 2 \end{cases}.$$

Κάνοντας τις πράξεις μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι

$$d_n = 6n^2 + 36n + 47, \quad n \geq 0.$$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ζητούμενη αριθμητική συνάρτηση a_n είναι η

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{72}\,d_n + \frac{1}{8}\,(-1)^n + \frac{1}{9}\,b_n \\ &= \frac{6n^2+36n+47}{72} + \frac{1}{8}\,(-1)^n + \frac{1-i\sqrt{3}}{18}\,(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3})^n + \frac{1+i\sqrt{3}}{18}\,(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3})^n. \end{aligned}$$

□

Πρόβλημα 2 [10 μονάδες] *Έστω*

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} i^2.$$

(α΄) [5 μονάδες] *Δείξτε ότι η a_n είναι $O(n^3)$.*

(β΄) [5 μονάδες] *Δείξτε ότι η a_n είναι $n^3/3 + O(n^2)$.*

Λύση: Θα δείξουμε κατ΄ αρχήν επαγωγικά ότι:

$$a_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n \geq 0.$$

όντως η παραπάνω σχέση ισχύει για $n=0$, γιατί

$$a_0 = \sum_{i=0}^{0} i^2 = 0 = \frac{0(0+1)(2\cdot 0+1)}{6}.$$

Έστω ότι ισχύει για $n = k$. Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = k + 1$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= \sum_{i=0}^{k+1} i^2 \\
&= (k+1)^2 + \sum_{i=0}^{k} i^2 \\
&= (k+1)^2 + \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \\
&= \frac{6(k+1)^2 + k(k+1)(2k+1)}{6} \\
&= \frac{(k+1)[6(k+1) + k(2k+1)]}{6} \\
&= \frac{(k+1)(6k+6+2k^2+k)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\
&= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$a_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}\, n^3 + \frac{1}{2}\, n^2 + \frac{1}{6}\, n, \quad n \geq 0.$$

Με άλλα λόγια η a_n είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού ως προς n, οπότε $a_n = O(n^3)$. Επίσης παρατηρούμε ότι $a_n - \frac{n^3}{3} = \frac{1}{2}\, n^2 + \frac{1}{6}\, n$. Δηλαδή η διακριτή αριθμητική συνάρτηση $a_n - \frac{n^3}{3}$ είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς n, οπότε

$$a_n - \frac{n^3}{3} = O(n^2) \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{n^3}{3} + O(n^2).$$

$\square$

Πρόβλημα 3 [20 μονάδες] *Επιλύστε την εξίσωση διαφορών*

$$a_n - 5a_{n-1} = 3^n + 4\,5^n, \quad n \geq 1,$$

δεδομένου ότι $a_0 = 2$.

Λύση: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της αντίστοιχης ομογενούς αναδρομικής σχέσης είναι το $x - 5 = 0$, το οποίο έχει μία ρίζα την $x_1 = 5$. Συνεπώς, η ομογενής λύση της δοσμένης αναδρομικής σχέσης είναι η:

$$a_n^{(h)} = A\,5^n, \quad n \geq 0,$$

όπου A σταθερά που θα προσδιορίσουμε παρακάτω από τις συνοριακές συνθήκες.

Παρατηρούμε ότι το δεξί μέλος της αναδρομικής μας σχέσης είναι της μορφής $f_1(n) + f_2(n)$, όπου $f_1(n) = 3^n$ και $f_2(n) = 4\,5^n$. Για να βρούμε λοιπόν την ολική λύση της δοσμένης αναδρομικής σχέσης αρκεί να βρούμε μία ειδική λύση $a_n^{(s,1)}$ για την $f_1(n)$, μία ειδική λύση $a_n^{(s,2)}$ για την $f_2(n)$. Η ολική λύση της αναδρομικής σχέσης θα είναι το άθροισμα των δύο ειδικών λύσεων και της ομογενούς λύσης, δηλαδή $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(s,1)} + a_n^{(s,2)}$.

Η ειδική λύση $a_n^{(s,1)}$ θα είναι της μορφής $a_n^{(s,1)} = C_1\, 3^n$. Για να προσδιορίσουμε τη σταθερά C_1 αντικαθιστούμε στην αναδρομική σχέση:

$$C_1\, 3^n - 5C_1\, 3^{n-1} = 3^n \quad \Rightarrow \quad C_1 - \frac{5}{3}C_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{3}{2}.$$

Η ειδική λύση $a_n^{(s,2)}$ θα είναι της μορφής $a_n^{(s,2)} = C_2\, n5^n$ (παρατηρούμε ότι το 5 είναι απλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης της αναδρομικής σχέσης). Για να προσδιορίσουμε τη σταθερά C_2 αντικαθιστούμε στην αναδρομική σχέση:

$$C_2 n5^n - 5C_2\,(n-1)5^{n-1} = 4\, 5^n \quad \Rightarrow \quad C_2 n - C_2 n + C_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 4.$$

Με βάση τα παραπάνω, η ολική λύση της αναδρομικής σχέσης είναι

$$a_n = A\, 5^n - \frac{3}{2}3^n + 4\, n5^n, \quad n \geq 0.$$

Δεδομένου ότι $a_0 = 2$, έχουμε τη συνθήκη

$$A - \frac{3}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{7}{2}.$$

Συνεπώς η λύση της δοσμένης αναδρομικής σχέσης είναι:

$$a_n = \frac{7}{2}\, 5^n - \frac{3}{2}\, 3^n + 4\, n5^n = -\frac{1}{2}\, 3^{n+1} + (4n + \frac{7}{2})\, 5^n, \quad n \geq 0.$$

□

Πρόβλημα 4 [20 μονάδες] *Επιλύστε την εξίσωση διαφορών*

$$a_n - 28a_{n-1} + 187a_{n-2} = f(n), \quad n \geq 2,$$

όπου

$$f(n) = \begin{cases} 11, & n = 11 \\ 17, & n = 17 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases},$$

και δεδομένου ότι $a_0 = 11$, $a_1 = 17$.

Λύση: Θα λύσουμε τη δοσμένη εξίσωση διαφορών με τη μέθοδο των γεννητριών συναρτήσεων. Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned}
a_n - 28a_{n-1} + 187a_{n-2} &= f(n) \\
\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n - 28\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} z^n + 187\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} z^n &= \sum_{n=2}^{\infty} f(n) z^n \\
A(z) - a_0 - a_1 z - 28z(A(z) - a_0) + 187z^2 A(z) &= F(z) - f(0) - f(1)z \\
(1 - 28z + 187z^2)A(z) - 11 - 17z + 308z &= 11z^{11} + 17z^{17} \\
(1 - 28z + 187z^2)A(z) - 11 + 291z &= 11z^{11} + 17z^{17}
\end{aligned}$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$A(z) = \frac{11 - 291z + 11z^{11} + 17z^{17}}{1 - 28z + 187z^2}.$$

Στις παραπάνω εξισώσεις $A(z)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση της a_n, και $F(z)$ η γεννήτρια συνάρτηση της $f(n)$.

Παρατηρούμε ότι $(1 - 28z + 187z^2) = (1 - 17z)(1 - 11z)$, και επίσης:

$$\frac{1}{(1-17z)(1-11z)} = -\frac{11}{6}\,\frac{1}{1-11z} + \frac{17}{6}\,\frac{1}{1-17z}.$$

η οποία είναι η γεννήτρια συνάρτηση της αριθμητικής συνάρτησης $b_n = -\frac{11}{6}\,11^n + \frac{17}{6}\,17^n$. Συνεπώς:

$$A(z) = (-\frac{11}{6}\,\frac{1}{1-11z} + \frac{17}{6}\,\frac{1}{1-17z})(11 - 291z + 11z^{11} + 17z^{17}),$$

η a_n θα είναι η αριθμητική συνάρτηση

$$a_n = 11b_n - 291S^1b_n + 11S^{11}b_n + 17S^{17}b_n.$$

Αναλύωντας την παραπάνω έκφραση προκύπτει ότι

$$a_n = \begin{cases} 11, & n = 0 \\ \frac{85}{3}\,11^n - \frac{52}{3}\,17^n, & 1 \le n \le 10 \\ \frac{133617035823}{4715895382}\,11^n - \frac{69887788548895}{4031987800898}\,17^n, & 11 \le n \le 16 \\ \frac{3905727038393890091}{137849189590716483}\,11^n - \frac{1488459986785026120 22}{858726915452944737 9}\,17^n, & n \ge 17 \end{cases}$$

□

Πρόβλημα 5 [20 μονάδες] *Επιλύστε την εξίσωση διαφορών*

$$3a_n^2 - a_{n-1}a_{n-2} = 0, \quad n \ge 2,$$

δεδομένου ότι $a_0 = 9$, $a_1 = 81$.

Λύση: Από τη δοσμένη αναδρομική σχέση προκύπτουν τα εξής:

$$\begin{aligned} & 3a_n^2 - a_{n-1}a_{n-2} = 0 \\ \Rightarrow\ & 3a_n^2 = a_{n-1}a_{n-2} \\ \Rightarrow\ & \log_3(3a_n^2) = \log_3(a_{n-1}a_{n-2}) \\ \Rightarrow\ & 1 + 2\,\log_3 a_n = \log_3 a_{n-1} + \log_3 a_{n-2}. \end{aligned}$$

Ορίζουμε την αριθμητική συνάρτηση b_n ως $b_n = \log_3 a_n$, $n \ge 2$. Τότε ν παραπάνω σχέση μας δίνει την παρακάτω γραμμική αναδρομική σχέση ως προς τη b_n:

$$1 + 2b_n = b_{n-1} + b_{n-2}, \quad n \ge 2,$$

ή ισοδύναμα

$$2b_n - b_{n-1} - b_{n-2} = -1, \quad n \geq 2.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της παραπάνω γραμμικής αναδρομικής σχέσης είναι το $2x^2 - x - 1 = 0$, του οποίου οι ρίζες είναι $x_1 = 1$ και $x_2 = -\frac{1}{2}$. Συνεπώς η ομογενής λύση της εν λόγω αναδρομικής σχέσης είναι: $b_n^{(h)} = A_0 + A_1(-\frac{1}{2})^n$. Το δεξί μέλος της αναδρομικής σχέσης είναι της μορφής $f(n) = (-1)\,1^n$. Επειδή το 1 είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, η ειδική λύση της αναδρομικής σχέσης θα είναι της μορφής $b_n^{(s)} = Cn$. Η σταθερά C θα υπολογιστεί αντικαθιστώντας την ειδική λύση στην αναδρομική σχέση. Έτσι έχουμε:

$$2Cn - C(n-1) - C(n-2) = -1 \quad \Rightarrow \quad C + 2C = -1 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{3}.$$

Συνεπώς η ειδική λύση είναι $b_n^{(s)} = -\frac{1}{3}\,n$, και η ολική λύση της αναδρομικής σχέσης είναι:

$$b_n = A_0 + A_1(-\frac{1}{2})^n - \frac{1}{3}\,n.$$

Από την παραπάνω έκφραση για την b_n, προκύπτει ότι

$$a_n = 3^{A_0 + A_1(-\frac{1}{2})^n - \frac{1}{3}\,n}, \quad n \geq 0.$$

Οι άγνωστες σταθερές A_0 και A_1, θα υπολογιστούν από τις συνοριακές συνθήκες. Έτσι έχουμε:

$$a_0 = 9 \quad \Rightarrow \quad 3^{A_0 + A_1} = 9 \quad \Rightarrow \quad A_0 + A_1 = 2.$$

και

$$a_1 = 81 \quad \Rightarrow \quad 3^{A_0 - \frac{A_1}{2} - \frac{1}{3}} = 81 \quad \Rightarrow \quad A_0 - \frac{A_1}{2} - \frac{1}{3} = 4 \quad \Rightarrow \quad 6\,A_0 - 3\,A_1 = 26.$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα εξισώσεων προκύπτει ότι

$$A_0 = \frac{32}{9}, \quad A_1 = -\frac{14}{9}.$$

Συνεπώς η λύση της αρχικής μη-γραμμικής αναδρομικής σχέσης είναι:

$$a_n = 3^{\frac{32}{9} - \frac{14}{9}(-\frac{1}{2})^n - \frac{1}{3}\,n}, \quad n \geq 0.$$

$\square$