Εξέταση Φεβρουαρίου – Λύσεις

Διάρκεια: $2\frac{1}{2}$ ώρες

Πρόβλημα 1 [20 μονάδες] *Δεδομένου ενός συνόλου σημείων στο επίπεδο, μία τριγωνοποίηση είναι ένα επίπεδο γράφημα του οποίου οι κόμβοι είναι τα σημεία, οι ακμές είναι ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα σημεία, και με την ιδιότητα ότι δεν είναι δυνατόν να προσθέσουμε στο γράφημα έστω και μία ακμή, χωρίς αυτή να τμήσει το εσωτερικό μίας τουλάχιστον από τις υπάρχουσες ακμές της τριγωνοποίησης. Σε μία τριγωνοποίηση κάθε χωρίο, εκτός από το άπειρο χωρίο, είναι τρίγωνο.*

(α′) [5 μονάδες] *Κατασκευάστε μία τριγωνοποίηση με 6 κόμβους που να έχει κύκλωμα Euler.*

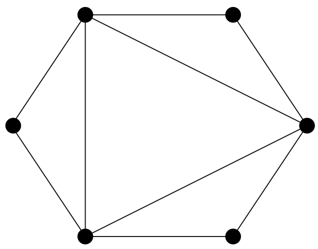
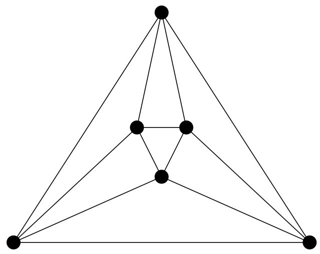
(β′) [5 μονάδες] *Κατασκευάστε μία τριγωνοποίηση με 6 κόμβους που να έχει μονοπάτι, αλλά όχι κύκλωμα Euler.*

(γ′) [5 μονάδες] *Κατασκευάστε μία τριγωνοποίηση με 12 κόμβους που να έχει κύκλωμα Euler.*

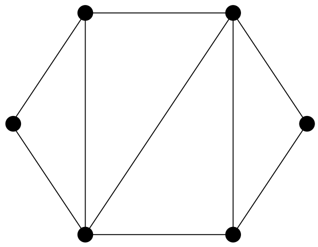
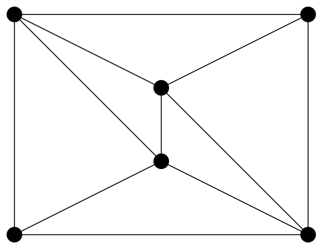
(δ′) [5 μονάδες] *Κατασκευάστε μία τριγωνοποίηση με 12 κόμβους που να έχει μονοπάτι, αλλά όχι κύκλωμα Euler.*

Λύση:

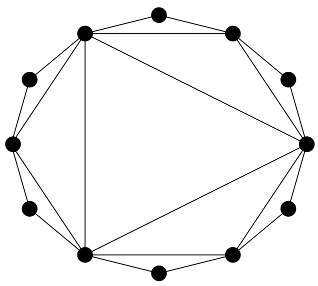
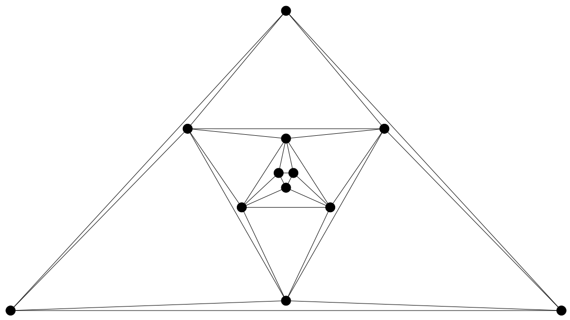
(α′) Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται δύο τέτοιες τριγωνοποιήσεις.

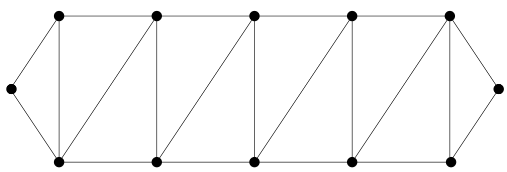
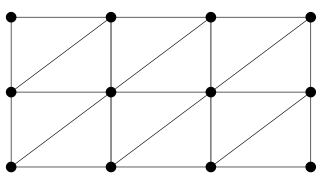
(β′) Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται δύο τέτοιες τριγωνοποιήσεις.

(γ′) Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται δύο τέτοιες τριγωνοποιήσεις.

(δ′) Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται δύο τέτοιες τριγωνοποιήσεις.

$\square$

Πρόβλημα 2 [20 μονάδες] *Έστω το σύνολο $A = \{a, b, c, d, e\}$, και μία διμελής σχέση R επί του A, η οποία ορίζεται από τον παρακάτω πίνακα. Οι γραμμές δηλώνουν το πρώτο στοιχείο των διατεταγμένων ζευγών στην R, ενώ οι στήλες δηλώνουν το δεύτερο στοιχείο των διατεταγμένων ζευγών στην R (κατά συνέπεια, $(a, c) \in R$, αλλά $(c, a) \notin R$).*

	a	b	c	d	e
a	✓		✓		
b		✓	✓		
c			✓		✓
d		✓		✓	✓
e					✓

(α΄) [5 μονάδες] *Κατασκευάστε τον πίνακα της μεταβατικής θήκης $R^\star$ της R. Δείξτε ότι η $R^\star$ είναι σχέση μερικής διάταξης.*

(β΄) [5 μονάδες] *Κατασκευάστε το διάγραμμα Hasse της $R^\star$.*

(γ΄) [5 μονάδες] *Βρείτε διαμέριση του A στον ελάχιστο αριθμό αντιαλυσίδων της $R^\star$.*

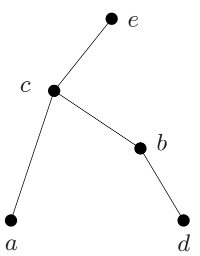
(δ΄) [5 μονάδες] *Ποιά είναι τα ελάχιστα και μέγιστα στοιχεία της $R^\star$;*

Λύση:

(α΄) Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η μεταβατική θήκη $R^\star$ της R. Τα στοιχεία της $R^\star$ που δεν ανήκουν στην R εμφανίζονται με μπλε χρώμα, και πρόκειται για τα στοιχεία (a, e), (b, e) και (d, c).

	a	b	c	d	e
a	✓		✓		✓
b		✓	✓		✓
c			✓		✓
d		✓	✓	✓	✓
e					✓

(β΄) Το διάγραμμα Hasse φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



(γ΄) Ο ελάχιστος αριθμός αντιαλυσίδων είναι 4. Δύο διαμερίσεις του A σε 4 αντιαλυσίδες είναι οι παρακάτω:

$$\{\{a, d\}, \{b\}, \{c\}, \{e\}\}$$

$$\{\{d\}, \{a, b\}, \{c\}, \{e\}\}$$

(δ΄) Τα ελάχιστα στοιχεία της $R^\star$ είναι τα a και d, ενώ η $R^\star$ έχει ένα μέγιστο, το e.

$\square$

Πρόβλημα 3 [20 μονάδες] *Υπολογίστε τη λύση της παρακάτω αναδρομικής σχέσης, βρίσκοντας πρώτα την ομογενή και την ειδική της λύση:*

$$a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = (-2)^{n+2} + 2^{n+2} - n^2, \qquad n \geq 2,$$

με συνοριακές συνθήκες $a_0 = 2$ και $a_1 = 0$.

Λύση: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της αναδρομικής σχέσης είναι $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$, το οποίο έχει λύσεις $\lambda_{1,2} = -3, 2$. Συνεπώς, η ομογενής λύση της αναδρομικής σχέσης είναι η:

$$a_n^{(h)} = A(-3)^n + B2^n,$$

όπου A και B σταθερές που θα προσδιοριστούν παρακάτω από τις συνοριακές συνθήκες.

Για την εύρεση της ειδικής λύσης χωρίζουμε το δεξί μέλος σε τρία κομμάτια και βρίσκουμε για καθένα από αυτά την ειδική λύση. Τα τρία αυτά κομμάτια είναι τα $f_1(n) = (-2)^{n+2}$, $f_2(n) = 2^{n+2}$ και $f_3(n) = -n^2$. Η ειδική λύση που

αντιστοιχεί στην $f_1(n)$ είναι της μορφής $C(-2)^n$. Αντικαθιστώντας στην αναδρομική σχέση βρίσκουμε ότι $C = -4$. Συνεπώς το πρώτο κομμάτι της ειδικής λύσης είναι $a_n^{(s_1)} = -4(-2)^n = -(-2)^{n+2}$.
Η ειδική λύση που αντιστοιχεί στην $f_2(n)$ είναι της μορφής $Dn2^n$, καθώς το 2 είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου πολλαπλότητας 1. Αντικαθιστώντας στην αναδρομική σχέση βρίσκουμε ότι $D = \frac{8}{5}$. Συνεπώς το δεύτερο κομμάτι της ειδικής λύσης είναι $a_n^{(s_2)} = \frac{8}{5}n2^n$.
Τέλος, η ειδική λύση που αντιστοιχεί στην $f_3(n)$ είναι της μορφής $En^2 + Fn + G$. Αντικαθιστώντας στην αναδρομική σχέση καταλήγουμε στο γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους:

$$\begin{aligned} -4E &= -1 \\ -4F + 22E &= 0 \\ -4G + 11F - 23E &= 0 \end{aligned}$$

λύνοντας το οποίο προκύπτει ότι:

$$E = \frac{1}{4}, \qquad F = \frac{11}{8}, \qquad G = \frac{75}{32}.$$

Συνεπώς το τρίτο κομμάτι της ειδικής λύσης είναι $a_n^{(s_3)} = \frac{1}{4}n^2 + \frac{11}{8}n + \frac{75}{32}$.
Η ολική λύση της αναδρομικής σχέσης είναι:

$$a_n = A(-3)^n + B2^n - (-2)^{n+2} + \frac{8}{5}n2^n + \frac{1}{4}n^2 + \frac{11}{8}n + \frac{75}{32}.$$

Χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες $a_0 = 2$ και $a_1 = 0$, προκύπτει από την παραπάνω έκφραση ότι

$$\begin{aligned} A + B - 4 + \frac{75}{32} &= 2 \\ -3A + 2B + 8 + \frac{8}{5}\cdot 2 + \frac{1}{4} + \frac{11}{8} + \frac{75}{32} &= 0 \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} A + B &= \frac{117}{32} \\ -3A + 2B &= -\frac{2427}{160} \end{aligned}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα βρίσκουμε:

$$A = \frac{3597}{800}, \qquad B = -\frac{21}{25},$$

οπότε η λύση της δοσμένης αναδρομικής σχέσης με τις δοσμένες συνοριακές συνθήκες είναι:

$$a_n = \frac{3597}{800}(-3)^n - \frac{21}{25}2^n - (-2)^{n+2} + \frac{8}{5}n2^n + \frac{1}{4}n^2 + \frac{11}{8}n + \frac{75}{32}.$$

□

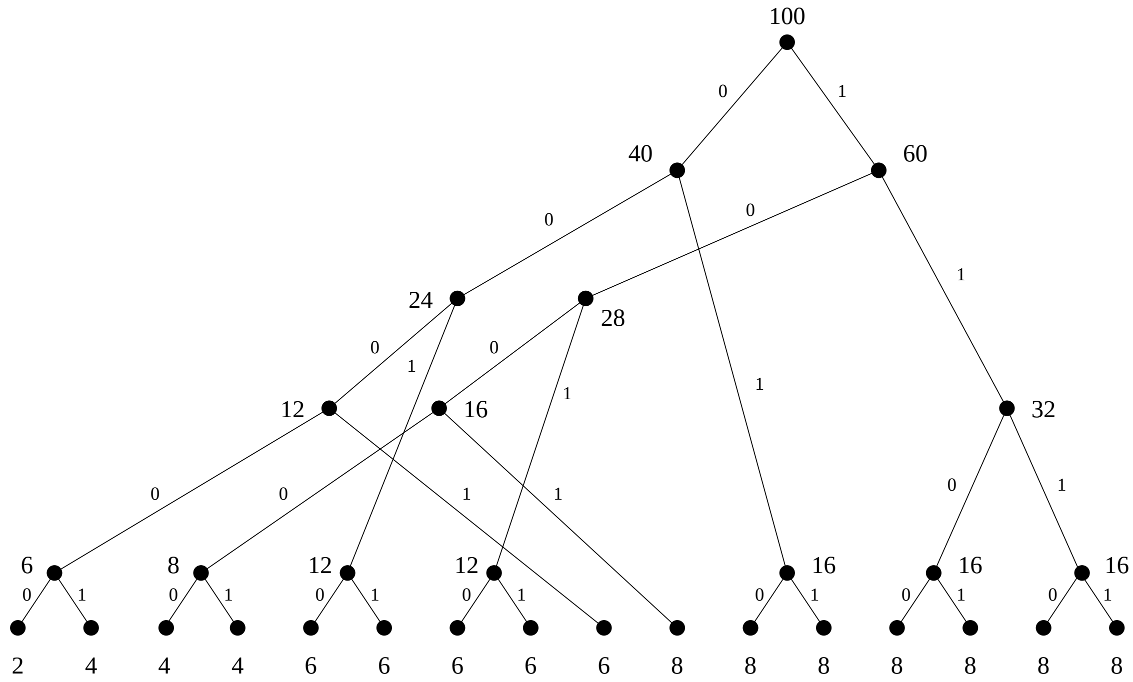
Πρόβλημα 4 [20 μονάδες] *Για καθένα από τα παρακάτω σύνολα βαρών κατασκευάστε έναν βέλτιστο δυαδικό κώδικα προθέματος. Για κάθε βάρος του συνόλου, δώστε την αντίστοιχη κωδική λέξη.*

(α΄) [10 μονάδες] *2, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8.*

(β΄) [10 μονάδες] *1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64.*

Λύση:

(α΄) Το δυαδικό δέντρο για το δοσμένο σύνολο αριθμών είναι το παρακάτω (το κατασκευάζουμε από κάτω προς τα πάνω).

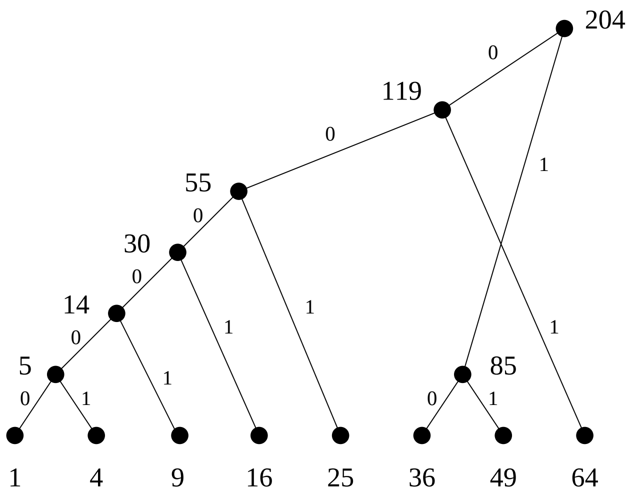


Οι αντίστοιχες κωδικές λέξεις είναι:

2	00000
4	00001
4	10100
4	10101
6	0010
6	0011
6	1000
6	1001
6	0001

8	1011
8	010
8	011
8	1100
8	1101
8	1110
8	1111

(β΄) Το δυαδικό δέντρο για το δοσμένο σύνολο αριθμών είναι το παρακάτω (το κατασκευάζουμε από κάτω προς τα πάνω).

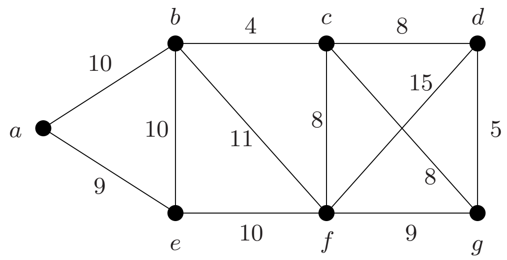


Οι αντίστοιχες κωδικές λέξεις είναι:

1	000000
4	000001
9	00001
16	0001
25	001
36	10
49	11
64	01

□

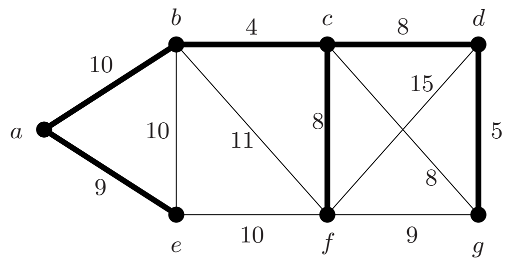
Πρόβλημα 5 [20 μονάδες] *Προσδιορίστε το ελάχιστο επικαλύπτον δέντρο για το γράφημα του παρακάτω σχήματος. Πιο το βάρος του δέντρου που υπολογίσατε;*



Λύση: Κοιτάμε τις ακμές του γραφήματος σε σειρά αύξοντος βάρους. Επιλέγουμε μία ακμή αν δεν δημιουργεί κύκλωμα και σταματάμε όταν έχουμε επικαλύπτον δέντρο.

Ξεκινάμε από την ακμή bc την οποία και διαλέγουμε. Κοιτάμε μετά την ακμή dg, την οποία επίσης και διαλέγουμε. Μετά κοιτάμε μία εκ των ακμών cd, cf και cg. Δεν έχει σημασία με ποια σειρά. Ας υποθέσουμε ότι τις κοιτάμε με τη σειρά που τις αναφέραμε παραπάνω. Τότε την ακμή cd την επιλέγουμε, την ακμή cf την επιλέγουμε και αυτή, ενώ την ακμή cg την απορρίπτουμε γιατί δημιουργεί κύκλωμα. Στη συνέχεια κοιτάμε τις ακμές fg και ae, ας πούμε με τη σειρά αυτή (η σειρά δεν επηρεάζει την εύρεση του ελαχίστου επικαλύπτοντος δέντρου). Την ακμή fg την απορρίπτουμε γιατί δημιουργεί κύκλωμα, ενώ την ακμή ae την επιλέγουμε. Στην συνέχεια κοιτάμε τις ακμές ab, be και ef. Και πάλι η σειρά δεν παίζει ρόλο. Υποθέτουμε λοιπόν ότι η σειρά είναι αυτή με την οποία τις αναφέραμε παραπάνω. Έτσι την ακμή ab θα την επιλέξουμε, και εδώ θα σταματήσουμε γιατί έχουμε ήδη δημιουργήσει ένα επικαλύπτον δέντρο, το οποίο σύμφωνα με τη θεωρία είναι ελάχιστο (βλ. και σχήμα παρακάτω, όπου το ελάχιστο επικαλύπτον δέντρο φαίνεται με παχιές ακμές). Το βάρος W του ελαχίστου επικαλύπτοντος δέντρου είναι:

$$W = 4 + 5 + 8 + 8 + 9 + 10 = 44.$$



□

Σύνολο μονάδων: 100