Άσκηση 1

Ημερομηνία Παράδοσης: 13:00, 30 Οκτωβρίου 2009

Πρόβλημα 1 [20 μονάδες] Αποδείξτε με επαγωγή ότι το άθροισμα των κύβων τριών διαδοχικών θετικών ακεραίων διαιρείται με το 9.

Πρόβλημα 2 [20 μονάδες] Αποδείξτε με επαγωγή την παρακάτω σχέση:

$$n^3 = \sum_{k=1}^{n} (n^2 - n + 2k - 1), \quad n \geq 1.$$

Πρόβλημα 3 [20 μονάδες] Αποδείξτε με επαγωγή ότι για $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

Πρόβλημα 4 [20 μονάδες] Δείξτε ότι η ένωση αριθμησίμου πλήθους αριθμησίμων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο. Με άλλα λόγια αν A_i αριθμήσιμο σύνολο, για κάθε $i \geq 0$, τότε και το σύνολο

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$$

είναι αριθμήσιμο.

Υπόδειξη: Η απόδειξη που σας ζητείται μοιάζει με την απόδειξη ότι αν A και B αριθμήσιμα σύνολα, τότε και το $A \times B$ είναι αριθμήσιμο.

Πρόβλημα 5 [20 μονάδες] Έστω p και q δύο προτάσεις.

(α′) **[10 μονάδες]** Αν η πρόταση $p \to q$ είναι ψευδής, προσδιορίστε την τιμή αληθείας της πρότασης $(\bar{p} \vee \bar{q}) \to q$.

(β′) **[10 μονάδες]** Αν σας δίνεται ότι η τιμή του $p \to q$ είναι αληθής, μπορείτε να προσδιορίσετε την τιμή του $\bar{p} \vee (p \leftrightarrow q)$;

Σύνολο μονάδων: 100