

# Άσκηση 1

Ημερομηνία Παράδοσης: 27 Οκτωβρίου 2011

**Πρόβλημα 1 [20 μονάδες]** Δείξτε ότι η ένωση αριθμησίμου πλήθους απείρως αριθμησίμων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο. Με άλλα λόγια αν  $A_i$  απείρως αριθμήσιμο σύνολο (δηλ. αριθμήσιμο σύνολο με άπειρο πλήθος στοιχείων), για κάθε  $i \geq 0$ , τότε και το σύνολο

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$$

είναι αριθμήσιμο.

**Πρόβλημα 2 [10 μονάδες]** Έστω  $p$  και  $q$  δύο προτάσεις.

(α') [5 μονάδες] Αν η πρόταση  $p \rightarrow q$  είναι ψευδής, προσδιορίστε την τιμή αληθείας της πρότασης  $(\bar{p} \vee \bar{q}) \rightarrow q$ .

(β') [5 μονάδες] Αν σας δίνεται ότι η τιμή του  $p \rightarrow q$  είναι αληθής, μπορείτε να προσδιορίσετε την τιμή του  $\bar{p} \vee (p \leftrightarrow q)$ ;

**Πρόβλημα 3 [20 μονάδες]** Αποδείξτε με επαγωγή την παρακάτω σχέση:

$$n^3 = \sum_{k=1}^n (n^2 - n + 2k - 1), \quad n \geq 1.$$

**Πρόβλημα 4 [20 μονάδες]** Αποδείξτε με επαγωγή ότι για  $n \geq 1$ :

$$\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

**Πρόβλημα 5 [30 μονάδες]** Από ένα σύνολο 180 φοιτητών, 70 φορούν καπέλο στην τάξη, 51 φορούν κασκόλ και 38 φορούν και καπέλο και κασκόλ. Από τους 64 φοιτητές που φορούν πουλόβερ, 36 φορούν καπέλο, 31 φορούν κασκόλ και 22 φορούν και καπέλο και κασκόλ. Όλοι όσοι δεν φορούν ούτε καπέλο ούτε κασκόλ φορούν γάντια.

(α') [10 μονάδες] Πόσοι φοιτητές φορούν γάντια;

(β') [10 μονάδες] Πόσοι φοιτητές που δεν φορούν πουλόβερ, φορούν κασκόλ αλλά όχι καπέλο;

(γ') [10 μονάδες] Πόσοι φοιτητές που δεν φορούν πουλόβερ, δεν φορούν ούτε καπέλο, ούτε κασκόλ;

Σύνολο μονάδων: 100