

$$\underline{\Sigma\chi} \quad \{ d \in \{a\} \} \Leftrightarrow d = a$$

Απόσπασμα οθόνης που λήφθηκε: 05-Oct-20, 09:06

$\Sigma\chi$ Ποιών συνόλων την ύπαρξη μπορούμε τώρα να αποδείξουμε;

Απόσπασμα οθόνης που λήφθηκε: 05-Oct-20, 09:19

$$\begin{aligned} 0 &:= \emptyset \\ 1 &:= \{0\} \\ 2 &:= \{0, 1\} \end{aligned} \quad (\text{δλδ } 2 = \{\{0\}, \emptyset\})$$

Και πολλών άλλων,

π.χ., των $\{1\}, \{\{1\}\}, \dots$

και των $\{\{0\}, \{1\}\}, \{\{\{0\}\}, \{\{1\}\}\}, \dots$

(Αλλά όχι του $3 := \{0, 1, 2\}$)

Αδκ

Απόσπασμα οθόνης που λήφθηκε: 05-Oct-20, 08:24

$0 \neq 1$

$0 \neq 2$

$1 \neq 2$

Ορ Δεδ. a, b ορίζω

το διατεταγμένο ζεύγος (a, b) ως εξής:

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Απόσπασμα οθόνης που λήφθηκε: 05-Oct-20, 09:27

Θ (ΚΙΔΖ)

Δεδ. a, b, c, d :

•

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ \text{και} \\ b = d \end{cases}$$

Απόσπασμα οθόνης που λήφθηκε: 05-Oct-20, 09:30

Απ Άσκ

Παρατηρήστε ότι το αντίστροφο είναι τετριμμένο.

(επειδή «ίσα μπορούν να αντικατασταθούν με ίσα»)

Απόσπασμα οθόνης που λήφθηκε: 05-Oct-20, 09:32

Σχ Παρατηρούμε ότι $\{a, b\} \neq (a, b)$:

Πράγματι, πάντα $\{a, b\} = \{b, a\}$

ενώ $(0, 1) \neq (1, 0)$ (γιατί τότε, από το ΚΙΔΖ, θα είχα $0 = 1$, αππ)

4. Το Αξίωμα της Ένωσης

Αξ (Το Αξίωμα της Ένωσης) Δεδ. $\mathcal{A}$:

Τότε υπάρχει πάντα το X

που αποτελείται από τα στοιχεία των στοιχείων του $\mathcal{A}$.

Σχ Δηλαδή:

$$\text{Δεδ. } a : \quad a \in X \quad \Leftrightarrow \quad (\exists Y \in \mathcal{A}) a \in Y$$

$$\underline{\pi a e} \mid Y_1 = \{0, 1\} \quad Y_2 = \{1, 2\}$$

$$\mathcal{A} = \{Y_1, Y_2\}$$

$$\pi o, a \quad a \in X? \quad a = 0, 1, 2$$

$$X = Y_1 \cup Y_2$$

Συμβ Αυτό το X συμβολίζεται με $\bigcup \mathcal{A}$

ή με $\bigcup_{Y \in \mathcal{A}} Y.$

Παρ | ① $A = \{A\}$ $\cup A = A$

② $A = \{A, B\}$ $\cup A = A \cup B$

③ $A = \{A, B, C\}$ $\cup A = A \cup B \cup C$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$A \cup B = B \cup A$$

④ $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ $\cup A = A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n$

Ασκ Στην άσκηση αυτή δεν θα είμαστε «αυστηροί».

Για n θετικό ακέραιο, έστω Y_n το ανοικτό διάστημα $(-n, n)$.

Έστω $\mathcal{A}$ το σύνολο όλων αυτών των Y_n .

Να αποδείξετε ότι $\bigcup \mathcal{A} = \mathbb{R}$

Σχ Με το «νέο» μας αξίωμα,

ποιών συνόλων την ύπαρξη μπορούμε να αποδείξουμε;

Απόσπασμα οθόνης από: 05-Oct-20, 09:55

του $Z := \{0, 1, 2\}$

επιπλέον $a := 2 = \{0, 1\}$
 $b := \{2\}$

$A := \{a, b\} \quad Z := \cup A$

$$x \in 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{cases} \quad 3 = \{0, 1, 2\}$$

Παρόμοια $\mid \forall a, b, c \exists \pi \{0, b, c\}$

$$4 := \{0, 1, 2, 3\}$$

$$5 := \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

...

5. Το Αξίωμα του Διαχωρισμού

Ορολ Ας κρατήσουμε σταθερή

μια πρόταση $\Phi = \Phi(x)$ που εξαρτάται από το x .

Τότε, δεδομένου του x ,

θα λέω ότι το x είναι λύση της Φ ,

και θα εννοώ ότι η (σταθερή) πρόταση $\Phi(x)$ είναι αληθής.

Παρε | Αν " $\phi(x)$ " είναι,

$$x \in \mathbb{Z} \text{ και } 2 \leq x \leq 4$$

λύσεις? $x = 2, 3, 4$

Συμβ | $\{x : \phi(x)\}$

το σύνολο των λύσεων (αν υπάρχει...!)

$$\underline{\text{παρ}} \mid A := \{x : \Phi(x)\}$$

$$\Phi(x)$$

$$A$$

$$1 \quad x \in a$$

$$2 \quad x \in a \vee x \in b$$

$$3 \quad x = x$$

$$4 \quad x \notin x$$

$$a$$

$$a \cup b = \cup \{a, b\}$$

$$?$$

$$?$$

Russel

$$\Sigma_{10} 4: \nexists A$$

$$(α) \text{ όπως } A \notin A \quad A \in A \quad \alpha \neq n)$$

Αξ (Το Αξίωμα του Διαχωρισμού)

Δεδομένου του D

και μιας πρότασης ' $\Phi = \Phi(x)$ ' που εξαρτάται από το x

υπάρχει τότε το σύνολο A των λύσεων της Φ που ανήκουν στο D .

Απόσπασμα οθόνης που λήφθηκε: 05-Oct-20, 10:23

$$\underline{\text{Συμ}} \quad A = \{x \in D : \Phi(x)\} \quad A \subseteq D$$

$\{x: \phi(x)\}$

Cantor

$\{a, b, c\}$

6. Τομές

Θ (Το Θεώρημα της Τομής) Δεδ. **μη-κενού** $\mathcal{A}$:

Τότε υπάρχει πάντα **το** X

που αποτελείται από τα κοινά στοιχεία των στοιχείων του $\mathcal{A}$.

Σχ Δηλαδή:

$$\text{Δεδ. } a : \quad a \in X \quad \Leftrightarrow \quad (\forall Y \in \mathcal{A}) a \in Y$$

Συμβ Αυτό το X συμβολίζεται με $\bigcap A$

ή με $\bigcap_{Y \in A} Y.$

Απόσπασμα οθόνης που λήφθηκε: 05-Oct-20, 17:31

Παρ/Συμβ | $\cancel{A} = \{A, B\}$ $\cap \cancel{A} = A \cap B$
 $\cancel{A} = \{A, B, C\}$ $\cap \cancel{A} = A \cap B \cap C$

Απ (σκίτσος) $A \neq \emptyset$
Βρίσκω $D \in A$

Αξ. Διαχ:

$$\exists \text{ το } X := \{a \in D : \underbrace{(\forall Y \in A)}_{\phi(a)} a \in Y\}$$

ΑΝΔΟ Το X είναι "συνο" (?)

(?) $a \in X \Leftrightarrow \phi(a)$

$$\underbrace{\phi(a)}_{a \in \bigcap A} \Leftrightarrow \underbrace{\phi(a) \wedge a \in I}_{a \in X}$$