

7. Το Αξίωμα του Δυναμοσυνόλου

Αξ (Το Αξίωμα του Δυναμοσυνόλου)

Δεδομένου του A :

Τότε υπάρχει το $\mathcal{P}(A)$ που αποτελείται ακριβώς από τα υποσύνολα του A .

$$\underline{\Sigma\chi} \quad B \subseteq A \quad \Leftrightarrow \quad B \in \mathcal{P}(A)$$

8. Καρτεσιανά Γινόμενα

Θ (Υπαρξη του Καρτεσιανού Γινομένου)

Δεδομένων A και B :

Τότε υπάρχει το $A \times B$ που αποτελείται ακριβώς από τα c που γράφονται ως $c = (a, b)$ με $a \in A$ και $b \in B$.

Σχ $c \in A \times B \Leftrightarrow (\exists a \in A)(\exists b \in B) c = (a, b)$

Ορολ Μια πρόταση $\Phi(x)$ που εξαρτάται από το x θα τη λέμε και «τύπο».

Συμφ Στο εξής το σύμβολο $\Phi(x)$ θα συμβολίζει πάντα ένα τύπο.

Σχ Όταν λέμε «υπάρχει το σύνολο λύσεων του $\Phi(x)$ »

εννοούμε ακριβώς ότι

$$(\exists C)(\forall c) \quad c \in C \Leftrightarrow \Phi(c)$$

Το παραπάνω C είναι βέβαια μοναδικό (αυτό προκύπτει, ως συνήθως, εύκολα, από το Αξίωμα της Έκτασης),

είναι το ζητούμενο σύνολο λύσεων,

και συμβολίζεται με το γνωστό τρόπο: $C = \{c : \Phi(c)\}$.

Σημαντικό Σχόλιο:

Μια «κλασική» μέθοδος να αποδείξουμε την ύπαρξη του συνόλου λύσεων του $\Phi(x)$ είναι να χρησιμοποιήσουμε το Αξίωμα του Διαχωρισμού ως εξής:

Θα λέω «το D είναι άνω φράγμα για το $\Phi(x)$ »

και θα εννοώ ότι περιέχει όλες τις λύσεις του $\Phi(x)$.

Παρατηρήστε ότι

αν ήδη γνωρίζω την ύπαρξη του $C = \{c : \Phi(c)\}$

τότε η φράση «το D είναι άνω φράγμα για το $\Phi(x)$ » απλώς σημαίνει « $C \subseteq D$ ».

Αλλά η «ουσία του θέματος» είναι

τι κάνω αν δεν γνωρίζω αυτήν την ύπαρξη.

Θα διατυπώσω τη μέθοδο αυτή ως τον παρακάτω Ισχυρισμό:

Ισχυρισμός:

Αν υπάρχει κάποιο άνω φράγμα D για τον Φ τότε υπάρχει και το C .

Απόδειξη του Ισχυρισμού:

Στα παρακάτω, θα λέω απλώς «λύση» και θα εννοώ «λύση του Φ ».

Από το Αξίωμα του Διαχωρισμού ξέρω ότι υπάρχει το σύνολο C' που αποτελείται ακριβώς από τις λύσεις c που έχουν την ιδιότητα ότι $c \in D$.

Όμως, αφού το D είναι άνω φράγμα, αυτές είναι **όλες** οι λύσεις.

Με άλλα λόγια, το ζητούμενο σύνολο C δεν είναι τίποτα άλλο από το C' .

Αυτό ολοκληρώνει την Απόδειξη του Ισχυρισμού.

Απόσπασμα οθόνης που λήφθηκε: 07-Oct-20, 09:46

$$\begin{array}{l} \{x : \Phi(x)\} \quad ? \quad C \\ \{x \in D : \Phi(x)\} \quad \checkmark \quad C' \end{array}$$

Απ. του Θ

$$\phi(x) : (\exists a \in A) [(\exists b \in B) \\ x = (a, b)]$$

C σ.λ. (αν υπάρχει!)

$$C = A \times B$$

(?) ΝΔΟ $\exists$ το C

⑦ va βew a.φ. $\mathcal{D} = \mathcal{D}_2$

$$\mathcal{D}_1 := \mathcal{P}(A \cup B)$$

$$\mathcal{D}_2 := \mathcal{P}(\mathcal{D}_1)$$

η. βx $\mathcal{D}_2$ είναι a.φ. του $\bar{\Phi}$

Αν 16x | Έστω C τυχαία λίστα (του Φ)

δλδ $C = (a, b) \quad \exists a \in A \quad \exists b \in B$

έστω $u = \{a\} \quad v = \{a, b\}$

δλδ $C = \{u, v\}$

$$a, b \in A \cup B \quad \text{όρα} \quad u, v \subseteq A \cup B$$

$$\text{όρα} \quad u, v \in \mathcal{P}(A \cup B) = D_1$$

$$\{u, v\} \subseteq D_1$$

$$\text{όρα} \quad \underbrace{\{u, v\}}_c \in \mathcal{P}(D_1) = D_2$$

$\Delta \Delta \delta$ $\epsilon \delta \epsilon \zeta a$: η τυχαία λίστα w , ϕ
 $(\delta \Delta \delta \text{ } w \text{ } c)$ $\int_{\epsilon_1}^{\infty} D_2$ $(c \in D_2)$



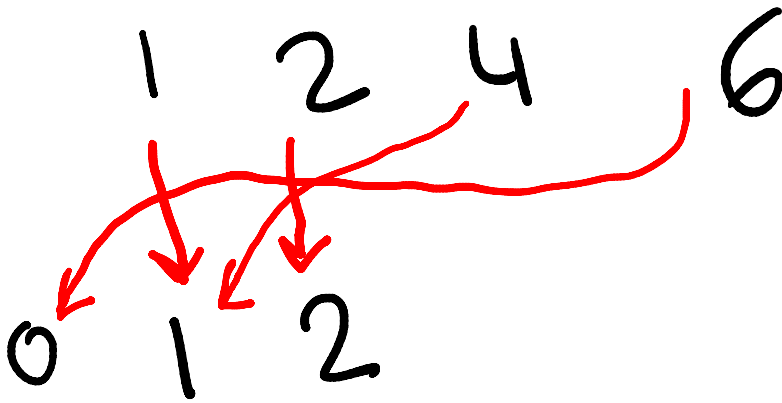
9. Συναρτήσεις

Απόσπασμα οθόνης που λήφθηκε: 07-Oct-20, 10:28

$$A = \{1, 2, 4, 6\}$$

Εισαγωγή

$$f(x) = x \bmod 3$$



$$f(1) = 1 \quad (1, 1)$$

$$f(2) = 2 \quad (2, 2)$$

$$f(4) = 1 \quad (4, 1)$$

$$f(6) = 0 \quad (6, 0)$$

$$f(x) = y \quad (x, y)$$

$$\{(1, 1), (2, 2), (4, 1), (6, 0)\} = f$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow (x, y) \in f$$