

Ορολ Δεδ. f : Λέμε «το f είναι συνάρτηση» και εννοούμε ότι έχει τις εξής ιδιότητες 1 και 2:

1. Το f είναι σύνολο διατεταγμένων ζευγών.
2. Δεδομένων x, y, z : αν $(x, y) \in f$ και $(x, z) \in f$, τότε $y = z$.

Σχ Η ιδιότητα 1 λέει: κάθε $c \in f$ είναι διατεταγμένο ζεύγος, δηλαδή

$$(\forall c \in f) \quad (\exists x, y) \quad c = (x, y).$$

Το x (η «τετμημένη» του c) και το y (η «τεταγμένη» του c) είναι μοναδικά, από το ΚΙΔΖ.

Ορ Δεδομένης συνάρτησης f το πεδίο ορισμού της f ορίζεται ως εξής:

$$\text{Dom}(f) = \{x : \exists y \quad (x, y) \in f\}$$

Σχ Ο έλεγχος ότι το παραπάνω είναι καλώς ορισμένο χρειάζεται ένα άνω φράγμα. Αυτό είναι το $\bigcup f$.

Αδκ | Εξηγήστε

Υποδ | · Έστω $x \neq w \quad \exists y (x, y) \in f$

$$C = (x, y) = \{ \underbrace{\{x\}}_u, \underbrace{\{x, y\}}_v \}$$

$$u \in C \in f$$

$$u \in U_f$$

$$x \in u \in U_f \quad x \in U U_f \quad \square$$

Σχ Ας υποθέσουμε τώρα ότι η f είναι συνάρτηση και το x ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

Δεδομένου y , θα λέω «το y είναι τιμή της f στο x » και θα εννοώ $(x, y) \in f$.

Αυτή η τιμή υπάρχει γιατί $x \in \text{Dom}(f)$. Είναι μοναδική από την παραπάνω ιδιότητα 2.

Δηλαδή το παρακάτω είναι καλώς ορισμένο:

Ορ Δεδ. συνάρτησης f και $x \in \text{Dom}(f)$, το σύμβολο $f(x)$ συμβολίζει την τιμή της f στο x .

Σχ Δεδομένης συνάρτησης f και $x \in \text{Dom}(f)$: $\forall y \quad y = f(x) \Leftrightarrow (x, y) \in f$.

Θ (Κριτήριο Ισότητας Συναρτήσεων)

Δεδ. συναρτήσεων f, g ΤΑΕΙ:

$$\textcircled{1} \quad f = g$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} \text{Dom } f = \text{Dom } g \text{ (έστω } A \text{ η κοινή τους τιμή)} \\ \text{και} \\ (\forall x \in A) \quad f(x) = g(x) \end{cases}$$

$$\frac{A \pi}{\quad} \mid \textcircled{1} \Rightarrow \textcircled{2} \mid \tau \in \tau \ell.$$

$$\frac{\textcircled{2} \Rightarrow \textcircled{1}}{\quad} \mid \epsilon \text{ow} : \tau \circ \textcircled{2}$$

$$\text{DSS} \text{ ew } \textcircled{\checkmark} \text{Dom } f = \text{Dom } g = A$$

$$\text{d } (\forall x \in A) \quad f(x) = g(x)$$

$$\textcircled{?} \tau \circ \textcircled{1}, \text{DSS} \quad f = g$$

?

$f \subseteq g$

$(\forall c) c \in f \Rightarrow c \in g$

· $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z, \dots\}$

✓ $c \in f$

?

$$C = (x, y)$$

$$(\exists x, y)$$

$$x \in \text{Dom } f$$

$$x \in \text{Dom } g$$

$$\text{eniors } y = f(x)$$

$$y = g(x)$$

$$(x, y) \in g$$



Συμβ Ο συμβολισμός $f : A \rightarrow B$ σημαίνει ότι:

- ① η f είναι συνάρτηση
- ② $\text{Dom } f = A$
- ③ $(\forall x \in A) \quad f(x) \in B$

Ορολ Λέμε «η f είναι συνάρτηση από το A στο B »

και εννοούμε: $f : A \rightarrow B$.

Συμβ Συμβολίζουμε με B^A το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το A στο B .

Σχ Με άλλα λόγια: $B^A = \{f \mid f : A \rightarrow B\}$

(Ως συνήθως, το σύνολο λύσεων ενός τύπου Φ το συμβολίζουμε και με $\{x \mid \Phi(x)\}$.)

Θ (Υπαρξη του B^A)

Δεδ A, B :

Τότε υπάρχει το B^A .

An $\phi(f)$

$f: A \rightarrow B$

AND 1×1 $\exists D$ α.φ του ϕ

An. 1×1 $\{ \sigma \in D = \mathcal{P}(A \times B) \}$

AND 1×2 το D είναι α.φ. του ϕ

Απ. 16x. 2 | Έστω f τυχαία λิม το ϕ

ΑΝΔΟ
16x3 | $f \in D$ (?)

$$\Phi(f)$$

$$f: A \rightarrow B$$

$$\textcircled{\checkmark} c \in f$$

$$\textcircled{?} c \in A \times B$$

$$\textcircled{?} f \in P(A \times B)$$

$$\textcircled{?}^{\text{dis}} f \subseteq A \times B$$

$$c = (x, y) \quad (\exists x, y)$$

$$x \in \text{Dom } f = A \quad (*)$$

$$y = f(x)$$

$$y \in B \quad (**)$$

$$(*), (**)$$

$$(x, y) \in A \times B$$

$$c \in A \times B \quad \square$$

10. Ισοπληθικά Συνόλα

Συμβ Ως συνήθως, ο συμβολισμός $\langle A \xrightarrow{f} B \rangle$ σημαίνει $\langle f : A \rightarrow B \rangle$.

Παρομοίως, $\langle A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rangle$ σημαίνει $\langle f : A \rightarrow B \text{ και } g : B \rightarrow C \rangle$.

Ορ Δεδ. A :

Ορίζουμε την ταυτοτική συνάρτηση του A

(συμβ: I_A , ή, πιο απλά, I)

έτσι ώστε $I(x) = x \quad \forall x \in A$.

Ασκ Να δώσετε ένα αυστηρό ορισμό του I_A ως σύνολο λύσεων κάποιου τύπου.

Μετά να αποδείξετε αυστηρά την ύπαρξη του I_A .

Ορολ Δεδ. $f : A \rightarrow B$, λέμε

① «η f είναι ένα-προς-ένα» (ή: 1-1)

② «η f είναι επί του B »

και εννοούμε, αντίστοιχα,

① $(\forall x, x' \in \text{Dom } f) \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

② $(\forall y \in B)(\exists x \in A) \quad f(x) = y.$

Σχ Όπως ακριβώς κάνουμε στο μάθημα «Θεμέλια των Μαθηματικών» μπορούμε να δώσουμε (προς το παρόν, όχι «αυστηρούς») ορισμούς:

- ① Της σύνθεσης $g \circ f$ (δεδομένων $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$)
- ② Της αντίστροφης συνάρτησης (αν υπάρχει).

Χρησιμοποιούμε το γνωστό συμβολισμό f^{-1} για την αντίστροφη της f .

Αν έχετε χρόνο (και ικανότητα, π.χ., αν λύσατε εύκολα την προηγούμενη άσκηση) μπορείτε να κάνετε αυτούς τους ορισμούς «αυστηρούς». Οι «γνωστές» αποδείξεις δείχνουν:

- ① Η σύνθεση είναι προσεταιριστική.
- ② Η $f^{-1} : B \rightarrow A$ υπάρχει $\Leftrightarrow$ η f είναι 1-1 και επί του B (στην οποία περίπτωση λέμε «η f είναι αντιστρέψιμη»).