

Ορολ Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ που είναι 1-1 και επί του B

θα τη λέω και «ισομορφισμό συνόλων $f : A \rightarrow B$ »

Σχ ① Αρχικά, στο μάθημα, αφού δεν θα ασχοληθούμε με ισομορφισμούς ομάδων, ή διανυσματικών χώρων, ή οτιδήποτε άλλου είδους, τους ισομορφισμούς συνόλων θα τους λέω απλά «ισομορφισμούς».

② Ένας ισομορφισμός δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια αντιστρέψιμη συνάρτηση.

Ορολ Δεδ. A και B :

Λέμε: «Τα A, B είναι ισόμορφα» (συμβ: $A \sim B$)

και εννοούμε: Υπάρχει κάποιος ισομορφισμός $f : A \rightarrow B$.

Σχ Με τα γνωστά μας επιχειρήματα, η παραπάνω σχέση « $\sim$ » είναι σχέση ισοδυναμίας.

$$\frac{\text{Εξηγήσι} \quad \textcircled{1}}{A \sim A \quad \textcircled{?}}$$
$$I: A \rightarrow A$$

$$\textcircled{2} \quad \textcircled{\checkmark} A \sim B$$
$$\textcircled{?} B \sim A$$

$$A \xrightarrow{f} B$$
$$B \xrightarrow{f^{-1}} A$$

3

✓

$$A \sim B$$

$$B \sim C$$

?

$$A \sim C$$

$$A \xrightarrow{f} B$$

$$B \xrightarrow{g} C$$

$$A \xrightarrow{h} C$$

$$h = \textcircled{?}$$

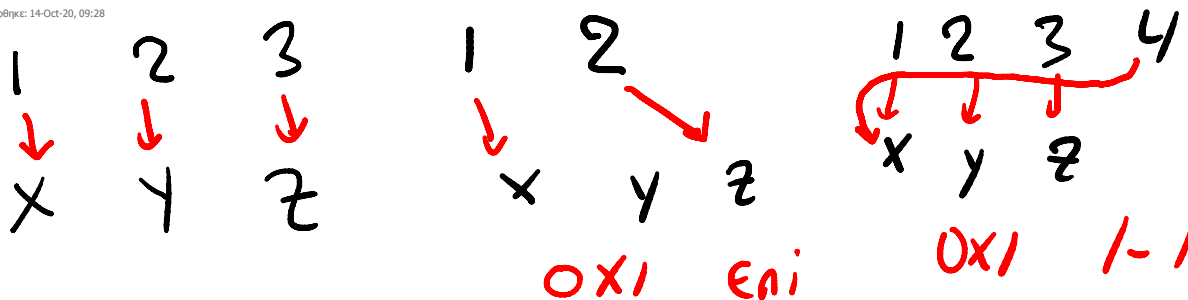
$$g \circ f = h$$

Ορολ Τα ισόμορφα σύνολα θα τα λέμε και «ισοπληθικά».

Απόσπασμα αθόνης που λήφθηκε: 14-Oct-20, 09:25

Ασχ <http://users.math.uoc.gr/%7Emlydakis/2020-21/MEM242/problems1.pdf>

Απόσπασμα αθόνης που λήφθηκε: 14-Oct-20, 09:28



11. Η Κατασκευή του Συνόλου των Φυσικών Αριθμών

Απόσπασμα οθόνης που λήφθηκε: 14-Oct-20, 09:36

$$\begin{aligned}0 &= \emptyset & 1 &= \{0\} & 2 &= \{0, 1\} \\3 &= \{0, 1, 2\} & 4 &= \{0, 1, 2, 3\} \\&&&&& \vdots \\&&&&& \text{κάθε φ. α.} \\&&&&& \{0, 1, \dots\} = \textcircled{?}\end{aligned}$$

✓ n

? $n+1$

$$n \cup \{n\} =: n+1$$

$$\{0, \dots, n-1\}$$

Ορ Δεδ. A :

Ορίζω το επόμενο του A (συμβ: A^+) ως εξής:

~~$A^+ = A \cup A$~~

$$A^+ = A \cup \{A\}$$

π.χ. $0^+ = 0 \cup \{0\} = \emptyset \cup \{0\} = \{0\} = 1$

$$1^+ = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\} = 2$$

$$2^+ = 2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} = 3$$

$$\pi_{\alpha\beta} \downarrow A = \{ \underbrace{\{1\}}_x, \underbrace{2}_y \}$$

$$A^+ = \{ \underbrace{\{1\}}_x, \underbrace{2}_y, \underbrace{A}_z \}$$

Ορολ Δεδ A :

Λέμε «το A είναι επαγωγικό» και εννοούμε:

① Είναι «κλειστό ως προς το 0» δλδ $0 \in A$.

② Είναι «κλειστό ως προς το επόμενο» δλδ $(\forall x \in A)$ $x^+ \in A$.

Απόσπασμα οθόνης που λήφθηκε: 14-Oct-20 09:49

$\exists x$ τότε

$0 \in A$ (1)
 $1 \in A$ (2)
 $2 \in A$ (2)
 $3 \in A$ (2)
 $\vdots$

Αξ (Το Αξίωμα του Απείρου): Υπάρχει κάποιο επαγωγικό σύνολο.

Απόσπασμα οθόνης που λήφθηκε: 14-Oct-20, 09:53

Θ Δεδομένου μη-κενού συνόλου $\mathcal{A}$:

Αν κάθε $B \in \mathcal{A}$ είναι επαγωγικό, τότε και το $\bigcap \mathcal{A}$ είναι επαγωγικό.

Απ Είναι πολύ «στρωτή» άσκηση.

Απόσπασμα οθόνης που λήφθηκε: 14-Oct-20, 09:56

Θ (Υπαρξη του Συνόλου των Φυσικών Αριθμών) Υπάρχει το ελάχιστο επαγωγικό σύνολο ω .

Σχ Πιο αναλυτικά, το θεώρημα λέει το εξής:

Υπάρχει κάποιο σύνολο ω που έχει τις εξής δυο ιδιότητες:

① Είναι επαγωγικό.

② Αν C είναι οποιοδήποτε άλλο επαγωγικό σύνολο, τότε $\omega \subseteq C$.

Σχ Όπως κάθε ελάχιστο, το ω είναι μοναδικό.

εξ ης αν ω' ελ. επ.

άρα $\omega \subseteq \omega'$ (ιδ. ② στο ω)
και $\omega' \subseteq \omega$ (ιδ. ② στο ω')
άρα $\omega = \omega'$ $\square$ (εφηρ)

ΑΠ. του Θ

Αξ. Ανείρου: $\exists A \in \text{na}\chi.$

$$A := \{B : \Phi(B)\}$$

" $\Phi(x)$ " : "το x είναι $\in \text{na}\chi.$ "
υποσύνολο του A "

$I_{\mathcal{A}}$ | Το $\mathcal{A}$ είναι κ.ο.

Αν. $I_{\mathcal{A}}$ | μοναδ: προφ.
Υπαρξη (?)

$\exists$ α.φ $\mathcal{D}$ του $\mathcal{A}$ (?)

προφανώς το $\mathcal{D} = \mathcal{P}(\mathcal{A})$ είναι α.φ.
 $\square (I_{\mathcal{A}})$

Εστω $\boxed{\omega = \bigcap \mathcal{A}}$

(κ.ο: $\mathcal{A} \neq \emptyset \quad A \in \mathcal{A}$)

ANDD: ω "σωστό" (1, 2, 3)

Για την ① | κάθε βελ είναι επαχ.

αρα η ζωή τους είναι επαχ.

□ ①

Για την ② | 'Εστω C τυχαίο έναρ.

ΑΝΔΟ: $W \subseteq C$ ⑦

'Εστω $B_1 = C \cap A$

Το B_1 είναι έναρ. ως ζούνη ⑧
εναρχωκίμιν

knims

$$B_1 \in A \quad (*)$$

$$(*) \text{ d } (**): B_1 \in A$$

Το w είναι η ροπή ότι αν $B \in A$
άρα $w \in B_1$

$\pi \in \rho_i \mid n \psi n$

$$\omega \subseteq B_1 = A \cap C \subseteq C$$

$$\delta \triangleright \delta \quad \omega \subseteq C \quad \boxed{\text{shaded}} \quad \text{shaded}$$

Ορολ Λέμε «το x είναι φυσικός αριθμός»
και εννοούμε: $x \in \omega$

Απόσπασμα οθόνης που λήφθηκε: 14-Oct-20, 10:35

12. Τα Αξιώματα του Peano

P1 $0 \in \omega.$

P2 $(\forall n \in \omega)(\exists! m \in \omega) \quad m = n^+.$

P3 $(\forall n \in \omega) \quad n^+ \neq 0.$

P4 $(\forall m, n \in \omega) \quad m^+ = n^+ \Rightarrow m = n.$

P5 (Η «Αρχή της Επαγωγής», εν συντομία ΑΕ) $(\forall C \text{ που είναι επαγωγικό υποσύνολο του } \omega) \quad C = \omega.$