

Αν. του P_1 | ω επαχ.

άρα θεω $\Box(P_1)$

Αν. του P_2 | προφ.

(απ)ώς λέει: το η^+ είναι κ.ο.)

Αν. του P_3 | $\forall x$

$$x \in \{x\} \subseteq X \cup \{x\} = X^+$$

$$\text{άρα } x^+ \neq 0$$

Αν του P5 | $\in \sigma_{TW} \left\{ \begin{array}{l} C \text{ εναρ. } \textcircled{1} \\ C \subseteq W \textcircled{2} \end{array} \right.$

Ανο $\textcircled{1}$ $W \subseteq C \textcircled{3}$

$\textcircled{2} \text{ α } \textcircled{3} : W = C \quad \blacksquare$

Ορολ Δεδ x :

Λέμε «το x είναι μεταβατικό σύνολο» (συντομογραφία: $\mu\tau\beta(x)$)
και εννοούμε: κάθε στοιχείο του x είναι και υποσύνολο του x .

Θ Δεδ x , TAEI:

① $\mu\tau\beta(x)$

② $(\forall y, z) \quad z \in y \in x \Rightarrow z \in x$

③ $x \subseteq \mathcal{P}(x)$

④ $\bigcup x \subseteq x$

Απ Πολύ καλή και εύκολη άσκηση.

$$\underline{\text{Παρ}} \mid a = \{1\}$$

μτβ? οχι,

$$1 \in a \quad \text{αλλά} \quad 1 \notin a$$

$$(α) \text{οιώς, } 0 \in I = \{0\}$$

$$\text{Οα έχω } 0 \in \mathcal{A} = \{1\}$$

$$\text{διδ } 0 = 1 \text{ αζη } \underline{\underline{E}})$$

Σημαντικό Σχόλιο: Συνήθης Χρήση της Αρχής της Επαγωγής (συντομογραφία: ΣΧΑΕ)

Έστω « $\Phi(n)$ » τύπος. Αν $\Theta \Delta \text{O}$

$$\textcircled{?} \quad (\forall n \in \omega) \quad \Phi(n),$$

τότε αρκεί να δείξω δύο πράγματα:

① $\text{N}\Delta\text{O}$ ισχύει το $\Phi(0)$ (δλδ να δείξω την Βάση της Επαγωγής) (συντομογραφία: BE)

② Υποθέτοντας δεδομένο κάποιο $n \in \omega$,

και υποθέτοντας την Επαγωγική Υπόθεση (συντομογραφία: ΕΥ) για το n , δλδ υποθέτοντας ότι ισχύει το $\Phi(n)$,

$\text{N}\Delta\text{O}$ ισχύει το $\Phi(n^+)$.

Εξηγώ: Έστω $C = \{n \in \omega : \Phi(n)\}$.

Αν δείξω τη ΒΕ, έδειξα $0 \in C$ ③

Αν δείξω (δεδ. $n \in \omega$ και δεδ. της ΕΥ) ότι $\Phi(n^+)$, έδειξα ότι το C είναι κλειστό ως προς τα επόμενα ④

Τα ③ και ④ λένε ότι το C είναι επαγωγικό.

Τώρα η ΑΕ λέει $C = \omega$, δηλ όλοι οι φυσικοί αριθμοί είναι λύσεις του Φ . ■(Εξηγ.)

Θ Κάθε φυσικός αριθμός είναι μεταβατικό σύνολο.

Απ Ας πάρουμε το « $\Phi(x)$ » να είναι ο τύπος « $\text{μβ}(x)$ ».

Τότε το ζητούμενο είναι

$(\forall n \in \omega) \quad \Phi(n)$.

Θα το δείξω με ΣΧΑΕ.

BE | $(?) \phi(0)$

$(?) \mu\tau\beta(0)$

$(?) (\forall x \in \emptyset) x \subseteq \emptyset$

Κάθε τής $(\forall x \in \emptyset) \dots$
είναι αληθής!

$\square (BE)$

Έστω $n \in \omega$ π.ω. $\phi(n)$

(ΕΥ)

(?) $\phi(n^+)$

Έστω λοιπόν $x \in n^+$

(?) $x \subseteq n^+$

$$n^+ = n \cup \{n\}$$

$$\pi_1 \downarrow x \in n \quad \pi_2 \downarrow x = n$$

$$\Sigma_{\text{ZUV}} \pi_1 \mid \exists Y: X \subseteq n$$

$$n \subseteq n^+$$

$$\text{apa } X \subseteq n^+ \models (\pi_1)$$

$$\Sigma_{\text{ZUV}} \pi_2 \mid$$

$$X = n$$

$$n \subseteq n^+$$

$$X \subseteq n^+ \models (\pi_2, \Theta)$$

$\pi a \in$ $a = \{1\}$
 $a \in \omega?$

A $a \text{ αριθμητικό}$

B $a \text{ αριθμός.}$

A οχι

B δεν είναι ένας.

Θ Κάθε στοιχείο ενός φυσικού αριθμού είναι φυσικός αριθμός.

Σχ Με άλλα λόγια: Το ω είναι μεταβατικό.

An | $\Sigma n i z i \left(\Sigma x A E \sigma o \phi(n) \right)$
 $n \leq \omega$

Απόσπασμα οδόντης που λήφθηκε: 21-Oct-20, 10:00

$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$ | Έστω $m, n \in \mathbb{N}$
 $m^+ = n^+$

$\circledast$ $m = n$

Πόσο συμμετρίας

AND $m \leq n$
 $\circledast$

$$m \in m^+ = n^+ = \{n\} \cup n$$

$$\pi_1 \mid m \in \{n\} \quad \pi_2 \mid m \in n$$

$$\exists z \nu \pi_1 \mid m = n \quad \boxed{\equiv}(\pi_1)$$

$$\exists z \nu \pi_2 \mid \mu \tau \beta(n) \quad \boxed{\equiv}(\pi_2, \theta)$$

ἀρα $m \in n$

13. Η Διάταξη των Φυσικών Αριθμών

Απόσπασμα οθόνης που λήφθηκε: 21-Oct-20, 10:11

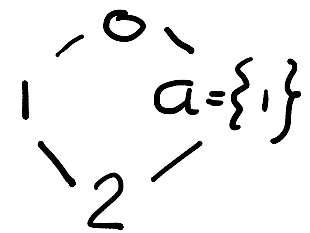
$$\underline{\Sigma\psi\beta} \mid x < y : \begin{cases} x \leq y \\ x \neq y \end{cases}$$

$$\underline{\Sigma\psi\beta} \mid \Delta \varepsilon \delta \ m, n \in \omega$$
$$m \leq n : m \subseteq n$$
$$m < n : m \subset n$$

π_{ae} | $n=2$ $\pi_{oia} m \leq 2$

$Z = \{0, 1\}$ $A = \mathcal{P}(Z)$

$m = 0, 1, 2$



Hasse

π_{ae} | ~~π_{oia}~~ $m < 2$?

$m = 0, 1$

Σ^x $\vdash$ Ευκ. Αξκ. $(\forall k, m, n \in \omega)$

1A $\vdash n \leq n$

2A $\vdash \left. \begin{array}{c} m \leq n \\ n \leq m \end{array} \right\} \Rightarrow m = n$

3A $\vdash k \leq m \leq n \Rightarrow k \leq n$

4A $\vdash m < n \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m \leq n \\ \text{και} \\ m \neq n \end{array} \right.$

$$\underline{1B} \mid \Delta IO \quad n < n$$

$$\underline{2B} \mid m < n \Rightarrow \Delta IO \quad n < m$$

$$\underline{3B} \mid k < m < n \Rightarrow k < n$$

$$\underline{4B} \mid m \leq n \quad (=) \quad \begin{cases} m < n \\ n \\ m = n \end{cases}$$

Θ (Το " ϵ " είναι το " $<$ "
για Φ . αρ.)

Έστω $m, n \in \omega$

Τότε $m \in n \iff m < n$

(Αν: πρώτα το $\wedge$:)

n] $\epsilon \in \omega \cap \epsilon \omega$. τότε $n \notin n$

An] $\exists x A \in \sigma \tau o \ n$

BE] $(n=0)$
 $n \neq \emptyset$ $(\forall x \quad x \notin \emptyset = 0)$
 ισχύει $\forall x \quad x \neq 0$

$\square BE$

$$\exists \omega \mid n \in \omega \quad \text{π.ω. } n \notin n \quad (\exists Y)$$

$$\text{AND SO } n^+ \notin n^+$$

$$M \in \text{Ord}, \exists \omega \text{ s.t. } n^+ \in n^+$$

$$\pi_1 \mid n^+ = n \quad \pi_2 \mid n^+ \in n$$

$$\underbrace{1\sigma x} \mid n^+ \in n$$

$$\underbrace{An \ 1\sigma x} \mid \underbrace{\sum_{\alpha \in n} n_1} \mid n \text{ proof}$$

$$\underbrace{\sum_{\alpha \in n} n_2} \mid \underbrace{\mu_{\tau \beta(n)} \mid n^+ \in n} \} \text{ άρα } n^+ \in n$$

$\square(1\sigma x)$

$(\forall x) x \in X^+$

ήρα $n \in n^+$

από $1 \in x, n \in n$

από $\exists y$ αυτό είναι $a \in n$



$$\frac{f(n) \text{ του } \Theta}{\Rightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \exists \text{ const } m \in \mathbb{N} \\ \forall \tau \beta(n) \end{array} \right\} m \leq n$$

$$\delta > \delta \quad m \leq n \quad (*)$$

$$15x \mid m \neq n \quad (**)$$

(allows $n \in n$
at n and Λ) $\models (15x)$

$$\begin{matrix} (*) \\ d \\ (***) \end{matrix} m < n \quad \boxed{\Rightarrow}$$