$$\underbrace{0, 1, \ldots, n-1}_{\text{"πρόγονοι"}}, n, n^+$$

σταθερός

"διάδοχος"

ΣΧΑΕ στο n :

$$\Phi(n): \quad (\forall m \in n) \ m \notin A$$

Απόσπασμα οθόνης που λήφθηκε: 02-Nov-20, 08:24

Έστω η τ.ω $\Phi(n)$ (ΕΥ)

ΕΒ] Έστω $m \in \mathbb{N}^+$

? $m \notin A$

Π1] $m \in n$

Π2] $m = n$

Στην Π1] βλ. ΕΥ $\blacksquare$ (Π1)

Στη Π2 | ΜΕ ατπ

Έστω λοιπόν $m \in A$ δλδ $n \in A$

Θέτω $y = n$

Έστω $x \in A$

Από ΕΥ, $x \notin n$

ΔΙΟ $x \in n$

ΔΙΟ $x < n$

Τειχ: $n \leq x$

περιλ: $\forall x \in A \quad y \leq x$

· Εδειξα: $y = \min A$

απη ∎

15. Πλήρης Επαγωγή

Μέθοδος της Πλήρους Επαγωγής

Έστω Φ τύπος που έχει την εξής ιδιότητα:

Δεδομένου $n \in \omega$ τ.ω. $\forall m \in n$ ισχύει ο $\Phi(m)$ (ΕΥ για το δεδ. n)

μπορώ να δείξω το αντίστοιχο ΕΒ, δλδ ότι ισχύει και ο $\Phi(n)$.

Τότε ο δεδομένος τύπος ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό. (Δλδ: $\forall n \in \omega$ ισχύει ο $\Phi(n)$.)

Απόσπασμα οθόνης που λήφθηκε: 02-Nov-20, 09:29

Απόδειξη της Ορθότητας της Μεθόδου της Πλήρους Επαγωγής

Με ατπ, έστω λοιπόν Φ κάποιος τύπος που, παρ' όλο που έχει την παραπάνω ιδιότητα, δεν ισχύει για κάποιο $n_0 \in \omega$.

Έστω $A=\{n\in\omega : \text{δεν ισχύει ο } \Phi(n)\}$

$n_0 \in A$

$A \neq \emptyset$

άρα $\exists$ το $n_1 = \min A$

Ισχ $(\forall m \in n_1)\ \Phi(m)$

Απ $|\sigma x|$ με ατπ

·Έστω λοιπόν $m \in n$

τ.ω. δεν ισχύει το $\Phi(m)$

Δ/δ $m \in A$

Προφ: βρήκα $m \in A$ τ.ω $m \in n$,

δ/δ $m < n_1$ δ/δ τ.ω. $m < \min A$

ατπ ☒ (ισχ)

Ξέρω λοιπόν ότι η ΕΥ ισχύει
για το n_1

Άρα ισχύει & το ΕΒ

δηλ ισχύει το $\Phi(n_1)$

δηλ $n_1 \notin A$

ατπ ∎

$\underline{\text{Παραδ}}$ Θα δείξουμε ότι κάθε φυσικός αριθμός που είναι τουλάχιστον 2 $\underbrace{\text{γράφεται ως γινόμενο πρώτων}}_{\text{γωγπ}}$.

όπου «το n γωγπ» σημαίνει: $\exists$ θετικός ακέραιος k και πρώτοι $p_1, p_2, \ldots, p_k$ τέτοιοι ώστε $n = p_1 p_2 \cdots p_k$

Απόσπασμα οθόνης που λήφθηκε: 02-Nov-20, 09:50

Πλ. επ. στο n $\qquad \Phi(n)$?

$(n \in \omega \wedge n \geq 2) \Rightarrow$ το n γωγπ

Δεδ. n τ.ω. $\forall m \in n \; \Phi(m)$ $\quad$ (ΕΥ)

$\boxed{\text{ΕΒ}}$ $\quad$ (διδ ισχ το $\Phi(n)$?)

Π1 | Το n είναι πρώτος

Π2 | 〃 δεν 〃 〃

Στην Π1 | Θέτω $k=1$

〃 $p_1 = n$

άρα $n = p_1 = p_1 \cdots p_k$ ∎ (Π1)

$\boxed{\text{Στην π2}}$ n όχι πρώτος

άρα $\exists\, a,b \in \omega$ τ.ω. $\begin{cases} n = ab \\ a,b \geq 2 \end{cases}$

Από ΕΥ με $m=a$
το a γωγn έστω $a = q_1 \dots q_s$

Από ΕΥ με $m=b$
το b γωγn έστω $b = r_1 \dots r_t$

Άρα $n = ab$

$$= q_1 \dots q_s r_1 \dots r_t$$

(δ)δ $k = s + t$, $P_i = \begin{cases} q_i, & i \le s \\ r_{i-s}, & i > s \end{cases}$

$\blacksquare$

Προαιρ/Παρενθ

πιο "αυστηρά"

Το " Το η γωγη"

Έστω B = το σύνολο των πρώτων

Έστω $f(m) = \{1, \dots, m\}$

(f συνάρτηση με $\mathrm{Dom} f = \mathbb{Z}_+$)

Αν $P \in B^{f(m)}$

έστω $\Pi_P = P(1)P(2)\dots P(m)$

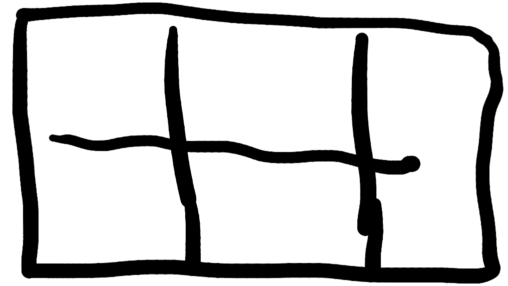
Ο αυστ. τύπος:

$$(\exists k \in \mathbb{Z}_+)(\exists p \in B^{f(k)})$$

$$n = \Pi p$$

(παρενθ)

$\boxed{\text{Σπίτι}}$ "σοκολάτα"



με $n = ab$ "πλακ." $n = 6 = 3 \cdot 2$

Θέλω: Να σπάσω σε n πλακ

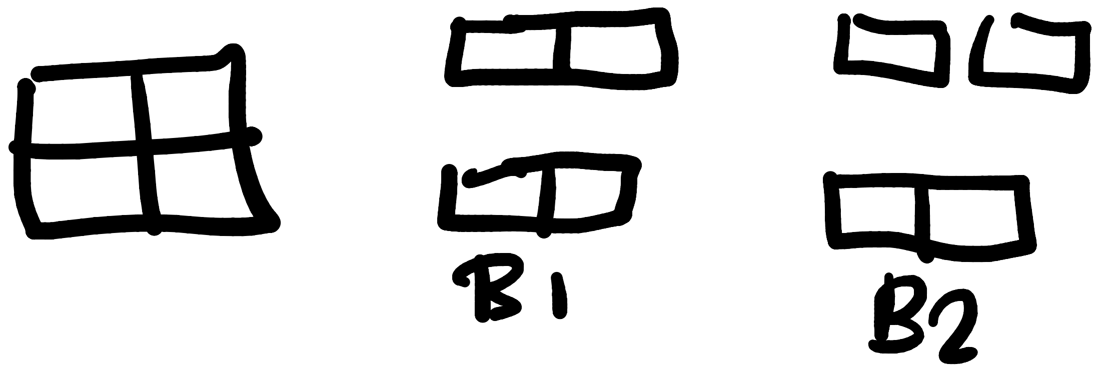
σε βήματα

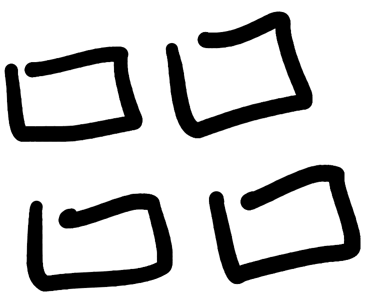
Κάθε βήμα: Σε ένα κομμάτι

οριζ. ή κατακόρυφο "σπάσιμο"

ΝΔΟ: κάθε φορά,
θέλω $n-1$ βήματα

π.χ. $n=4$



B3 

$(3=4-1)$

16. Η Αρχή της Αναδρομής

$\underline{\Theta}$ (Αρχή της Αναδρομής)

Δεδομένου συνόλου A, στοιχείου $a \in A$, και συνάρτησης $T : A \to A$

$$\exists! f : \omega \to A \quad \begin{cases} f(0) = a \\ f(n^+) = T(f(n)) \end{cases}$$

Απόσπασμα οθόνης που λήφθηκε: 02-Nov-20, 10:27

$b_0 = f(0) \quad b_1 = f(1) \quad b_2 = f(2)$

$b_0 = a \quad \ldots \quad b_{n+1} = T(b_n)$

Παραδ. όπου $A = \omega$

1) $T(x) = x^+$ Δεδ $a \in \omega$

$f(n) = ?$

$f(0) = a$

$f(1) = f(0^+) = T(f(0)) = T(a) = a^+ = a+1$

$$f(2) = f(1^+) = T(f(1))$$

$$= T(a+1) = (a+1)+1 = a+2$$

$$\left[= (a^+)^+\right]$$

nteil

$$f(0) = a+0$$

$$f(1) = a+1$$

$$f(2) = a+2$$

$$\vdots$$

$$\boxed{f(x) = a+x}$$

1

② $a=0 \quad T(x)=x+b$

(Έστω $b \in \omega$)

$f(n) = ?$

$f(0)=a=0=b\cdot 0$

$f(1)=f(0^+)=T(f(0))=0+b=b=b\cdot 1$

$f(2)=f(1^+)=T(f(1))=T(b)=b+b=b\cdot 2$

$$\boxed{f(x) = b \cdot x}$$