Συντομογραφία: Το «ΑΑ» σημαίνει «Αρχή της Αναδρομής».

Σκίτσο της απόδειξης της ΑΑ:

Σας θυμίζω, οι δυο ιδιότητες που έχει η f (και οι οποίες καθορίζουν την f) είναι:

$f(0) = a$, $f(n^+) = T(f(n))$.

Αυτές τις δυο ιδιότητες θα τις λέω «οι δυο χαρακτηριστικές ιδιότητες της f»

Η μοναδικότητα είναι πολύ καλή άσκηση:

Έστω g μια, πιθανώς διαφορετική, «τιμή της f».

Με (συνήθη) επαγωγή στο n, δείξτε ότι $f(n) = g(n)$ (δηλαδή ότι $f = g$).

Απόσπασμα οθόνης που λήφθηκε: 04-Nov-20, 12:12

Όσον αφορά την ύπαρξη τώρα: Η στρατηγική είναι παρόμοια με την κατασκευή του ω ως $\bigcap \mathcal{A}$.

Ας λέμε κάποιο υποσύνολο B του $\omega \times A$ αναδρομικό αν έχει τις εξής «χαρακτηριστικές ιδιότητες»:

$(0, a) \in B$ και $(n, y) \in B \Rightarrow (n^+, T(y)) \in B$.

Ελέγχουμε ότι η τομή αναδρομικών είναι αναδρομικό,

θέτουμε $\mathcal{A}$ να είναι το σύνολο όλων των αναδρομικών υποσυνόλων του $\omega \times A$,

ορίζουμε την f ως $\bigcap \mathcal{A}$, και ελέγχουμε ότι είναι συνάρτηση.

Τέλος, ελέγχουμε ότι η f είναι η ζητούμενη συνάρτηση.

Απόσπασμα οθόνης που λήφθηκε: 04-Nov-20, 12:12

17. Πράξεις στο ω

<u>Συμφ</u> Στην ενότητα αυτή, αν έχω δεδομένο το A, τότε τα a, T, f θα είναι όπως στην ΑΑ.

Δλδ το a θα είναι στοιχείο του A, η T θα είναι συνάρτηση $T : A \to A$,

και η f θα είναι η συνάρτηση $f : \omega \to A$ που κατασκευάζει η ΑΑ.

Απόσπασμα οθόνης που λήφθηκε: 04-Nov-20, 09:23

Ορ (Ορισμός της πρόσθεσης φυσικών αριθμών)

Δεδομένων $a, n \in \omega$, ορίζω το A ως $A = \omega$ την T με $T(n) = n^+$, και το $a + n$ ως $a + n = f(n)$.

Σχ Άρα οι δυο χαρακτηριστικές ιδιότητες του $a + n$ είναι: $a + 0 = a$, $a + (n^+) = (a + n)^+$.

Ασκ Να αποδείξετε αυστηρά ότι 2+3=5.

Δεν επιτρέπεται να χρησιμοποιήσετε κανένα θεώρημα στην απόδειξη.

Επιτρέπονται μόνο οι ορισμοί που έχουμε δώσει στο μάθημα.

Απόσπασμα οθόνης που λήφθηκε: 04-Nov-20, 09:24

Λύση

$$2+1 = 2+(0^+) = (2+0)^+ = 2^+ = 3$$

$$2+2 = 2+(1^+) = (2+1)^+ = 3^+ = 4$$

$$2+3 = 2+(2^+) = (2+2)^+ = 4^+ = 5$$

$$\blacksquare$$

<u>Θ</u> Για κάθε φυσικό αριθμό n, $n^+ = n + 1$

<u>Απ</u> Άσκηση.

Λύση

$$\begin{aligned} n+1 &= n + (0^+) \\ &= (n+0)^+ \\ &= n^+ \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Απόσπασμα οθόνης που λήφθηκε: 04-Nov-20, 09:33

$\underline{\Theta}$ (Προσεταιριστικότητα της πρόσθεσης)

Για κάθε φυσικούς αριθμούς a, b, n: $(a+b)+n = a+(b+n)$.

$\underline{\text{Απ}}$ Άσκηση <u>λύση</u> ΣΧΑΕ στο n

<u>ΒΕ)</u> $(a+b)+0 = a+b$

$a+(b+0) = a+b$

(ΒΕ)

Εγ: Έστω $n \in \omega$

τ.ω. $(a\underbrace{+b)+n=a+(b}_{c}+n)$

EB

$$(a+b)+n^+ = ((a+b)+n)^+ = c^+$$

$$a+(b+n^+) = a+(b+n)^+$$

$$= (a+(b+n))^+$$

$$= c^+ \qquad \blacksquare$$

Λ1 Για κάθε φυσικό αριθμό n, $0 + n = n$.

Απ Άσκηση. Λύση ΣΧΑΕ στο n

ΒΕ πάντα $a+0=a$

με $a=0$: $0+0=0$ (ΒΕ)

ΕΥ Έστω $n \in \omega$ τ.ω. $0+n=n$

ΕΒ)

$$0+n^+ = (0+n)^+ \qquad (2^{η} \text{ αξ.})$$

$$= n^+ \qquad (\text{ΕΥ})$$

$\blacksquare$

Λ2 Για κάθε φυσικό αριθμό n, $1 + n = n^+$.

Απ Άσκηση. Λύση | ΣχΑΕ στο n

ΒΕ | $1 + 0 = 1$

$= 0^+$ (ΒΕ)

ΕΥ | Έστω n τ.ω. $1 + n = n^+$

EB

$$1+n^+ = (1+n)^+$$

$$= (n^+)^+$$

$\blacksquare$

$\underline{\Theta}$ (Αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης)

Για κάθε φυσικούς αριθμούς m, n: $\quad m + n = n + m.$

$\underline{\text{Απ}}$ ΣΧΑΕ στο n

ΒΕ] $m + 0 = m$

$0 + m = m$ (Λ1)

(ΒΕ)

ΕΥ] Έστω $n \in \omega$ τ.ω. $m + n = n + m$

EB $\quad m+n^+=(m+n)^+$

$$
\begin{aligned}
n^+ + m &= (1+n)+m && (\Lambda 2)\\
&= 1+(n+m) && (\pi\rho o\sigma)\\
&= 1+(m+n) && (\text{EY})\\
&= (m+n)^+ && (\Lambda 2) \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

<u>Θ</u> (Νόμος της Διαγραφής για την πρόσθεση)

Για κάθε φυσικούς αριθμούς a, b, n: $a + n = b + n \Rightarrow a = b$.

<u>Απ</u> Άσκηση

<u>Υπόδειξη:</u> O Peano στο P4 μας δίνει την ειδική περίπτωση $n = 1$.

Απόσπασμα οθόνης που λήφθηκε: 04-Nov-20, 10:05

<u>Θ</u> (Η σχέση μεταξύ διάταξης και πρόσθεσης)

Για κάθε φυσικούς αριθμούς n, a: $\quad n \leq a \quad \Leftrightarrow \quad (\exists\, k \in \omega)\, k + n = a.$

<u>Απ</u> Με ΣΧΑΕ στο n δείχνω ότι $\forall a \in \omega$ ισχύει το ζητούμενο.

<u>ΒΕ</u> το «$n \leq a$» είναι πάντα αληθής (επειδή στη ΒΕ έχω $n = 0$)

άρα ΘΝΔΟ και το «$(\exists\, k \in \omega)\, k + n = a$» είναι πάντα αληθής

μα αυτό είναι προφανές (παίρνω $k = a$) ■(ΒΕ)

<u>ΕΥ</u> Έστω $n \in \omega$ τέτοιο ώστε $(\forall a \in \omega)$ ισχύει ότι

$n \leq a \quad \Leftrightarrow \quad (\exists\, k \in \omega)\, k + n = a$

ΕΒ Έστω a τυχαίος φυσικός αριθμός.

Δείχνω πρώτα το αντίστροφο:

Έστω λοιπόν ότι υπάρχει φυσικός αριθμός k τέτοιος ώστε $k + n^+ = a$.

Άρα $a = k + n^+ = (k+n)^+$

από ΕΥ (εφαρμοσμένη σε ένα «άλλο a» δλδ στο $a' = k + n$) $n \leq k + n$

πάντα $\ell < \ell^+$, άρα και για $\ell = k + n$

πάντα $x \subseteq y \subset z \Rightarrow x \subset z$

αν τα x, y, z είναι φυσικοί αριθμοί, αυτό λέει $x \leq y < z \Rightarrow x < z$

παίρνω $x = n$, $y = k + n$, $z = (k+n)^+$, και έχω $n < a$

από προηγούμενο θεώρημα, αυτό είναι ισοδύναμο με $n^+ \leq a$.

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του αντιστρόφου.

Απόσπασμα οθόνης που λήφθηκε: 04-Nov-20, 12:24

Απομένει η απόδειξη για το ευθύ, έστω λοιπόν ότι $n^+ \leq a$

ποτέ δεν ισχύει, για μη-κενό x, ότι $x \subseteq \varnothing$

παίρνοντας $x = n^+$, βλέπω ότι $a \neq 0$

από προηγούμενο θεώρημα, το a γράφεται $a = b^+$

περίληψη: $n^+ \leq b^+$

από προηγούμενο θεώρημα, αυτό είναι ισοδύναμο με $n < b^+$

από προηγούμενο θεώρημα, αυτό είναι ισοδύναμο με $n \leq b$

από ΕΥ, υπάρχει k με $k + n = b$

άρα $k + n^+ = (k + n)^+ = b^+ = a$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του ευθέως, άρα και του επαγωγικού βήματος, άρα και του θεωρήματος.

Απόσπασμα οθόνης που λήφθηκε: 04-Nov-20, 12:24

$\underline{\Sigma\chi}$ (Η αφαίρεση φυσικών αριθμών)

Το προηγούμενο θεώρημα μας δίνει την ύπαρξη του $k = a - n$

(η μοναδικότητα δίνεται από το νόμο της διαγραφής για την πρόσθεση).

Παρατηρήστε ότι η αφαίρεση φυσικών αριθμών δεν ορίζεται για τυχαία a, n:

Το $a - n$ ορίζεται αν και μόνο αν $n \leq a$.

Απόσπασμα οθόνης που λήφθηκε: 04-Nov-20, 10:20

Ορ (Ορισμός του πολλαπλασιασμού φυσικών αριθμών)

Σας θυμίζω τη συμφωνία μας ότι η f είναι η συνάρτηση $f : \omega \to A$ που κατασκευάζει η ΑΑ από δεδομένα a και T.

Δεδομένων $b, n \in \omega$, ορίζω το A ως $A = \omega$, το a ως $a = 0$, την T με $T(x) = x + b$, και το $b \cdot n$ ως $b \cdot n = f(n)$.

Σχ Άρα οι δυο χαρακτηριστικές ιδιότητες του $b \cdot n$ είναι: $b \cdot 0 = 0$, $b \cdot (n^+) = b \cdot n + b$.

Απόσπασμα οθόνης που λήφθηκε: 04-Nov-20, 10:24

<u>Σχ</u> Παρόμοιες αποδείξεις (κάντε, ως ασκήσεις, όσες μπορείτε) δείχνουν ότι

ο πολλαπλασιασμός έχει τις εξής ιδιότητες (όπου τα ℓ, m, n είναι τυχαίοι φυσικοί αριθμοί):

1. Ουδέτερο Στοιχείο:
   $1 \cdot n = n$
2. Προσεταιριστικότητα:
   $(\ell \cdot m) \cdot n = \ell \cdot (m \cdot n)$
3. Αντιμεταθετικότητα:
   $m \cdot n = n \cdot m$
4. Επιμεριστικότητα του $\cdot$ ως προς το $+$:
   $(\ell + m) \cdot n = \ell \cdot n + m \cdot n$
5. Νόμος της Διαγραφής:
   Αν $n \neq 0$ και $\ell \cdot n = m \cdot n$ τότε $\ell = m$.

Απόσπασμα οθόνης που λήφθηκε: 04-Nov-20, 10:29