18. Κατασκευή του $\mathbb{Z}$

$\underbrace{\omega}\ \mathbb{Z}\ \mathbb{Q}\ \mathbb{R}$

Διαισθ. Εισ.

1. $\mathbb{Z} = ?$
2. $x+y = ?$
3. $0+x = x$
4. $x+y = y+x$
5. $(x+y)+z = x+(y+z)$

$\left.\begin{matrix} 0+x = x \\ x+y = y+x \\ (x+y)+z = x+(y+z) \end{matrix}\right\}$ γιατί ?

$4 \cdot 5 \qquad 6 \cdot 4$

$(4, 5) \quad (6, 4)$

$[4, 5] \quad [6, 4]$

$0 =$

1 ✓

2 $[n_1, n_2] + [m_1, m_2]$

$= [n_1 + m_1, n_2 + m_2]$ ✓

3 $[0, 0] + [n_1, n_2] = [0 + n_1, 0 + n_2]$

$= [n_1, n_2]$ ✓

4) $[n_1, n_2] + [m_1, m_2]$

$= [n_1 + m_1, n_2 + m_2]$

$= [m_1 + n_1, m_2 + n_2]$

$= [m_1, m_2] + [n_1, n_2]$ ✓

$$\nabla = [0,0] = [1,1] = [2,2]$$

$$(0,0) \neq (1,1)$$

Έστω $A = \omega \times \omega$.

Θα λέω ότι «το n είναι ψευδοακέραιος» και θα εννοώ ότι «$n \in A$».

Έτσι ένας ψευδοακέραιος n είναι απλώς ένα ζεύγος $n = (n_1, n_2)$

με n_1 και n_2 φυσικούς αριθμούς.

Στην ενότητα αυτή, το σύμβολο «$\sim$» δεν θα το χρησιμοποιώ να σημαίνει ισοπληθικά.

Θα συμβολίζει την παρακάτω σχέση:

Αν $n, m \in A$: Λέω $n \sim m$ και εννοώ $n_1 + m_2 = n_2 + m_1$.

Ελέγχουμε ότι είναι σχέση ισοδυναμίας

(για τη μεταβατικότητα, θα χρειαστείτε το νόμο της διαγραφής).

πρχ: $n_1 - n_2$
$= m_1 - m_2$

Κάθε σχέση ισοδυναμίας καθορίζει κλάσεις ισοδυναμίας.

Εδώ, δεδομένου $n = (n_1, n_2)$ στο A, συμβολίζω την αντίστοιχη κλάση με $[n]$, ή και με $[n_1, n_2]$.

(Σας θυμίζω ότι $[n] = \{m \in A : m \sim n\}$.)

Έστω $\mathbb{Z}$ το σύνολο όλων αυτών των κλάσεων.

(Ισοδύναμα, $\mathbb{Z} = \{x : (\exists n \in A)\, x = [n]\}$.)

Θα λέω ότι «το x είναι ακέραιος» και θα εννοώ ότι «$x \in \mathbb{Z}$».

<u>Ασκηση:</u> Να υπολογίσετε τον ακέραιο $[0, 0]$.

(<u>Απάντηση:</u> $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), \ldots\}$).

Πολύ σημαντική ιδιότητα κάθε σχέσης ισοδυναμίας είναι η εξής:

$a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad [a] = [b].$

Εδώ, αυτό λέει: Δυο ψευδοακέραιοι είναι ισοδύναμοι ακριβώς όταν καθορίζουν τον ίδιο ακέραιο.

Ορισμός της πρόσθεσης ακεραίων: Έστω x και y ακέραιοι.

Διαλέγω τυχαίο αντιπρόσωπο $n = (n_1, n_2)$ για τον x (δλδ έστω $x = [n_1, n_2]$).

Παρόμοια, έστω $y = [m_1, m_2]$. Ορίζω το άθροισμα των x και y ως εξής:

$x + y = [n_1 + m_1, n_2 + m_2].$

Ελέγχουμε ότι το άθροισμα είναι καλώς ορισμένο

(αυτό που χρειάζεται έλεγχο είναι ότι δεν εξαρτάται από την επιλογή αντιπροσώπων).

Τώρα εύκολα ελέγχουμε ότι η πρόσθεση στο $\mathbb{Z}$ (όπως και στο ω) έχει τις εξής «καλές ιδιότητες»:

Έχει ουδέτερο στοιχείο (το $[0,0]$), είναι προσεταιριστική, και αντιμεταθετική.

Η πρόσθεση στο $\mathbb{Z}$ είναι «καλύτερη» γιατί έχει και την εξής ιδιότητα:

Για κάθε ακέραιο x υπάρχει ο ακέραιος $-x$ που έχει την ιδιότητα ότι $-x + x = [0,0]$.

Αποδ] $x = [n_1, n_2]$

Ορίζω $-x = [n_2, n_1]$

Υπολογίζω $-x + x = [n_2, n_1] + [n_1, n_2]$

$= [n_2 + n_1, n_1 + n_2] \overset{?}{=} [0,0]$

$[0,0]$

(n_2+n_1, n_1+n_2)

$(0, 0)$

$$n_2+n_1+0 \overset{?}{=} 0+n_1+n_2$$

proof

Δεν είναι δύσκολο να «μαντέψουμε» τον ορισμό της διάταξης:

$[n_1, n_2] \leq [m_1, m_2] \quad \Leftrightarrow \quad n_1 + m_2 \leq m_1 + n_2$

Πρέπει βέβαια να ελέγξουμε ότι δεν εξαρτάται από αντιπροσώπους.

Ελέγχουμε ότι είναι διάταξη στο $\mathbb{Z}$.

(Αυτό σημαίνει ότι έχει τις εξής τρεις ιδιότητες:

Είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική, και μεταβατική.)

Πιο ενδιαφέρον είναι ότι είναι ολική διάταξη.

(Αυτό σημαίνει ότι $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ τουλάχιστον ένα από τα δύο ισχύει: $x \leq y$ ή $y \leq x$.)

Λέμε «ο x είναι θετικός» και εννοούμε $x > [0, 0]$.

Λέμε «ο x είναι αρνητικός» και εννοούμε $x < [0, 0]$.

Ασκηση: Κάθε ακέραιος είναι ή μηδέν ή θετικός ή αρνητικός.

Ασκηση: Η διάταξη των ακεραίων είναι ολική.

Ελέγχουμε και «την συμβατότητα πρόσθεσης και διάταξης»: Αυτό μπορεί να γίνει με δυο τρόπους:

Πρώτος τρόπος: Ελέγχουμε ότι το άθροισμα θετικών ακεραίων είναι θετικός ακέραιος.

Το χρησιμοποιούμε για να ελέγξουμε ότι $x \leq y \quad \Rightarrow \quad x + z \leq y + z.$

Δεύτερος τρόπος: Ελέγχουμε κατ' ευθείαν ότι $x \leq y \quad \Rightarrow \quad x + z \leq y + z.$

Υπάρχει η εξής ορολογία που εκφράζει πιο περιληπτικά τις ιδιότητες που έχουμε δει ως τώρα:

Το $\mathbb{Z}$ (μαζί με την παραπάνω πρόσθεση και διάταξη) είναι μια ολικά διατεταγμένη προσθετική ομάδα.

Ορισμός του πολλαπλασιασμού ακεραίων:

$$[n_1, n_2] \cdot [m_1, m_2] \quad = \quad [n_1 m_1 + n_2 m_2, n_1 m_2 + n_2 m_1]$$

Ελέγχουμε ότι δεν εξαρτάται από τους αντιπροσώπους,

έχει ουδέτερο στοιχείο το $[1, 0]$, είναι προσεταιριστικός, και αντιμεταθετικός

και ικανοποιεί το Νόμο της Διαγραφής.

Ελέγχουμε και «την συμβατότητα πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού», δηλαδή την επιμεριστικότητα.

Τέλος, ελέγχουμε και «την συμβατότητα διάταξης και πολλαπλασιασμού»:

Το γινόμενο θετικών ακεραίων είναι θετικός ακέραιος.

Η ορολογία που εκφράζει περιληπτικά τις ιδιότητες που έχουμε δει ως τώρα είναι η εξής:

Το $\mathbb{Z}$ (μαζί με την παραπάνω πρόσθεση, πολλαπλασιασμό, και διάταξη)

είναι μια ολικά διατεταγμένη ακέραια περιοχή.

Έστω $\mathbb{N}$ το υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ που αποτελείται από τους μη-αρνητικούς ακεραίους.

Το τελευταίο πράγμα που θα δούμε σε αυτή την ενότητα είναι το πως «ταυτίζουμε» το ω με το $\mathbb{N}$.

Έστω $f : \omega \to \mathbb{N}$ η συνάρτηση που ορίζεται με $f(n) = [n, 0]$.

<u>Ασκηση:</u> Η f είναι επί του $\mathbb{N}$ (υπόδειξη: αφαίρεση φυσικών αριθμών).

Ελέγχουμε ότι η f είναι 1-1, και διατηρεί την πρόσθεση, τον πολλαπλασιασμό, και την διάταξη.

Ας επαναδιατυπώσουμε τα παραπάνω. Αρχικά, ας συμβολίζουμε με $\hat{n}$ το $f(n)$.

Παρατηρήστε ότι το n είναι φυσικός αριθμός ενώ το $\hat{n}$ είναι μη-αρνητικός ακέραιος.

(Δεδομένου του n, θα αναφέρομαι στον $\hat{n}$ ως «ο αντίστοιχος ακέραιος».)

Δυστυχώς δεν ισούνται. Για παράδειγμα, αν $n = 0$, δηλαδή το κενό σύνολο,

τότε $\hat{n}$ είναι το $[0, 0]$ που υπολογίσαμε σε προηγούμενη άσκηση (και σίγουρα δεν είναι κενό).

Ας επαναδιατυπώσουμε τις «καλές» ιδιότητες που έχει η f: Αυτές είναι:

$n = m \quad \Leftrightarrow \quad \hat{n} = \hat{m}.$

$n \leq m \Leftrightarrow \quad \hat{n} \leq \hat{m}.$

$n + m = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \hat{n} + \hat{m} = \hat{\ell}$

$n \cdot m = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \hat{n} \cdot \hat{m} = \hat{\ell}$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω συχνά «ταυτίζουμε το n με το $\hat{n}$»,

δηλαδή απλοποιούμε το συμβολισμό που χρησιμοποιούμε συμβολίζοντας και το $\hat{n}$ με n.

Στηριζόμαστε στα συμφραζόμενα (και στη «μαθηματική μας ωριμότητα»)

για να κρίνουμε αν εννοούμε το $\hat{n}$ ή το n.

Για να δείτε αν το καταλαβαίνετε αυτό, λύστε την παρακάτω άσκηση:

<u>Ασκηση:</u> Κάθε ακέραιος γράφεται ως $\pm k$ με k φυσικό αριθμό.