19. Κατασκευή του $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$) ②

$\mathbb{Z}$

ω) ①

① (n_1, n_2) ψευδοακ. δίνει ακ. $[n_1, n_2]$

② (n_1, n_2) ψευδορητός + ρητό $\dfrac{n_1}{n_2}$

Έστω $\mathbb{Z}^*$ το σύνολο των μη-μηδενικών ακεραίων. Έστω $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

Θα λέω ότι «το n είναι ψευδορητός» και θα εννοώ ότι «$n \in A$».

Έτσι ένας ψευδορητός n είναι απλώς ένα ζεύγος $n = (n_1, n_2)$

με n_1 και n_2 ακεραίους και $n_2 \neq 0$.

Στην ενότητα αυτή, το σύμβολο «$\sim$» θα συμβολίζει την παρακάτω σχέση:

Αν $n, m \in A$: Λέω $n \sim m$ και εννοώ $n_1 m_2 = n_2 m_1$.

Ελέγχουμε ότι είναι σχέση ισοδυναμίας

(για τη μεταβατικότητα, θα χρειαστείτε το νόμο της διαγραφής για τον πολλαπλασιασμό).

Δεδομένου $n = (n_1, n_2)$ στο A, συμβολίζω την αντίστοιχη κλάση με $[n]$, ή και με n_1/n_2, ή και με $\frac{n_1}{n_2}$.

Έστω $\mathbb{Q}$ το σύνολο όλων αυτών των κλάσεων.

Θα λέω ότι «το x είναι ρητός» και θα εννοώ ότι «$x \in \mathbb{Q}$».

Παρακάτω βλέπετε τους «προφανείς» ορισμούς:

$$
\begin{array}{rcl}
\frac{n_1}{n_2} + \frac{m_1}{m_2} & = & \frac{n_1 m_2 + n_2 m_1}{n_2 m_2} \\
\frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{m_1}{m_2} & = & \frac{n_1 m_1}{n_2 m_2} \\
\frac{n_1}{n_2} \leq \frac{m_1}{m_2} & \Leftrightarrow & n_1 m_2 \leq n_2 m_1 \quad (n_2, m_2 \text{ θετικοί})
\end{array}
$$

<u>Ασκηση:</u> Να διατυπώσετε αυστηρά και μετά να αποδείξετε:

Ο παραπάνω περιορισμός «n_2, m_2 θετικοί» είναι «δίχως βλάβη της γενικότητας».

Υπόδειξη: Απλώς διατυπώστε (και αποδείξτε) ότι κάθε ρητός αντιπροσωπεύεται από κάποιο «καλό» ψευδορητό.

Απόσπασμα οθόνης που λήφθηκε: 16-Nov-20, 09:27

Ελέγχουμε ότι τα παραπάνω είναι καλώς ορισμένα

και ότι όλες τις «καλές» ιδιότητες που είδαμε για το $\mathbb{Z}$ τις έχει και το $\mathbb{Q}$.

Όμως το $\mathbb{Q}$ είναι «καλύτερο»: Δεν είναι απλώς ακέραια περιοχή, είναι «σώμα».

Αυτό σημαίνει ότι έχει και την παρακάτω ιδιότητα:

<u>Θεώρημα:</u> Δεδομένου μη-μηδενικού $x \in \mathbb{Q}$: Υπάρχει ο ρητός που συμβολίζουμε με $\frac{1}{x}$ (ή: με x^{-1})

και χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα ότι το γινόμενο $\frac{1}{x} \cdot x$ ισούται με το μοναδιαίο στοιχείο.

<u>Άσκηση:</u> Ποιο είναι το μοναδιαίο στοιχείο (δλδ το ουδέτερο του πολλαπλασιασμού) στο $\mathbb{Q}$;

<u>Άσκηση:</u> Να αποδείξετε το προηγούμενο θεώρημα.

Τελειώνοντας, ας δούμε, δεδομένου $n \in \mathbb{Z}$, ποιος είναι ο «αντίστοιχος ρητός» $\hat{n} \in \mathbb{Q}$.

Αυτά που ισχύουν είναι πολύ παρόμοια με αυτά που είδαμε για τον αντίστοιχο ακέραιο.

Έστω λοιπόν $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ η συνάρτηση που ορίζεται με $f(n) = \frac{n}{1}$.

Ελέγχουμε ότι η f είναι 1-1, και διατηρεί την πρόσθεση, τον πολλαπλασιασμό, και την διάταξη.

Ας επαναδιατυπώσουμε τα παραπάνω. Ας συμβολίζουμε με $\hat{n}$ το $f(n)$.

Τότε το n είναι ακέραιος ενώ το $\hat{n}$ είναι ρητός.

(Δεδομένου του n, θα αναφέρομαι στον $\hat{n}$ ως «ο αντίστοιχος ρητός».)

Όπως ίσως προβλέπετε, $n \neq \hat{n}$, παρ' όλο που δεν είναι πια τόσο προφανές.

Οι «καλές» ιδιότητες που έχει η f είναι, όπως στην προηγούμενη ενότητα,

$n = m \quad \Leftrightarrow \quad \hat{n} = \hat{m}.$

$n \leq m \Leftrightarrow \quad \hat{n} \leq \hat{m}.$

$n + m = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \hat{n} + \hat{m} = \hat{\ell}$

$n \cdot m = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \hat{n} \cdot \hat{m} = \hat{\ell}$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω συχνά «ταυτίζουμε το n με το $\hat{n}$»,

ακριβώς με τον τρόπο που το κάναμε αυτό στο τέλος της προηγούμενης ενότητας.

Έτσι μπορούμε να θεωρούμε ότι $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

Για να δείτε αν το καταλαβαίνετε αυτό, λύστε την παρακάτω άσκηση:

<u>Ασκηση:</u> Δίνονται ακέραιοι m, n με $n \neq 0$. ΝΔΟ τα παρακάτω ① και ② είναι ισοδύναμα.

① το n διαιρεί το m στο $\mathbb{Z}$. (Σας θυμίζω ότι αυτό σημαίνει: $\exists \ell \in \mathbb{Z} \quad m = n\ell$.)

② $\frac{m}{n} \in \mathbb{Z}$.

20. Κατασκευή του $\mathbb{R}$

"Σάρα" $\mathbb{R} = ?$

$\pi = 3.14159\ldots$ πραγμ. α.

ποιος είναι ο ψευδοπραγμ. α

που καθορίζει το π ?

$a_0 = 3 \quad a_1 = \frac{31}{10} \quad a_2 = \frac{314}{100} \quad \ldots$

$(a_0, a_1, a_2, \ldots)$

πώς το a δίνει το π ?

$\pi = \lim a$

$\boxed{a \sim b}$ $\lim a = \lim b$

$$\boxed{\lim(a-b) = 0}$$

Ορ $B = \mathbb{Q}^\omega$

Δλδ: $B =$ σύνολο όλων

(όταν λέω «όλες» εννοώ «που δεν είναι απαραίτητα συγκλίνουσες»)

των ακολουθιών $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ με ρητούς όρους.

Ορίζουμε με τον συνήθη τρόπο το $+$ και το $\cdot$ στο B.

---

z

Ορ Δεδ. $a, b \in B$: Λέω «$a \leq b$» και εννοώ: τελικά $a_n \leq b_n$.

Δλδ $a \leq b \quad \Leftrightarrow$

$$(\exists N \in \omega) \quad (\forall n \in \omega \text{ τ.ω. } n \geq N) \quad a_n \leq b_n$$

Ασκ Είναι η παραπάνω σχέση αναλαστική; μεταβατική; αντισυμμετρική;

Ασκ Δεδ $a, b \in B$ αληθεύει πάντα ότι $a \leq b$ ή $b \leq a$;

<u>Ορολ</u> Δεδ $a \in B$: Λέω «η a είναι μηδενική» και εννοώ:

$$-\frac{1}{k} \leq a \leq \frac{1}{k} \quad \text{για κάθε θετικό ακέραιο } k$$

όπου $\pm\frac{1}{k}$ συμβολίζουν σταθερές ακολουθίες.

Δεν μπορούμε να το αποδείξουμε ακόμα «αυστηρά», αλλά περιμένουμε (και ισχύει) ότι

οι μηδενικές ακολουθίες είναι οι ακολουθίες στο B που, όχι μόνο είναι συγκλίνουσες, αλλά έχουν όριο μηδέν.

Το επόμενο βήμα είναι οι «ψευδοπραγματικοί αριθμοί», δηλαδή οι συγκλίνουσες ακολουθίες,

δηλαδή οι ακολουθίες Cauchy.

Θα τις ορίσω με παρόμοιο αφηρημένο τρόπο όπως τις μηδενικές ακολουθίες.

Ορολ Λέω «το x είναι διπλή ακολουθία» και εννοώ

$$x : \omega \times \omega \to \mathbb{Q}.$$

$x(m,n) = x_{mn}$

Δηλαδή το x είναι «ένας $\infty \times \infty$ πίνακας» της μορφής

$m=0$

$$\begin{bmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} & \cdots \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & \cdots \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$n=1$

Δεδ. x, y που είναι διπλές ακολουθίες, λέω «$x \leq y$» και εννοώ

$(\exists N \in \omega) \quad (\forall m, n \in \omega$ τ.ω. $m, n \geq N) \quad x_{mn} \leq y_{mn}$

Δεδ. διπλής ακολουθίας x: Λέω «η x είναι μηδενική» και εννοώ:

$$-\frac{1}{k} \leq x \leq \frac{1}{k} \quad \text{για κάθε θετικό ακέραιο } k$$

(όπου $\pm\frac{1}{k}$ συμβολίζουν σταθερές διπλές ακολουθίες).

Κάθε $a \in B$ καθορίζει μια διπλή ακολουθία x ως εξής: $x_{mn} = a_m - a_n$.

Λέω «το a είναι ψευδοπραγματικός αριθμός» και εννοώ ότι αυτή η διπλή ακολουθία είναι μηδενική.

Το σύνολο όλων των ψευδοπραγματικών αριθμών θα το συμβολίζω με A.

<u>Ορ</u> Ορίζω σχέση στο A ως εξής:

$$a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad \text{η ακολουθία } a-b \text{ είναι μηδενική.}$$

<u>Θ</u> Η παραπάνω σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας.

<u>Ασκ</u> Αποδείξτε το προηγούμενο θεώρημα.

Υπόδειξη: Για τη μεταβατικότητα, δείξτε πρώτα ότι οι μηδενικές ακολουθίες είναι κλειστές ως προς το $+$.

Υπόδειξη για την υπόδειξη: αν $a, b \le \frac{1}{2k}$ τότε $a + b \le \frac{1}{k}$.

Συμβολίζω με $\overline{a}$ την κλάση του a ως προς την παραπάνω σχέση.

" $\bar{a}$ = lima "

Έστω $\mathbb{R}$ το σύνολο όλων αυτών των κλάσεων.

Θα λέω ότι «το x είναι πραγματικός αριθμός» και θα εννοώ ότι «$x \in \mathbb{R}$».

Ορ Ορίζω τις πράξεις και την διάταξη στο $\mathbb{R}$ ως εξής:

1. $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$
2. $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$
3. $\overline{a} \leq \overline{b} \quad \Leftrightarrow \quad a \leq b$ ή $a \sim b$

Δεν είναι τυχαίο που οι ορισμοί 1 και 2 παραπάνω «θυμίζουν» δακτυλίους-πηλίκο:

Το A είναι δακτύλιος, το σύνολο I των μηδενικών ακολουθιών είναι ιδεώδες,

και το παραπάνω $\mathbb{R}$ είναι (όχι απλώς ισόμορφο αλλα κυριολεκτικά) ίσο με το A/I.

Απόσπασμα οθόνης που λήφθηκε: 16-Nov-20, 10:24

Ελέγχουμε ότι τα παραπάνω $+$, $\cdot$, και $\leq$ στο $\mathbb{R}$ είναι καλώς ορισμένα.

Για τους ορισμούς της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού

δεν είναι μόνο η «μοναδικότητα» του αθροίσματος και του γινομένου που πρέπει να αποδειχθεί

αλλά και η «ύπαρξη».

Για παράδειγμα, για την πρόσθεση, δεν αρκεί να αποδειχθεί ότι

το άθροισμα είναι ανεξάρτητο από την επιλογή αντιπροσώπου.

Πρέπει και να αποδειχθεί ότι

το άθροισμα δυο συγκλινουσών ακολουθιών παραμένει συγκλίνουσα ακολουθία.

Ελέγχουμε ότι το $\mathbb{R}$ έχει όλες τις «καλές» ιδιότητες του $\mathbb{Q}$. Περιληπτικά:

Το $\mathbb{R}$ είναι διατεταγμένο σώμα.

Όμως το $\mathbb{R}$ είναι «καλύτερο» γιατί έχει την ιδιότητα της «πληρότητας»:

Υπάρχει ο «προφανής» ορισμός της μηδενικής ακολουθίας και της ακολουθίας Cauchy στο $\mathbb{R}$.

Τώρα μπορώ να πω ποια είναι η ιδιότητα της πληρότητας:

(Είναι ισοδύναμη με την γνωστή «ύπαρξη sup» αλλά δεν θα πω γιατί.)

Έστω $x_0, x_1, \ldots$ μια ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{R}$. Τότε υπάρχει $t \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε η $x_0 - t, x_1 - t, \ldots$ είναι μηδενική.

(Πιο πρόχειρα: Αν μια ακολουθία στο $\mathbb{R}$ έχει «κάπου» κάποιο όριο, τότε έχει όριο $t \in \mathbb{R}$.)