

Το επόμενο θέμα μας είναι να καταλάβουμε,
δεδομένου $t \in \mathbb{Q}$, τι είναι ο «αντίστοιχος πραγματικός αριθμός» $\hat{t} \in \mathbb{R}$.

Ορισμός: Δεδ. $t \in \mathbb{Q}$, συμβολίζω πάλι με t την σταθερή ακολουθία $(t, t, t, \dots) \in B$

και παρατηρώ ότι δεν ανήκει απλώς στο B αλλά και στο υποσύνολο A .

(Είναι δηλαδή ψευδοπραγματικός αριθμός, άρα καθορίζει ένα πραγματικό αριθμό $\bar{t}$.)

Ορίζω το $\hat{t}$ ως $\hat{t} = \bar{t}$.

Θεώρημα: Θεωρώ την $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται με $f(t) = \hat{t}$. Τότε:

- ① Η f είναι 1-1.
 - ② Η f διατηρεί το $+$.
 - ③ Η f διατηρεί το $\cdot$.
 - ④ Η f διατηρεί το $\leq$.
-

Χρησιμοποιούμε με το «γνωστό τρόπο» το θεώρημα, για να θεωρούμε το $\mathbb{Q}$ ως υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Ασκ Αποδείξτε το προηγούμενο θεώρημα.

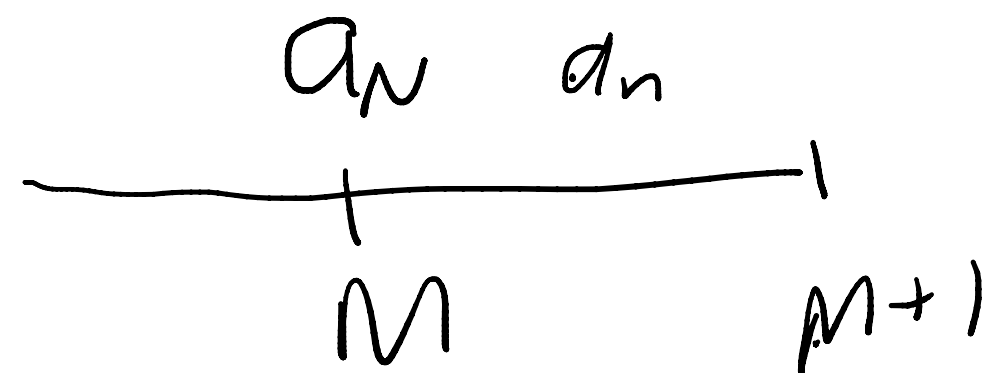
Ασκ ΝΔΟ το $\mathbb{R}$ έχει την Αρχιμήδεια Ιδιότητα.

Πύση | Έστω $\bar{a} \in \mathbb{R}$

Υαχvw $l \in \mathbb{W}$ τ.ω. $\bar{a} \leq l$

Βρίσκω N τ.ω. $|a_m - a_n| \leq \frac{1}{K}$ ($\frac{1}{K} \mu \in \mathbb{K} = 1$)

Έστω $M = |a_N|$



16x | $\bar{a} \leq M+1$

$$\underbrace{A_n \log x}_{\text{negat.}} \quad \text{AND } 0 \quad \forall n \geq N \quad a_n \leq M+1$$

$$\text{negat.}, \quad a_n \leq |a_n|$$

$$= |a_n - a_n + a_n|$$

$$\leq |a_n - a_n| + |a_n|$$

$$\leq 1 + M \quad \overline{\leq} (\log x)$$

$$\equiv \dot{\epsilon} \rho \omega \quad M = \pm a_N$$

$$\cdot A \rho a \quad M \in \mathbb{Q}$$

$$\rightarrow M+1 \in \mathbb{Q}$$

$$\Gamma \rho' a \psi \omega \quad M+1 = \frac{l_1}{l_2} \quad (l_1, l_2 \in \mathbb{Z})$$

$$\equiv \dot{\epsilon} \rho \omega \quad M \geq 0 \quad \cdot A \rho a \quad M+1 > 0$$

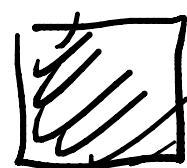
$$\cdot A \rho a \quad \Delta B \Gamma \quad l_1, l_2 > 0$$

$$\text{Αρα } l_2 \geq 1$$

$$\text{Αρα } \frac{l_1}{l_2} \leq l_1$$

$$\underbrace{\pi \in \mathbb{I}} \quad a_n \leq \frac{l_1}{l_2} \leq l_1$$

Διό μπορού να πάρω $l = l_1$



21. Πληθικοί Αριθμοί

Στην ενότητα αυτή, και σε όλο το υπόλοιπο μάθημα, το σύμβολο « $\sim$ » συμβολίζει τη σχέση «είναι ισοπληθικά».

Συντομογραφία: Το «ΠΑ» σημαίνει «Πληθικός Αριθμός».

$$\text{ΕΙΣΑΓΩΓΗ} \left\{ \#(2, 3, 5, 7) \right\} = 4$$

$$\begin{aligned} \#(A) &= \text{πλήθος στοιχείων του } A \\ &= \#A \text{ του } A \end{aligned}$$

Θ

- ① Υπάρχουν κάποια σύνολα που λέγονται πληθικοί αριθμοί.
- ② Κάθε σύνολο A καθορίζει ένα μοναδικό ΠΑ, τον οποίο τον ονομάζουμε «πληθικό αριθμό του A », και τον συμβολίζουμε με $\#(A)$.
- ③ $(\forall A, B) \quad A \sim B \Leftrightarrow \#(A) = \#(B)$
- ④ Για κάθε φυσικό αριθμό $n \quad \#(n) = n$.
- ⑤ Για κάθε πληθικό αριθμό $x \quad \#(x) = x$.

Ας σχολιάσω λίγο το θεώρημα:

Το ④, ειδικότερα, λέει: το n είναι πληθικός αριθμός.

Εξηγώ: Από το ②, το $\#(A)$ είναι πληθικός αριθμός $\forall A$, ειδικότερα αν $A = n$.

Το ④ λοιπόν λέει: οι πληθικοί αριθμοί περιέχουν τους φυσικούς αριθμούς.

Άλλη μια παρατήρηση σχετικά με το ④: Είχαμε ήδη παρατηρήσει ότι
«το 0 έχει 0 στοιχεία, το 1 έχει 1 στοιχείο, το 2 έχει 2 στοιχεία, ...».

Τώρα το ξέρουμε και «αυστηρά».

Το ⑤ λέει: «το x έχει x στοιχεία»

(όχι μόνο αν το x είναι φυσικός αριθμός, αλλά ακόμα και)

αν το x είναι τυχαίος πληθικός αριθμός.

Θα ορίσουμε την πρόσθεση πληθικών αριθμών.

Δεδομένων πληθικών αριθμών x και y , το **άθροισμα** των x και y ,

που θα το συμβολίζω με $x + y$,

ορίζεται ως εξής:

$$x + y = \#(A \cup B) \text{ όπου } \begin{cases} \#(A) = x \\ \#(B) = y \\ A \cap B = \emptyset \end{cases}$$

Ασκ Να αποδείξετε αυστηρά ότι το άθροισμα πληθικών αριθμών $2 + 3$ ισούται με 5.

Επιτρέπεται να χρησιμοποιήσετε μόνο θεωρήματα που έχουμε δει ως αυτό το σημείο του μαθήματος.

Νύση $x = 2$ $y = 3$ $x + y = ?$

$A, B = ?$

$$\#A = \#(A)$$

$$\#A = X \quad A = \textcircled{2} \quad \cap. x: \quad A = X$$

$$A = 2 = \{0, 1\}$$

$$\pi \text{ από } \gamma_0 \text{ και } \gamma_1, \text{ παίρνουμε } B = \gamma = 3 = \{0, 1, 2\}$$

$$A \cup B = \{0, 1, 2\} \quad \#(A \cup B) = 3 \neq 5$$

$$\gamma_1 = ?$$

$$\text{Αντίστροφο: } A \cap B \neq \emptyset$$

"Σταυρα Κόλνο"

$$A = \{0\} \times 2 =$$

$$\{(0,0), (0,1)\}$$

$$B = \{1\} \times 3 =$$

$$\{(1,0), (1,1), (1,2)\}$$

$$\boxed{16 \times} \quad A \cap B = \emptyset$$

$$\boxed{A \cap 16 \times}$$

$n \in \mathbb{Z}^n$

Ερωτησίων

$$s \in A \cap B$$

$$s \in A \quad \text{appears} \quad S = (0, t)$$

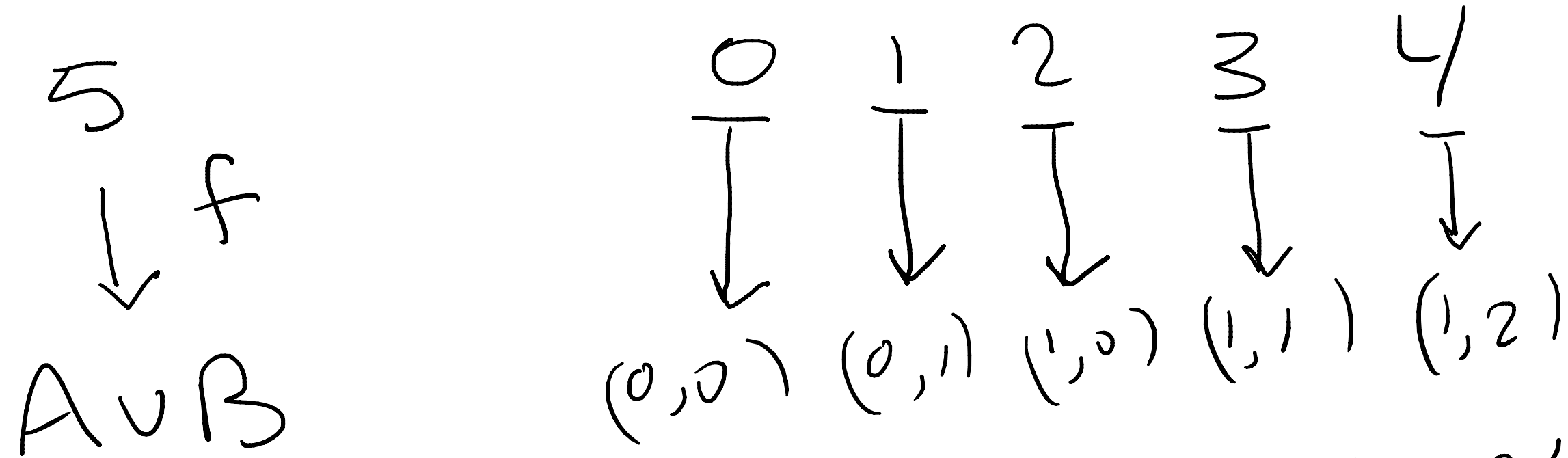
$$s \in B \quad \text{---} \quad S = (1, u)$$

$$(0, t) = (1, u)$$

$$0 = 1$$

$$a \leq n \quad \boxed{\text{X}} (16x)$$

$$\underbrace{\langle \mu, \beta \rangle}_{\Sigma} \quad v \xrightarrow{f} w \quad f(v) = w$$



προφ. $1-1$ & $\in \mathbb{N}_i$

$$5 \sim A \cup B \quad \text{αρα} \quad \#S = \#(A \cup B)$$

$$\text{αλλιώς} \quad \#S = S \quad \& \quad \#(A \cup B) = x+y \quad \boxed{\text{X}}$$

Ασκ Αν $A_1 \sim A_2$ και $B_1 \sim B_2$, ισχύει τότε ότι $A_1 \cup B_1 \sim A_2 \cup B_2$;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ασκ Να επαναλάβετε την προηγούμενη άσκηση υποθέτοντας όμως ότι $A_1 \cap B_1 = A_2 \cap B_2 = \emptyset$.

Ασκ Δίνονται ΠΑ x και y . Να αποδείξετε ότι το $x + y$ είναι καλώς ορισμένο.

Υπόδειξη για την ύπαρξη: Δείτε πως απέδειξα το « $2 + 3 = 5$ ».

Υπόδειξη για την μοναδικότητα: Αυτό είναι ουσιαστικά το ίδιο πρόβλημα με την προηγούμενη άσκηση.

Θ Δεδομένων πληθικών αριθμών x, y, z :

① $0 + x = x$.

② $x + y = y + x$.

③ $(x + y) + z = x + (y + z)$.

Απ προκύπτει αμέσως
από τις ανισότητες, διότι
της ένωσις:

① $\emptyset \cup X = X$

$\Gamma_{1a} \sim_0$ (2)

$$x \cup y = y \cup x$$

$$A \cup B = B \cup A$$

$\Gamma_{1a} \sim_w$ (3)

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$