

Για να καταλάβετε ευκολότερα το επόμενο θεώρημα,
θα κάνω μια προσωρινή αλλαγή στο συμβολισμό που χρησιμοποιώ:

Αν $m, n \in \omega$ τότε:

$m + n$ συμβολίζει το άθροισμά τους ως φυσικοί αριθμοί.

$m \oplus n$ συμβολίζει το άθροισμά τους ως πληθικοί αριθμοί.

Μετά την απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος,

θα επιστρέψω στον συμβολισμό $m + n$ αντί του $m \oplus n$.

Θ Δεδομένων φυσικών αριθμών m, n : $m \oplus n = m + n$.

Ans

$$f: W \rightarrow W \quad n \mapsto m+n$$

$$g: W \rightarrow W \quad n \mapsto m \oplus n$$

AND $\supset$ O

υ ο υ α δ .

$$f = g$$

ου ου AA

AND O

υ g 'εχ'ει ιδιο αναδρ.
το no

υε ου f

ANDO

①

$$g(0) = m$$

②

$$g(n^+) = g(n)^+$$

①

$$m \oplus 0 = m$$

?

no way. $\ominus$

①

$$\textcircled{2} \quad \underbrace{|\sigma x|}_{\text{}} \quad \forall x \in W \quad x^+ = x \oplus 1$$

$$A \cap B \quad A \cap B (!) \quad \forall n \in \mathbb{N}: A \cap B = \emptyset !$$

$$g(n^+) = m \oplus (n^+)^{\frac{I_{\sigma x}}{}} = m \oplus (n \oplus 1)$$

$$(g(n))^+ = (m \oplus n)^+ \stackrel{I_{\sigma x}}{=} (m \oplus n) \oplus 1$$

$$\pi \circ \sigma : \quad \square$$

Είμαστε έτοιμοι να ορίσουμε ένα «καινούριο» πληθικό αριθμό.

Ορισμός: Ορίζουμε τον πληθικό αριθμό $\aleph_0$ ως εξής:

$$\aleph_0 = \#(\omega).$$

$$\underline{\Theta} \quad 1 + \aleph_0 = \aleph_0.$$

$$\underline{An} \quad \begin{array}{l} A \cup B = C \\ A \cap B = \emptyset \end{array} \quad \text{τότε}$$

$$\#A + \#B = \#C$$

*

$$\begin{array}{l} A = \{0\} \\ B = \{1, 2, \dots\} \\ C = \omega \end{array}$$

$$f: C \rightarrow B$$
$$n \mapsto n+1$$

$\int$ $\begin{matrix} 1-1 \\ \in n: \end{matrix}$

"Yäpzo pas"

$C \sim B$

$$\#B = \#C = N_0$$

$\textcircled{*} : 1 + \int N_0 = N_0$ 

Θ Το $\aleph_0$ δεν είναι φυσικός αριθμός.

Απόδειξη: άσκηση (υπόδειξη: νόμος της διαγραφής).

Θ $\forall n \in \omega \quad n + \aleph_0 = \aleph_0$.

Απόδειξη: άσκηση (υπόδειξη: ΣΧΑΕ στο n).

Θ $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

Α+11

$$A = \{0, 2, 4, \dots\}$$

$$B = \{1, 3, 5, \dots\}$$

$$C = \omega$$

$$N_0 \stackrel{\#}{=} C \stackrel{\#}{=} A \stackrel{\#}{=} B$$

$f(x) = 2x$
 $g(x) = x+1$

$\circledast$: $N_0 + N_0 = N_0$ $\boxed{\subseteq}$

22. Το Αξίωμα της Επιλογής

Ορολογία: Έστω A σύνολο.

Λέμε «η f είναι συνάρτηση επιλογής για το A » και εννοούμε:

Η f είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A η οποία έχει την εξής ιδιότητα:

Για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι $f(x) \in x$.

Δηλαδή η f «επιλέγει» από κάθε x στο πεδίο ορισμού της ένα στοιχείο του x .

(Το «επιλεγμένο» στοιχείο είναι το $f(x)$.)

Ειδικότερα, για να έχει το A κάποια συνάρτηση επιλογής, πρέπει $\emptyset \notin A$.

Αξ (Αξίωμα της Επιλογής) Κάθε σύνολο μη-κενών συνόλων έχει κάποια συνάρτηση επιλογής.

$$\underline{\pi a e} \mid A = \{a\} \quad a \neq \emptyset$$

$$\text{βρίσκω} \quad y \in a$$

$$f = \{(a, y)\}$$

$$\underline{\pi a e} \mid A = \{a, b\} \quad \begin{array}{l} a \neq b \\ a \neq \emptyset \\ b \neq \emptyset \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y \in a \\ z \in b \end{array}$$

$$\begin{array}{l} f(a) = y \\ f(b) = z \end{array}$$

105

Gödel

30

ox, $a \vdash n$

P. Cohen

60

ox, Θ

Ο επόμενος στόχος μας είναι να δούμε μια εφαρμογή του αξιώματος της επιλογής.

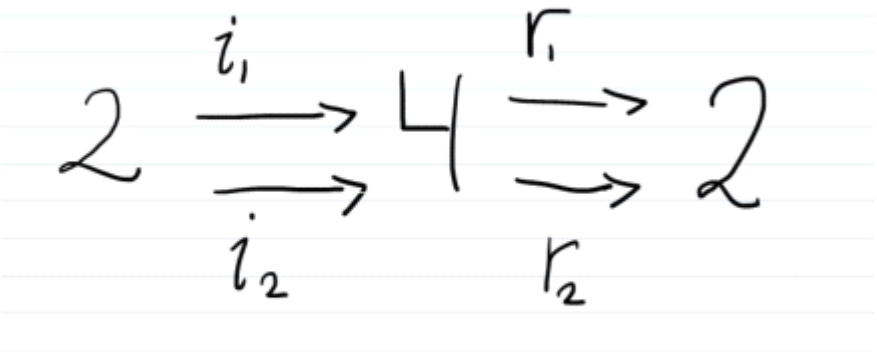
Αν A, B είναι σύνολα και i, r είναι συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$i : A \rightarrow B, r : B \rightarrow A, \text{ και } r \circ i = I_A$$

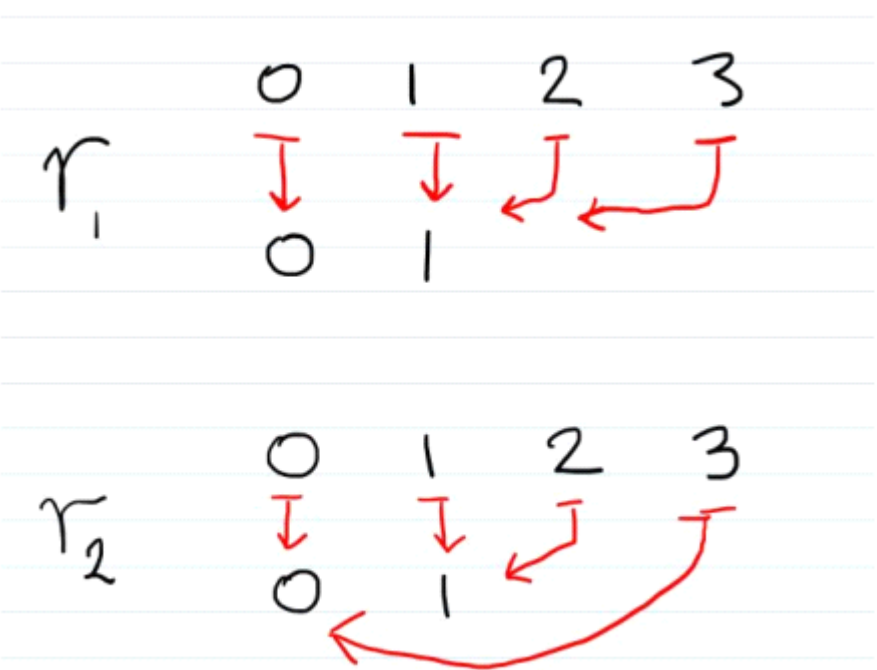
τότε λέμε ότι «η r είναι μια αριστερή αντίστροφη της i »

και ότι «η i είναι μια δεξιά αντίστροφη της r ».

Για παράδειγμα, ας δούμε τις τέσσερις παρακάτω συναρτήσεις



όπου $i_1(x) = x$, $i_2(x) = 2x$, και οι r_1, r_2 ορίζονται παρακάτω:



$$r \circ i = I_A$$
$$r(i(x)) = x$$

Παρατηρούμε ότι $r_j \circ i_k = I_2$ για $j, k \in \{1, 2\}$.

Ειδικότερα, ούτε η δεξιά, ούτε η αριστερή αντίστροφη είναι μοναδική.

(Παρεμπιπτόντως όμως, αν μια δεδομένη $f : A \rightarrow B$ έχει

και κάποια αριστερή αντίστροφη $g_1 : B \rightarrow A$

και κάποια δεξιά αντίστροφη $g_2 : B \rightarrow A$

τότε έχει αντίστροφη g και $g = g_1 = g_2$. Αυτό είναι μια καλή **άσκηση**,

και ένας διασκεδαστικός τρόπος λύσης είναι να υπολογίσετε το $g_1 \circ f \circ g_2$ με δυο τρόπους.)

Θεώρημα: Έστω $f : A \rightarrow B$ συνάρτηση.

① Αν η f έχει κάποια αριστερή αντίστροφη $g : B \rightarrow A$ τότε είναι ένα-προς-ένα.

② Αν η f έχει κάποια δεξιά αντίστροφη $g : B \rightarrow A$ τότε είναι επί του B

③ Ισχύει και το αντίστροφο του ①, αρκεί $A \neq \emptyset$.

④ Ισχύει και το αντίστροφο του ②.

Απόδειξη: Το ενδιαφέρον είναι το ④, όπου θα μας χρειαστεί για πρώτη φορά το αξίωμα της επιλογής.

Τα ① και ② είναι καλές και εύκολες ασκήσεις.

Για το ③, αν το A δεν είναι κενό, τότε έχει κάποιο στοιχείο a_0 .

Ελέγχουμε ότι η $g : B \rightarrow A$ τέτοια ώστε

$$g(b) = \begin{cases} a \text{ αν υπάρχει } a \in A \text{ με } f(a) = b \\ a_0 \text{ αν δεν υπάρχει τέτοιο } a \end{cases}$$

είναι καλώς ορισμένη

(μην ξεχνάτε ότι υποθέτουμε ότι η f είναι ένα-προς-ένα),

και ότι είναι αριστερή αντίστροφη της f .

Για το ④ θα χρειαστούμε την αντίστροφη εικόνα,

που συνήθως συμβολίζουμε με $f^{-1}(b)$,

αλλά, για να είμαστε πιο αυστηροί, θα την συμβολίζω εδώ με $F(b)$.

Είναι λοιπόν ξεκάθαρο ότι η F είναι συνάρτηση, με $\text{Dom } F = B$, και

$$F(b) = \{a \in A : f(a) = b\}.$$

Έστω $\mathcal{A}$ το σύνολο όλων των $F(b)$, όπου $b \in B$.

(Με άλλα λόγια, το $\mathcal{A}$ είναι απλώς η εικόνα της F .)

Η υπόθεση μας ότι η f είναι επί

λέει ακριβώς ότι κάθε $F(b)$ είναι μη-κενό.

Από το αξίωμα της επιλογής, το $\mathcal{A}$ έχει κάποια συνάρτηση επιλογής h .

Ορίζω το $g(b)$ ως $g(b) = h(F(b))$.

(Πιο πρόχειρα: Δεδομένου $b \in B$, η f είναι επί άρα υπάρχουν $a \in A$ με $f(a) = b$.

«Επιλέγω» ένα από αυτά τα a και το ονομάζω $g(b)$.)

Ελέγχουμε ότι η g είναι καλώς ορισμένη και ότι είναι δεξιά αντίστροφη της f .■

Ίσως έχετε την απορία: «γιατί χρειάζεται το αξίωμα της επιλογής;»

Αν ναι, τότε μπράβο σας, την θεωρώ απόλυτα δικαιολογημένη απορία.

Θα προσπαθήσω να την απαντήσω:

Αρχικά, η «πρόχειρη» απόδειξη είναι σίγουρα πολύ πιο κατανοητή.

Η χρησιμότητα λοιπόν του αξιώματος της επιλογής σίγουρα δεν είναι για να κάνει τις αποδείξεις πιο εύκολες.

Είναι για να κάνει τις αποδείξεις **σωστές**.

Θυμηθείτε λοιπόν ότι ο συνήθης τρόπος να δω ότι έχω καλώς ορισμένη συνάρτηση g (γενικότερα, καλώς ορισμένο σύνολο g) είναι να βρω κάποιο τύπο $\Phi(x)$ που καθορίζει τι σημαίνει $x \in g$.

Για την g που συζητάμε τώρα, ο τύπος που χρησιμοποιήσαμε είναι $(\exists b \in B) \quad x = (b, h(F(b)))$.

Αυτό που δεν είναι καθόλου προφανές (αλλά έχει αποδειχθεί από τον Paul Cohen το 1963) είναι ότι, χωρίς το αξίωμα της επιλογής, όχι μόνο δεν μπορούμε να βρούμε τέτοιο τύπο, αλλά δεν μπορούμε καν να αποδείξουμε την ύπαρξη της ζητούμενης g .