23. Η Διάταξη των Πληθικών Αριθμών

Θα ορίσουμε την διάταξη πληθικών αριθμών.

Έστω x και y πληθικοί αριθμοί. Θα λέμε $x \leq y$ και θα εννοούμε ότι
υπάρχει κάποια συνάρτηση $f : x \to y$ που είναι ένα-προς-ένα.

Ασκηση: Έστω A και B σύνολα. ΝΔΟ ΤΑΕΙ:

1. $\#(A) \leq \#(B)$.
2. $\exists f : A \to B$ που είναι ένα-προς-ένα.

Υποδ: $x = {}^{\#}A$

$\# x = X$

$\# A = {}^{\#}X \qquad A \sim X$

Θεώρημα: Το παραπάνω $\leq$ είναι σχέση διάταξης, δηλαδή έχει:

① Την ανακλαστική ιδιότητα ($x \leq x \quad \forall$ ΠΑ x).

② Την αντισυμμετρική ιδιότητα ($x \leq y$ και $y \leq x) \Rightarrow x = y \quad \forall$ ΠΑ x, y).

③ Την μεταβατική ιδιότητα ($x \leq y$ και $y \leq z) \Rightarrow x \leq z \quad \forall$ ΠΑ x, y, z).

Ιστορικό Σχόλιο: Το ② είναι το λεγόμενο Θεώρημα των Cantor, Schröder, Bernstein.

① $I_X : X \to X$

③
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\exists f"] \arrow[rr, bend right, dashed, "\exists ? h"'] & Y \arrow[r, "\exists g"] & Z \end{tikzcd}$$

$h = g \circ f$

Θεώρημα: Αν $A \subseteq B$ τότε $\#(A) \leq \#(B)$.

Απ Ψάχνω $f: A \to B$ 1-1

Απάντηση: $f(x) = x$ $\blacksquare$

Θεώρημα: Κάθε φυσικός αριθμός n ικανοποιεί $n < \aleph_0$.

Απ

"$x < y$" εννοώ $x \le y$ και $x \ne y$

ΘΝΔΟ
(1) $n \ne \aleph_0$
(2) $n \le \aleph_0$

(1) Πρ. Θ

(2) $n \subseteq \omega$

$\# n \le \# \omega$

$n \le \aleph_0$

Θεώρημα: Αν $x, y \in \omega$ τότε:

$$x \le y \text{ ως φυσικοί αριθμοί} \quad \Leftrightarrow \quad x \le y \text{ ως πληθικοί αριθμοί.}$$

Απ (Προσωρινά) $x \le y$ "παλιά"

$x \trianglelefteq y$ "νέα"

αν $x \le y$

$x \subseteq y$ $\quad \#x \trianglelefteq \#y$ $\quad x \trianglelefteq y$

αν $x \trianglelefteq y$

ΘΝΔΟ $x \le y$ με ατη

Έστω λοιπόν: ΔΙΟ $x \le y$

δηδ $\boxed{y < x \quad (*)}$ άρα $y \le x$ άρα $y \trianglelefteq x$ άρα $x = y$

ατη (β) $(*)$ ∎

24. Ο Πολλαπλασιασμός Πληθικών Αριθμών

Θα ορίσουμε τον πολλαπλασιασμό πληθικών αριθμών.

Δεδομένων πληθικών αριθμών x και y, το γινόμενο των x και y,

που θα το συμβολίζω με $x \cdot y$,

ορίζεται ως εξής:

$$x \cdot y = \#(x \times y).$$

<u>Ασκηση</u>: Έστω A και B σύνολα. ΝΔΟ

$$\#(A) \cdot \#(B) = \#(A \times B).$$

Παρεμπιπτόντως, η αντίστοιχη άσκηση για την πρόσθεση είναι:

<u>Ασκηση</u>: Έστω A και B ξένα σύνολα. ΝΔΟ

$$\#(A) + \#(B) = \#(A \cup B).$$

Υποδ $B_1 \sim B_2$ τότε $A \times B_1 \sim A \times B_2$

(A_1, A_2 : παρόμοια)

Θεώρημα: Αν x, y, z είναι πληθικοί αριθμοί, τότε

1. $0 \cdot x = 0$
2. $1 \cdot x = x$
3. $x \cdot y = y \cdot x$
4. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
5. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

Απ (1) $\emptyset \times A = \emptyset$

(2) $\{0\} \times A \longrightarrow A \qquad (0,a) \longmapsto a$

(3) $A \times B \longrightarrow B \times A \qquad (a,b) \longmapsto (b,a)$

4 $(A \times B) \times C \longrightarrow A \times (B \times C)$

$((a,b),c) \longmapsto (a,(b,c))$

5 $A \times (B \cup C) = A \times B \cup A \times C$

$A \times (B \cap C) = A \times B \cap A \cap C$

Θεώρημα: Αν x, y είναι φυσικοί αριθμοί, τότε το γινόμενό τους ως φυσικοί αριθμοί ισούται με το γινόμενό τους ως πληθικοί αριθμοί.

Απόδειξη: Στην απόδειξη αυτή ο συμβολισμός $x \cdot y$ θα συμβολίζει το γινόμενο πληθικών αριθμών.

Το συμπέρασμα προκύπτει από την μοναδικότητα στην Αρχή της Αναδρομής,

επειδή το $f(y) = x \cdot y$ ικανοποιεί τον ίδιο αναδρομικό τύπο με το γινόμενο φυσικών αριθμών,

δηλαδή $f(0) = 0$ και $f(y+1) = f(y) + x$.

(Άσκηση: Γιατί ισχύουν οι δυο παραπάνω ισότητες;

Υπόδειξη: δείτε τα ①, ②, ⑤ στο προηγούμενο θεώρημα.)

Θεώρημα: $(\forall n \in \omega) \quad n \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

με $n \neq 0$

Ασκηση: Να αποδείξετε το προηγούμενο θεώρημα. Υπόδειξη: Επαγωγή.

Ιδέα

$n = 1$: προφ.

προσ

$n = 2$: $2 \cdot \aleph_0 = (1+1) \cdot \aleph_0 = 1 \cdot \aleph_0 + 1 \cdot \aleph_0$

$= \aleph_0 + \aleph_0$

$= \aleph_0$

<u>Θεώρημα:</u> $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

Απ] ΑΝΔΟ ① $\aleph_0 \le \aleph_0 \cdot \aleph_0$

② $\aleph_0 \ge \aleph_0 \cdot \aleph_0$

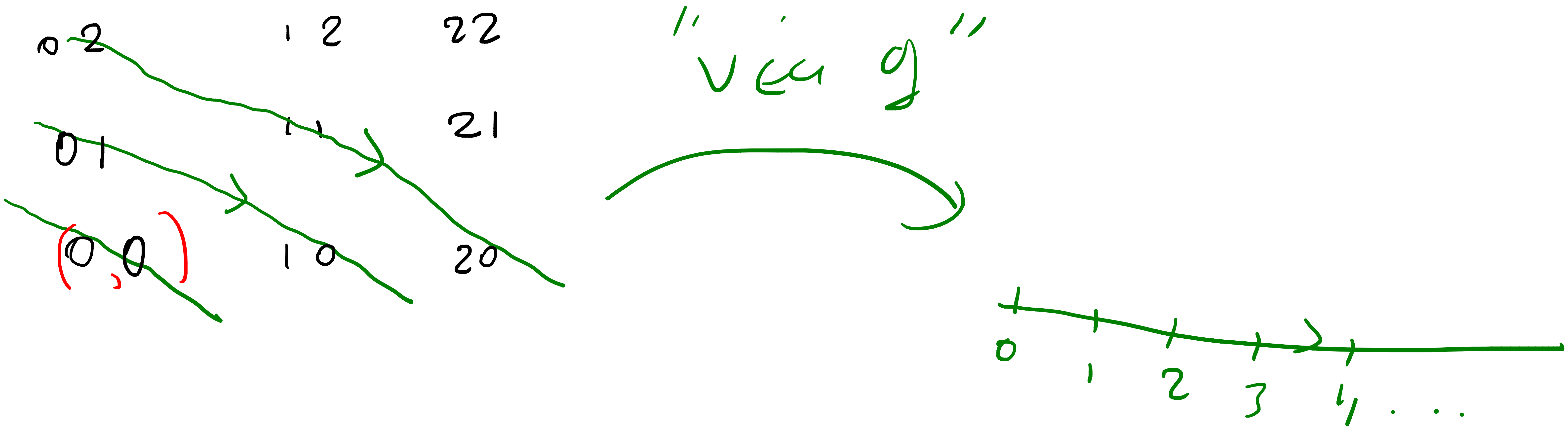
① $\omega \xrightarrow{f} \omega \times \omega$ $\quad n \mapsto (n,0)$ $\quad$ 1-1 $\quad \boxed{\le}$ (①)

② $\omega \times \omega \xrightarrow{g} \omega$ $\quad (n,m) \mapsto 2^n \cdot 3^m$

μοναδικότητα πρώτων παραγόντων

λέει: η g είναι 1-1

$2^{ος}$ τρόπος (σπίτσο)



25. Δυνάμεις Πληθικών Αριθμών

Θα ορίσουμε την δύναμη πληθικών αριθμών y^x.

Για να σας βοηθήσω να καταλάβετε πιο εύκολα αυτή την ενότητα,

αυτή την δύναμη θα την συμβολίζω και με $\exp(x, y)$.

Επίσης θα συμβολίζω το B^A και ως $\mathrm{Exp}(A, B)$.

Σας θυμίζω τον ορισμό:

$$\mathrm{Exp}(A, B) = \{f : \text{η } f \text{ είναι συνάρτηση από το } A \text{ στο } B\}.$$

Έστω x, y πληθικοί αριθμοί.

Θα ορίσουμε την δύναμη πληθικών αριθμών y^x

(που θα την συμβολίζω και με $\exp(x,y)$) ως εξής:

$$\exp(x,y) = \#\Big(\mathrm{Exp}(x,y)\Big).$$

Η «συνήθης» άσκηση που σας δίνω μετά από τον ορισμό πράξης ή διάταξης στα x, y

(δηλαδή τον «ορισμό μέσω αντιπροσώπων») είναι τώρα η παρακάτω:

Ασκηση: Έστω A και B σύνολα. ΝΔΟ

$$\exp({}^{\#}A, {}^{\#}B) = {}^{\#}\mathrm{Exp}(A, B).$$

Υπόδειξη: Αν $B_1 \sim B_2$ βρίσκω «μάρτυρα» $g : B_1 \to B_2$ με αντίστροφη $h : B_2 \to B_1$.

Δείξτε τώρα (θεωρώντας τον μάρτυρα $f \mapsto g \circ f$) ότι $B_1^A \sim B_2^A$.

Μετά χρειάζεται και «κάτι παρόμοιο» με A_1, A_2.

Μετά η άσκηση λύνεται με τον «συνήθη» τρόπο, δηλαδή:

Παίρνω $B_1 = B$, $B_2 = {}^{\#}B$, και παρόμοια για το A,

και χρησιμοποιώ τις «θεμελιώδεις ιδιότητες των πληθαρίθμων»

δηλαδή το πρώτο θεώρημα της ενότητας 21.

Θεώρημα: Για κάθε πληθικό αριθμό x:

1. $\exp(0, x) = 1$.
2. $\exp(1, x) = x$.
3. $\exp(2, x) = x \cdot x$.
4. $\exp(x, 2) = {}^{\#}\mathcal{P}(x)$.

Η απόδειξη είναι άσκηση

(είναι, ουσιαστικά, οι ασκήσεις 3,4,5,6 του φυλλαδίου ασκήσεων «Συμπληρωματικές Ασκήσεις Στις Διαλέξεις 1–5»).

Ασκ $1^x = 1$

Θεώρημα (Οι Νόμοι των Εκθετών):

Για κάθε πληθικούς αριθμούς x, y, z:

1. $z^{x+y} = z^x \cdot z^y$.

2. $(z^x)^y = z^{x \cdot y}$.

3. $(z \cdot y)^x = z^x \cdot y^x$.

Η απόδειξη, εν συντομία, είναι η εξής:

① Επιλέγω ξένα A, B τ.ω. $^{\#}A = x, {}^{\#}B = y$.

ΑΝΔΟ $\mathrm{Exp}(A, z) \times \mathrm{Exp}(B, z) \sim \mathrm{Exp}(A \cup B, z)$.

Ελέγχουμε ότι ένας «μάρτυρας», δεδομένης $f : A \cup B \to z$,

είναι ο εξής: $f \mapsto (f|_A, f|_B)$.

② Ο «μάρτυρας» στέλνει την $f : x \times y \to z$

στην $g : y \to Exp(x, z)$ που ορίζεται παρακάτω:

$\Big(g(t)\Big)(s) = f(s, t)$ (όπου $t \in y$ και $s \in x$).

$$g_t = g(t)$$

$$g_t(s) = f(s, t)$$

---

③ Αυτό είναι το πιο εύκολο:

Ο «μάρτυρας» στέλνει την $f : x \to z \times y$

στο διατεταγμένο ζεύγος (f_1, f_2)

όπου $f(s) = \Big(f_1(s), f_2(s)\Big)$.

Θεώρημα: Αν $x, y \in \omega$ τότε η δύναμη πληθικών αριθμών $\exp(x, y)$ ταυτίζεται με τη συνήθη δύναμη.

Απόδειξη: Προσωρινά, ας συμβολίζουμε με y^x τη συνήθη δύναμη

και με $\exp(x, y)$ την δύναμη πληθικών αριθμών.

Δεν έχουμε ορίσει ακόμα τη «συνήθη δύναμη»

αλλά είναι αναμενόμενο πως θα χρησιμοποιήσουμε την Αρχή Αναδρομής.

Με λεπτομέρειες, ορίζουμε το y^0 ως $y^0 = 1$

και το y^{x+1} ως $y^x \cdot y$.

Τώρα αρκεί να δείξουμε ότι και το $\exp(x, y)$ προκύπτει από τον ίδιο αναδρομικό τύπο.

Πράγματι, από προηγούμενα θεωρήματα,

$\exp(0, y) = 1$

και

$\exp(x + 1, y) = 1 = \exp(x, y) \cdot \exp(1, y) = \exp(x, y) \cdot y.\blacksquare$

Θεώρημα (Το Διαγώνιο Επιχείρημα του Cantor):

Για κάθε πληθικό αριθμό x ισχύει ότι $x < 2^x$.

$0, 1, 2, \ldots \ldots x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$

$\aleph_0 = x_0 \qquad x_{n+1} = 2^{x_n}$

$(x_0 \neq x_1)$