

Θεώρημα (Το Διαγώνιο Επιχείρημα του Cantor):

Για κάθε πληθικό αριθμό x ισχύει ότι $x < 2^x$.

Απ

① $x \leq 2^x$

έστω $s \in x$

ορίσω $g: x \rightarrow 2$

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν } s = t \\ 0 & \text{αλλιώς } \neq t \end{cases}$$

συμβ: $\hat{s} = g$

ορίσω $f: x \rightarrow \text{Exp}(x, 2)$

$$f(s) = \hat{s}$$

$$\boxed{16x} \quad n \quad f \in \text{Ira} \quad 1-1$$

$$\boxed{Am} \quad \in \sigma \tau \omega \quad f(s_1) = f(s_2)$$

$$\hat{s}_1 = \hat{s}_2$$

$$\hat{s}_1(t) = \hat{s}_2(t) \quad (\forall t \in x)$$

$$\forall t = s_1 \quad \text{exw:}$$

$$1 = \hat{s}_2(s_1)$$

$$\text{αρα } s_2 = s_1$$

$$\boxed{\text{Q.E.D.}} (16x)$$

αρα: $\exists$ "υαρτ" που $\exists \epsilon \epsilon$,

$$\#x \leq \#Exp(x, 2)$$

$$x \leq 2^x \quad \boxed{\text{true}}(0)$$

$$\textcircled{2} \quad x \neq 2^x \quad \text{AND } 0$$

$\exists$ "υαρτ" που $\exists \epsilon \epsilon$,

$$x \sim Exp(x, 2)$$

Έστω $h: X \rightarrow \text{Exp}(X, Z)$

Αν $\bigcirc$ h $\acute{o}\chi\iota$ $\epsilon\eta\acute{\iota}$

$\Sigma\cup\beta: \check{S} = h(S)$

ορίσω $u \in \text{Exp}(X, Z)$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \check{t}(t) = 1 \\ 1, & \check{t}(t) = 0 \end{cases}$$

άρα το u δεν ισούται με κανένα $\check{S}$

αφού $u(t) \neq \check{S}(t)$ όταν $t=5$

$\delta \geq \delta$ το u

δ εν είναι τιμή της h

$\square (2, \theta$

26. Πεπερασμένα Σύνολα

Λέμε το A είναι πεπερασμένο σύνολο και εννοούμε $\#A \in \omega$.

Ειδικότερα, οι πεπερασμένοι πληθικοί αριθμοί είναι οι φυσικοί αριθμοί.

Επίσης, το A είναι πεπερασμένο $\Leftrightarrow (\exists n \in \omega) A \sim n$.

Θεώρημα: Αν τα A, B είναι πεπερασμένα τότε το ίδιο ισχύει και για τα $\{0\} \times A \cup \{1\} \times B, A \times B, B^A, \mathcal{P}(A)$.

Η απόδειξη είναι καλή άσκηση.

Λέμε το A είναι άπειρο σύνολο και εννοούμε το A δεν είναι πεπερασμένο.

Ειδικότερα, οι άπειροι πληθικοί αριθμοί είναι αυτοί που δεν είναι φυσικοί αριθμοί, όπως το $\aleph_0$ για παράδειγμα.

Θεώρημα («πεπερασμένο < άπειρο»):

Έστω x, y πληθικοί αριθμοί με x πεπερασμένο και y άπειρο. Τότε $x < y$.

Ειδικότερα, το διαγώνιο επιχείρημα μας δίνει πολλούς άπειρους (πληθικούς) αριθμούς, όπως το $2^{\aleph_0}$ για παράδειγμα.

Απόδειξη: Ξέρω $y \notin \omega \ni x$. Άρα $x \neq y$. Άρα ΑΝΔΟ $x \leq y$.

Κάνω επαγωγή στο x . Η βάση της επαγωγής ισχύει αφού το $\emptyset$ είναι υποσύνολο κάθε συνόλου.

Έστω $x \in \omega$ με $x \leq y$ (αυτή είναι η επαγωγική υπόθεση).

Θεωρώ ένα «μάρτυρα» για το $x \leq y$. Δηλαδή θεωρώ μια ένα-προς-ένα συνάρτηση $f : x \rightarrow y$.

Την f την ταυτίζουμε, ως συνήθως, με μια ακολουθία $f_0, f_1, \dots, f_{x-1}$ στο y .

Παρατηρήστε ότι «ένα-προς-ένα» σημαίνει ακριβώς ότι όλοι οι όροι είναι διαφορετικοί.

Η f δεν είναι επί, αλλιώς θα ήταν «μάρτυρας» για το $x \sim y$, και τότε $\#x = \#y$, δηλαδή $x = y$, που δεν ισχύει.

Βρίσκω λοιπόν $a \in y$ που δεν είναι τιμή της f και ορίζω $g : x^+ \rightarrow y$ με $g_x = a$, αλλιώς $g_t = f_t$.

(Με άλλα λόγια, η g είναι «επέκταση» της f . Ισοδύναμα, η f είναι περιορισμός της g . Πιο συγκεκριμένα, $f = g|_x$.)

Αφήνω ως **άσκηση** ότι η g είναι ένα-προς-ένα. Δηλαδή $x^+ \leq y$, ολοκληρώνοντας το επαγωγικό βήμα και την απόδειξη.

Θεώρημα:

- ① Αν η $f : A \rightarrow B$ είναι ένα-προς-ένα και το B είναι πεπερασμένο τότε και το A είναι πεπερασμένο.
- ② Όλα τα υποσύνολα ενός πεπερασμένου συνόλου είναι πεπερασμένα.
- ③ Αν τα A, B είναι πεπερασμένα τότε το ίδιο ισχύει και για τα $A \cap B, A \cup B$.

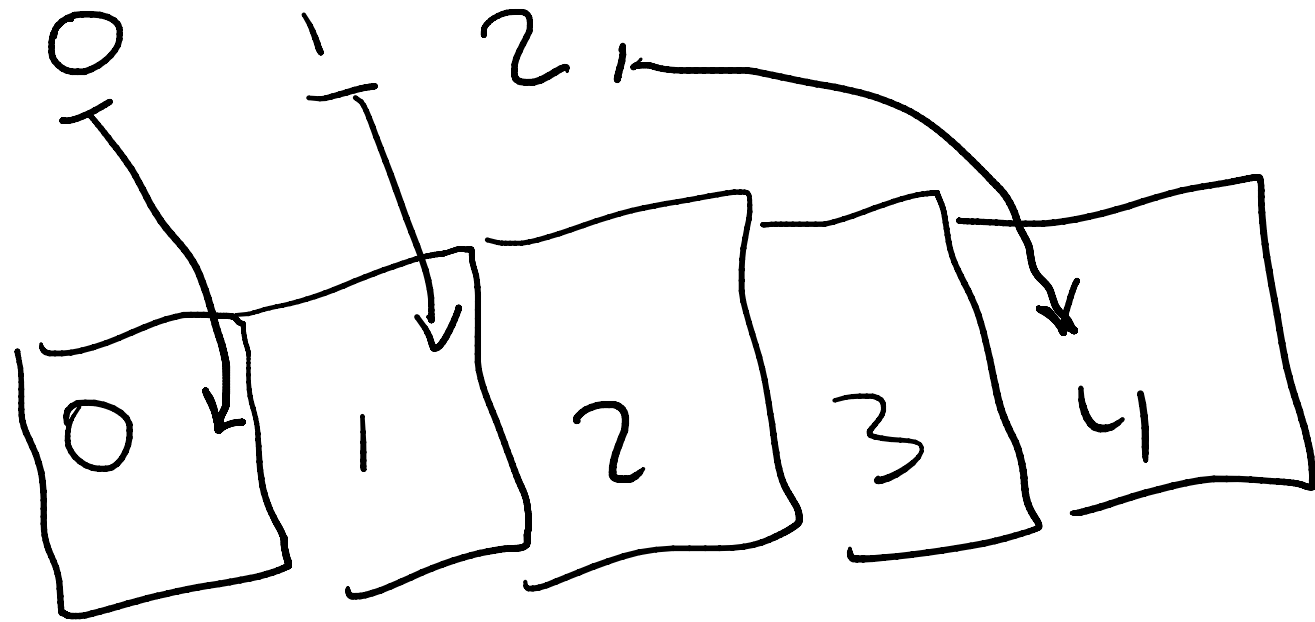
Η απόδειξη είναι καλή **άσκηση**. (Για το $A \cup B$, βρείτε ένα-προς-ένα $f : A \cup B \rightarrow \{0\} \times A \cup \{1\} \times B$.)

Λήμμα (Αρχή του Περιστεριώνα του Dirichlet):

Έστω ότι η f είναι συνάρτηση της μορφής $f : n \rightarrow n$, όπου $n \in \omega$.

Τότε η f είναι ένα-προς-ένα αν και μόνο αν είναι επί του n .

$$f(x) = x^2$$



1-1

οχι

στρίμωρα

ενι

≠

άδεια δωράκια

$n = \# n \in \lambda \alpha \gamma \alpha = \# \delta \omega \rho \acute{\alpha} \tau \alpha$

1-1 ($\Rightarrow$) ενι

$$\frac{\frac{An}{\quad} \quad 1-1 \Rightarrow \epsilon n!}{\quad} \quad \left(\text{πρ. ασκήσεων} \right)$$

$$\frac{\epsilon n! \Rightarrow 1-1}{\quad} \quad \frac{An \quad r : n \rightarrow n \quad \epsilon n!}{\quad} \quad \exists i : n \rightarrow n \quad r \circ i = I$$

$$\downarrow \quad i \quad 1-1$$

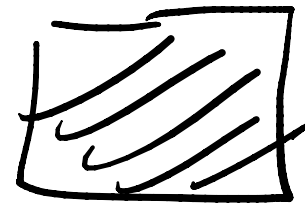
αρα $\epsilon n!$

· έχει αντίστροφη r'

$$\text{άρα } r' = r$$

$$i \circ r = I$$

άρα r είναι $1-1$



Θεώρημα («Γενικευμένη Αρχή του Περιστεριώνα»):

Έστω ότι η f είναι συνάρτηση της μορφής $f : A \rightarrow B$. Τότε:

① Αν $\#B < \#A$ τότε η f δεν είναι ένα-προς-ένα.

② Αν $\#A < \#B$ τότε η f δεν είναι επί του B .

③ Αν $\#A = \#B$ τότε η f είναι ένα-προς-ένα αν και μόνο αν είναι επί του B ,
υπό την προϋπόθεση ότι τα A, B είναι πεπερασμένα.

Την απόδειξη την αφήνω ως άσκηση.

Παρατηρήστε ότι στο ② χρειάζεται το αξίωμα επιλογής.

Υπόδειξη για το ③: Θεωρήστε την σύνθεση $n \xrightarrow{g} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{h} n$

όπου οι g, h είναι «μάρτυρες ισοπληθικότητας».

Σας θυμίζω ότι και οι επί και οι ένα-προς-ένα συναρτήσεις είναι κλειστές ως προς τη σύνθεση.

Σας θυμίζω επίσης ότι οι g^{-1}, h^{-1} υπάρχουν.

Ορολογία: Έστω A σύνολο.

Λέμε **το A είναι Dedekind-άπειρο** και εννοούμε ότι
υπάρχει γνήσιο υποσύνολο του A που είναι ισοπληθικό με το A .

Παράδειγμα: Έστω $A = \omega$. Έστω B το εξής (γνήσιο) υποσύνολο του A :
$$B = \{n \in A : n \neq 0\}.$$

Στην απόδειξη ότι $1 + \aleph_0 = \aleph_0$, είδαμε ότι $B \sim A$.

Άρα το A είναι Dedekind-άπειρο.

Ορολογία: Έστω A σύνολο.

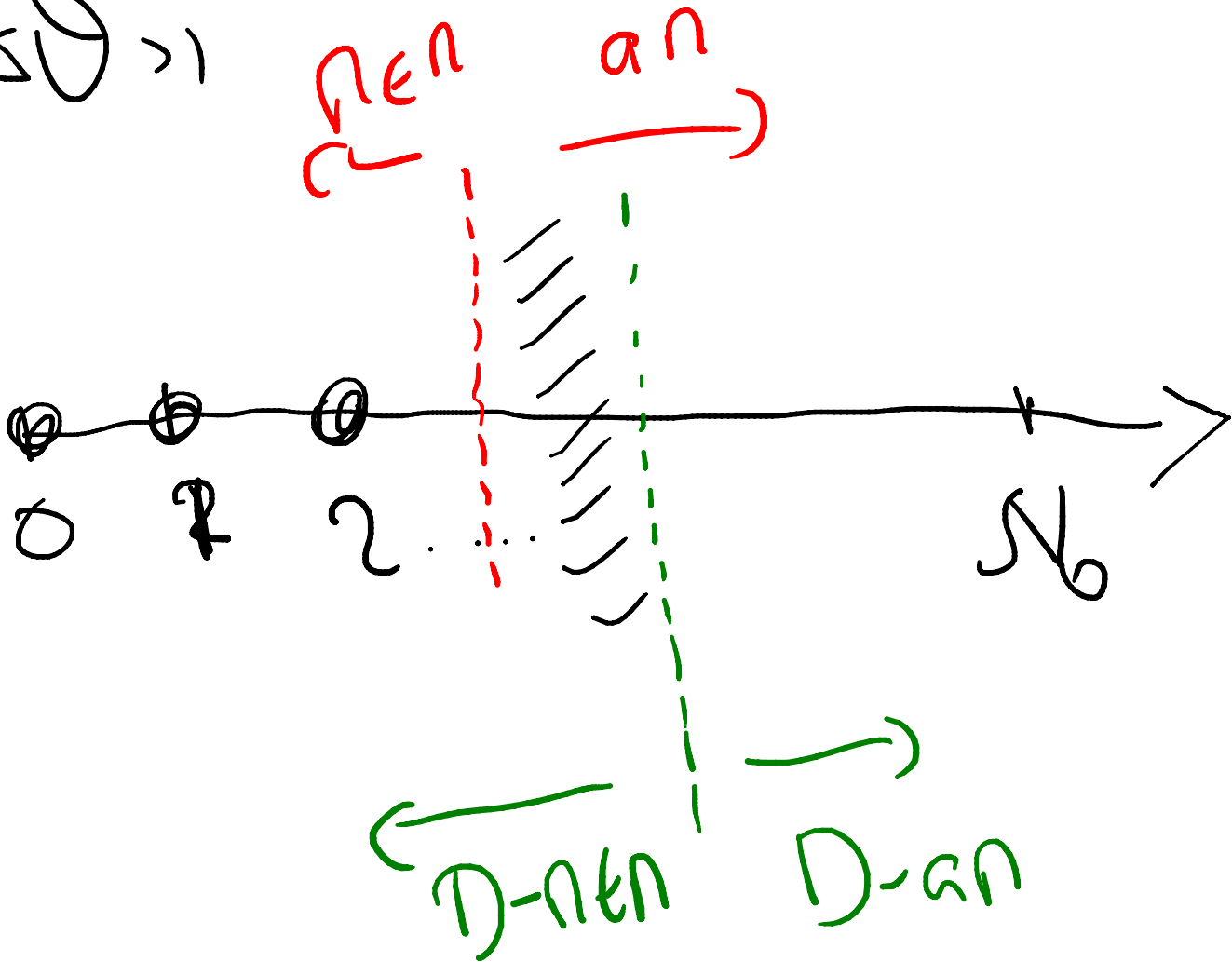
Λέμε **το A είναι Dedekind-πεπερασμένο** και εννοούμε ότι
το A δεν είναι Dedekind-άπειρο.

Θεώρημα: Έστω A πεπερασμένο. Τότε το A είναι Dedekind-πεπερασμένο.

Πριν αποδείξω το θεώρημα, δείτε μια ισοδύναμη διατύπωση:

Έστω A Dedekind-άπειρο. Τότε το A είναι άπειρο.

$\langle \text{διαίεθ} \rangle$



Απόδειξη του Θεωρήματος:

Έστω A πεπερασμένο.

Θα δείξω ότι το A είναι Dedekind-πεπερασμένο,

δηλαδή ότι δεν υπάρχει $B \subseteq A$ που να είναι και ισοπληθικό με το A και διάφορο του A .

Έστω λοιπόν $B \subseteq A$. Θεωρώ την ένα-προς-ένα $f : B \rightarrow A$ που ορίζεται με $f(x) = x$.

Έστω επίσης ότι $B \sim A$, δηλαδή ότι $\#B = \#A$.

Από την (Γενικευμένη) Αρχή του Περιστεριώνα, η f είναι επί του A .

Δηλαδή κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B .

Δηλαδή $A \subseteq B$, δηλαδή $A = B$.■

27. Αριθμήσιμα Σύνολα

Ορολογία: Έστω A σύνολο. Λέμε **το A είναι άπειρο αριθμήσιμο** και εννοούμε ότι
 $\#A = \aleph_0$.

Στο εξής, θα λέω απλώς «αριθμήσιμο» αντί για «άπειρο αριθμήσιμο».

Ένα σύνολο A είναι αριθμήσιμο ακριβώς όταν $\omega \sim A$.

Αν $a : \omega \rightarrow A$ είναι κάποιος «μάρτυρας ισοπληθικότητας», ειδικότερα είναι επί του A ,

άρα γράψαμε το A ως $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ δηλαδή ως το σύνολο των όρων της ακολουθίας a .

Η a είναι επίσης ένα-προς-ένα που σημαίνει ότι όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι διαφορετικοί.

Αυτά τα επιχειρήματα είναι αντιστρέψιμα, και δείχνουν ότι κάθε A που γράφεται έτσι είναι αριθμήσιμο.

Θεώρημα: Έστω B άπειρο. Τότε υπάρχει κάποιο αριθμήσιμο υποσύνολο A του B .

Δίνω παρακάτω μια αυστηρή απόδειξη. Δείτε όμως πρώτα το σκίτσο της απόδειξης:

Επειδή το B δεν είναι πεπερασμένο, δεν είναι κενό. Επιλέγω a_0 στο B .

Επειδή το B δεν είναι πεπερασμένο, $B \neq \{a_0\}$. Επιλέγω a_1 στο $B \setminus \{a_0\}$.

Επειδή το B δεν είναι πεπερασμένο, $B \neq \{a_0, a_1\}$. Επιλέγω a_2 στο $B \setminus \{a_0, a_1\}$.

Συνεχίζω έτσι. Παρατηρώ ότι όλοι οι όροι της ακολουθίας $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ είναι διαφορετικοί.

Τέλος, παίρνω $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$.

Συν είνονται αντί
χρειάζεται το A_3 . Εν. 2. !

Απόδειξη του Θεωρήματος:

Έστω $\mathcal{A} = \{C \subseteq B : C \neq \emptyset\}$.

Από το αξίωμα επιλογής, υπάρχει h που είναι συνάρτηση επιλογής για το $\mathcal{A}$.

Άρα, δεδομένου $C \subseteq B$ με $C \neq \emptyset$, το $h(C)$ είναι ένα στοιχείο του C .

Έστω $\mathcal{A}_{\text{πεπ}} = \{D \subseteq B : D \text{ πεπερασμένο}\}$.

Έστω $T : \mathcal{A}_{\text{πεπ}} \rightarrow \mathcal{A}_{\text{πεπ}}$ η συνάρτηση που ορίζεται με $T(D) = D \cup \{h(B \setminus D)\}$.

Εξηγώ: Το B είναι άπειρο

άρα το $C = B \setminus D$ είναι μη-κενό υποσύνολο του B

άρα το $h(C)$ ορίζεται

άρα η T είναι καλώς ορισμένη.

Θεωρώ την $f : \omega \rightarrow \mathcal{A}_{\text{πεπ}}$ που προκύπτει από τον εξής αναδρομικό ορισμό:

$$f(0) = \emptyset \quad f(n^+) = T(f(n)).$$

Ισχυρισμός 1: Η f είναι αύξουσα.

Απόδειξη Ισχυρισμού 1: ΑΝΔΟ $n \leq m \Rightarrow f(n) \subseteq f(m)$.

Ισοδύναμα, ΑΝΔΟ, δεδ. n και k στο ω , $f(n) \subseteq f(n+k)$.

Αυτό είναι εύκολη επαγωγή στο k , χρησιμοποιώντας ότι:

είναι προφανές αν $k = 0$, και

$$f(n+k+1) = T(f(n+k)) = \langle f(n+k) \text{ ένωση κάτι} \rangle$$

άρα το $f(n+k+1)$ είναι υπερσύνολο του $f(n+k)$ που, από την επαγωγική υπόθεση,

είναι υπερσύνολο του $f(n)$. ■(ισχ. 1)

Ορίζω $a : \omega \rightarrow B$ ως εξής: $a_n = h(B \setminus f(n))$.

Άρα $f(n^+) = f(n) \cup \{a_n\}$. Ειδικότερα $a_n \in f(n^+)$.

Ισχυρισμός 2: Η a είναι ένα-προς-ένα.

Απόδειξη Ισχυρισμού 2:

ΑΝΔΟ, δεδ. $n < m$ (άρα $n^+ \leq m$), ότι $a_n \neq a_m$.

Ξέρω ότι $a_n \in f(n^+)$, άρα ΑΝΔΟ $a_m \notin f(n^+)$.

Πράγματι, $a_m = h(B \setminus f(m))$

άρα $a_m \in B \setminus f(m)$

άρα $a_m \notin f(m)$

άρα $a_m \notin f(n^+)$ (αφού, από $n^+ \leq m$ και ισχ. 1, $f(n^+) \subseteq f(m)$). ■(ισχ. 2)

Ολοκλήρωση της απόδειξης: Έστω $A = a[\omega]$.

Άρα η $a : \omega \rightarrow A$ είναι 1-1 και επί, δηλαδή το A είναι αριθμήσιμο. ■

Θεώρημα: Το $\aleph_0$ είναι ο μικρότερος άπειρος πληθικός αριθμός.

Απόδειξη: Έστω x άπειρος πληθικός αριθμός. ΑΝΔΟ $\aleph_0 \leq x$.

Θεωρώ κάποιο αριθμήσιμο υποσύνολο A του x .

$A \subseteq x$ άρα $\#A \leq \#x$ δηλαδή $\aleph_0 \leq x$. ■

Θεώρημα: Έστω A άπειρο. Τότε το A είναι Dedekind-άπειρο.

Πριν αποδείξω το θεώρημα, το συνδυάζω με το τελευταίο θεώρημα της προηγούμενης ενότητας, και παρατηρώ ότι ένα σύνολο είναι Dedekind-άπειρο αν και μόνο αν είναι άπειρο.

Ισοδύναμα, ένα σύνολο είναι Dedekind-πεπερασμένο αν και μόνο αν είναι πεπερασμένο.

Απόδειξη του Θεωρήματος:

Θεωρώ ένα αριθμήσιμο υποσύνολο $A_1 = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ του A .

Ορίζω το A_2 ως $A_2 = A \setminus A_1$.

Άρα $A_1 \cup A_2 = A$ και $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Άρα $\#A = \#A_1 + \#A_2 = \aleph_0 + \#A_2$.

Ορίζω το B_1 ως $B_1 = \{a_1, a_2, \dots\}$.

Θεωρώντας την $b : \omega \rightarrow B_1$ με $b_n = a_{n+1}$, βλέπω ότι $\#B_1 = \aleph_0$.

Ορίζω το B ως $B = B_1 \cup A_2$.

Με άλλα λόγια, $A = \{a_0\} \cup B$, και $a_0 \notin B$, άρα το B είναι γνήσιο υποσύνολο του A .

Άρα, για να δείξω, ολοκληρώνοντας την απόδειξη, ότι το A είναι Dedekind-άπειρο,

$$\text{ANΔO } \#A = \#B.$$

Πράγματι, το B_1 , ως υποσύνολο του A_1 , είναι και αυτό ξένο με το A_2 ,

$$\text{άρα } \#B = \#B_1 + \#A_2 = \aleph_0 + \#A_2 = \#A. \quad \blacksquare$$