

28. Ο Πληθικός Αριθμός του $\mathbb{R}$

Στην ενότητα αυτή, $\mathbb{Z}_+ = \{n \in \mathbb{Z} : n > 0\}$ και $\mathbb{Z}_- = \{n \in \mathbb{Z} : n < 0\}$.

Θεώρημα:

① $\#\mathbb{Z}_+ = \aleph_0$.

② $\#\mathbb{Z} = \aleph_0$.

③ $\#\mathbb{Q} = \aleph_0$.

④ $\#\mathbb{R} = 2^{\aleph_0}$.

Απόδειξη του ①:

Έχουμε δει πολλές φορές ότι η $f : \omega \rightarrow \mathbb{Z}_+$ με $n \mapsto n + 1$ είναι ισομορφισμός. ■①

Απόδειξη του ②:

Η $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_-$ με $n \mapsto -n$ είναι ισομορφισμός άρα $\# \mathbb{Z}_- = \# \mathbb{Z}_+ = \aleph_0$.

Το $\mathbb{Z}$ είναι η ένωση των **ξένων** υποσυνόλων ω και $\mathbb{Z}_-$, άρα

$$\# \mathbb{Z} = \# \omega + \# \mathbb{Z}_- = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0. \quad \blacksquare \textcircled{2}$$

|

Απόδειξη του ③:

Θα δώσω μια απόδειξη χωρίς το αξίωμα επιλογής.

Θυμηθείτε $\mathbb{Z}^*$ είναι η ξένη ένωση των $\mathbb{Z}_+$ και $\mathbb{Z}_-$ άρα $\#\mathbb{Z}^* = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

Συμβολίζω με A το $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Άρα $\#A = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

Θεωρώ λοιπόν κάποιο ισομορφισμό $f : \omega \rightarrow A$.

Έχω και την $g : A \rightarrow \mathbb{Q}$ με $(m, n) \mapsto m/n$, που είναι επί.

Συμβολίζω με r την $g \circ f$, άρα $r : \omega \rightarrow \mathbb{Q}$ επί.

Τώρα κατασκευάζω δεξιά αντίστροφη i **χωρίς** το αξίωμα επιλογής,

θέτοντας $i(b) =$ το **ελάχιστο** από τα a με $r(a) = b$.

Άρα η $i : \mathbb{Q} \rightarrow \omega$ είναι ένα-προς-ένα, άρα $\#\mathbb{Q} \leq \aleph_0$.

Την αντίστροφη ανισότητα την αφήνω ως **άσκηση**. ■

Απόδειξη του ④: Θα γίνει σε δύο βήματα.

Βήμα 1: Θα δείξω την ανισότητα $2^{\aleph_0} \leq \#\mathbb{R}$.

Έστω $a \in \text{Exp}(\omega, 2)$.

Δηλαδή a είναι μια ακολουθία $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ με κάθε όρο a_n να παίρνει τιμές 0 ή 1.

Κάθε τέτοιο a καθορίζει τον πραγματικό αριθμό $\hat{a}$ που ορίζω ως εξής:

$\hat{a}$ είναι ο αριθμός $0, a_0 a_1 a_2 \dots$, όπου εννοώ αυτά είναι τα δεκαδικά ψηφία του $\hat{a}$.

Για παράδειγμα, αν $b = (1, 0, 0, 0, 0, \dots)$ τότε $\hat{b} = 1/10$.

Πιο διασκεδαστικό (προαιρετικό) παράδειγμα: αν

$c = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, \dots)$ (εννοώ: ένα παραπάνω μηδενικό κάθε φορά)

τότε (επειδή τα δεκαδικά ψηφία δεν επαναλαμβάνονται, ούτε καν τελικά) το $\hat{c}$ είναι άρρητος.

Έλέγχουμε ότι η $f : \text{Exp}(\omega, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ με $a \mapsto \hat{a}$ είναι ένα-προς-ένα,

άρα $\#\text{Exp}(\omega, 2) \leq \#\mathbb{R}$, δηλαδή $2^{\aleph_0} \leq \#\mathbb{R}$. ■(βήμα 1)

Βήμα 2: Θα δείξω την ανισότητα $\#\mathbb{R} \leq 2^{\aleph_0}$.

Συμβολίζω με A το $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

Άρα $\#A = 2^{\#\mathbb{Q}} = 2^{\aleph_0}$.

Αν $t \in \mathbb{R}$, συμβολίζω με $\check{t}$ το εξής στοιχείο του A :

$$\check{t} = \{u \in \mathbb{Q} : u < t\}$$

Άρα αρκεί να δείξω ότι η $f : \mathbb{R} \rightarrow A$ με $t \mapsto \check{t}$ είναι ένα-προς-ένα.

Πράγματι, αν $t_1 < t_2$, θεωρώ ρητό u με $t_1 < u < t_2$.

Άρα $\check{t}_2 \ni u \notin \check{t}_1$, άρα $\check{t}_1 \neq \check{t}_2$. ■(βήμα 2, ④, θεώρημα)

$$t_1 \neq t_2$$

$$\leadsto \Delta \emptyset$$

$$f(t_1) \neq f(t_2)$$

Ιστορικό Σχόλιο:

Ένα περίφημο πρόβλημα της Θεωρίας Συνόλων είναι η «Υπόθεση του Συνεχούς»

(στα αγγλικά, Continuum Hypothesis ή CH):

Λέει (υποθέτοντας το Αξίωμα Επιλογής) ότι

ο πληθικός αριθμός του $\mathbb{R}$ είναι ο «δεύτερος μικρότερος» άπειρος πληθικός αριθμός.

Η διατύπωση της CH που είναι ανεξάρτητη από το αν δεχτούμε το Αξίωμα Επιλογής είναι:

Δεν υπάρχει πληθικός αριθμός x τέτοιος ώστε $\aleph_0 < x < 2^{\aleph_0}$.

Η «λύση» της CH είναι πολύ παρόμοια με την «λύση» του Αξιώματος Επιλογής:

Ο Gödel, τη δεκαετία του 30, απέδειξε ότι η CH «δεν οδηγεί σε άτοπο» (αν την δεχτούμε ως αξίωμα).

Ο Paul Cohen, τη δεκαετία του 60, απέδειξε ότι η CH «δεν αποδεικνύεται».

$\aleph_0 \quad 1 \quad 2 \quad \dots \quad \aleph_0 \quad 2^{\aleph_0}$

29. Καλώς Διατεταγμένα Σύνολα

Νέες Συντομογραφίες σε αυτή την ενότητα:

$\Delta\Sigma$ Διατεταγμένο Σύνολο

$\text{Ο}\Delta\Sigma$ Ολικά Διατεταγμένο Σύνολο

$\text{Κ}\Delta\Sigma$ Καλώς Διατεταγμένο Σύνολο

Κρατάμε σταθερό ένα σύνολο A .

Αν R είναι σύνολο, λέμε **το R είναι σχέση στο A** και εννοούμε ότι $R \subseteq A \times A$.

Κρατάμε σταθερή μια σχέση R στο A .

Ο συμβολισμός **xRy** θα σημαίνει $(x, y) \in R$. (Ειδικότερα, $x, y \in A$.)

Παράδειγμα: Έστω $A = 2$ και $R = \{(0, 0), (1, 1)\}$.

Άρα οι προτάσεις $0R0$ και $1R1$ είναι αληθείς, ενώ οι προτάσεις $0R1$ και $1R0$ είναι ψευδείς.

Παρατηρήστε ότι και οι προτάσεις $0 = 0$ και $1 = 1$ είναι αληθείς, ενώ οι προτάσεις $0 = 1$ και $1 = 0$ είναι ψευδείς.

Με άλλα λόγια, είτε πω « xRy » είτε πω « $x = y$ », δεν κάνει διαφορά (εννοώ: $\forall x, y \in A$).

Με άλλα λόγια, είτε πω « R » είτε πω « $=$ », δεν κάνει διαφορά (αν ενδιαφέρομαι μόνο για σχέσεις στο A).

Με άλλα λόγια, η σχέση R είναι η σχέση $=$ (όπου λέγοντας «σχέση» εννοώ «σχέση στο A »).

Αυτό το παράδειγμα εξηγεί πως «κωδικοποιώ» τις σχέσεις ως σύνολα.

Για να βεβαιωθείτε ότι το καταλαβαίνετε, ιδού «λυμένες ασκήσεις»:

Με ίδιο A , ποια σχέση είναι η $S = \{(0, 1)\}$; (απάντηση: η $<$). Η $R \cup S$; (απάντηση: η $\leq$). ■(παραδ.)

Η παρακάτω λίστα αποτελείται από δύο στήλες.

Στη δεύτερη στήλη βλέπετε μια ιδιότητα που ίσως έχει η R ($\forall x, y, z \in A$).

Στην πρώτη στήλη βλέπετε πως ονομάζονται οι σχέσεις που έχουν την αντίστοιχη ιδιότητα ($\forall x, y, z \in A$):

ανακλαστική xRx

συμμετρική $xRy \Rightarrow yRx$

αντισυμμετρική $(xRy \text{ και } yRx) \Rightarrow x = y$

μεταβατική $(xRy \text{ και } yRz) \Rightarrow xRz$

ανανακλαστική $\Delta\text{IO } xRx$

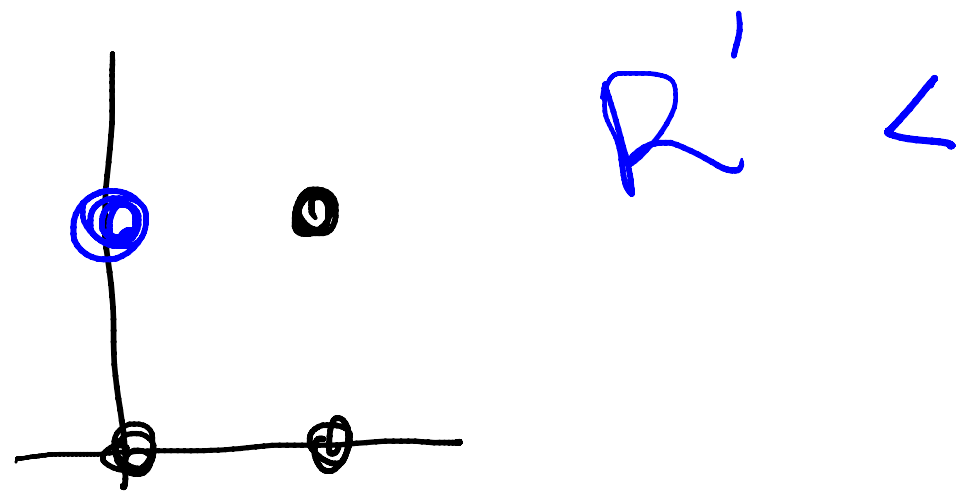
ασυμμετρική $xRy \Rightarrow \Delta\text{IO } yRx$

Άσκηση: Έστω S η σχέση της ισότητας στο A . ΝΔΟ:

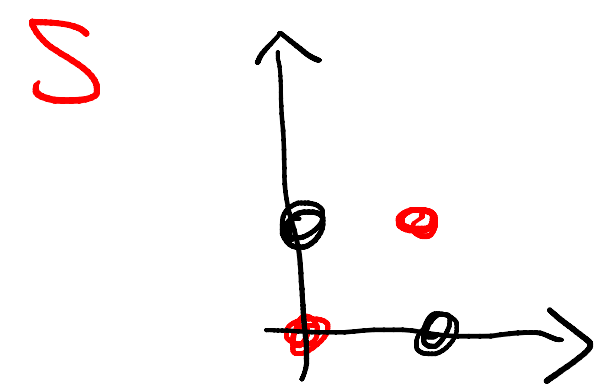
- ① Η R είναι ανακλαστική $\Leftrightarrow S \subseteq R$.
- ② Η R είναι ανανακλαστική $\Leftrightarrow S \cap R = \emptyset$.

Έστω B το σύνολο όλων των ανακλαστικών σχέσεων στο A .
Έστω C το σύνολο όλων των ανανακλαστικών σχέσεων στο A .

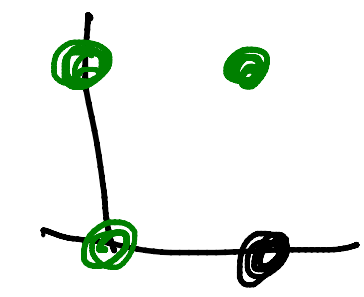
Τότε η «γνησιοποίηση» $f : B \rightarrow C$ με $P \mapsto P \setminus S$
και η «ασθενοποίηση» $g : C \rightarrow B$ με $Q \mapsto Q \cup S$ είναι αντίστροφες συναρτήσεις.



$\pi. x. \quad A = 2$



$R \leq$



Παρατηρήστε ότι κάθε ασυμμετρική σχέση είναι ανανακλαστική.

Επίσης, κάθε ανανακλαστική και μεταβατική σχέση είναι ασυμμετρική.

Τέτοιες σχέσεις ονομάζονται **γνήσιες διατάξεις**.

(Λέγοντας «διάταξη» πάντα θα εννοώ «όχι απαραίτητα ολική διάταξη» (με άλλα λόγια, «μερική διάταξη»)).

Λέμε **R είναι ασθενής διάταξη** και εννοούμε **R είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική, και μεταβατική**.

(Παρεμπιπτόντως, ήδη ξέρουμε τι σημαίνει η φράση **R είναι σχέση ισοδυναμίας**:
σημαίνει ότι **R είναι ανακλαστική, συμμετρική, και μεταβατική**.)

Παρατηρήστε ότι η γνησιοποίηση μιας ασθενούς διάταξης είναι γνήσια διάταξη και ότι η ασθενοποίηση μιας γνήσιας διάταξης είναι ασθενής διάταξη.

Για τις γνωστές μας διατάξεις, αυτές είναι οι προφανείς έννοιες.

Δηλαδή η γνησιοποίηση κάποιας σχέσης $\leq$ (π.χ., αν $A = \omega$, ή αν $A = \mathbb{R}$) είναι η αντίστοιχη $<$, και η γνησιοποίηση κάποιας σχέσης $\subseteq$ (π.χ., αν $A = \mathcal{P}(2)$) είναι η αντίστοιχη $\subset$.

Η ασθενοποίηση «δουλεύει ανάποδα», δηλαδή η ασθενοποίηση κάποιας σχέσης $<$ είναι η αντίστοιχη $\leq$, και η ασθενοποίηση κάποιας σχέσης $\subset$ είναι η αντίστοιχη $\subseteq$.

Η γνησιοποίηση P και η ασθενοποίηση Q καθορίζουν η μια την άλλη με τον «γνωστό» τρόπο, δηλαδή

$xPy \iff (xQy \text{ και } x \neq y)$ και

$xQy \iff (xPy \text{ ή } x = y)$

$$Q \setminus S = P$$
$$P \cup S = Q$$

Λέμε το (A, R) είναι διατεταγμένο σύνολο και εννοούμε ότι
το A είναι σύνολο και η R είναι ασθενής διάταξη στο A .

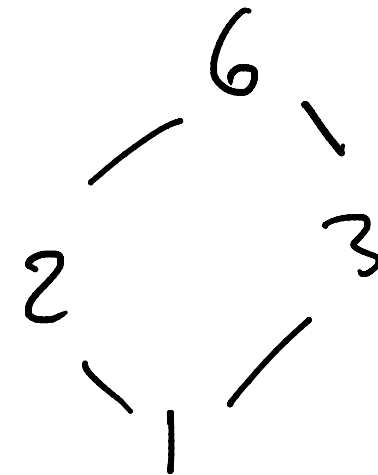
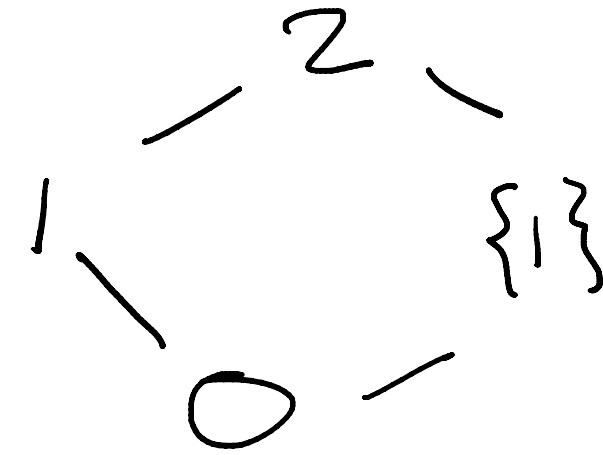
Παραδ ① $A_1 = \mathcal{P}(2)$

$x R_1 y \quad x \subseteq y$

② $A_2 = \{1, 2, 3, 6\}$

$x R_2 y \quad x | y$

Hasse



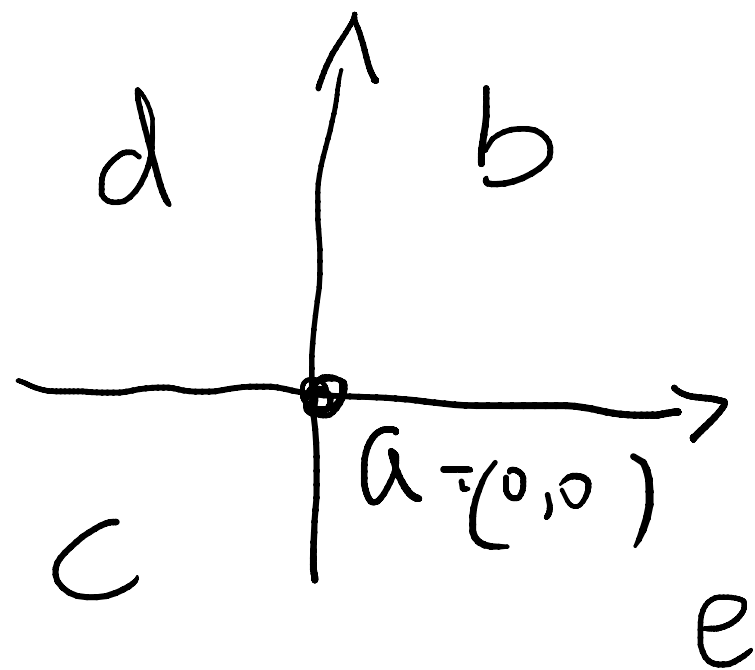
$$\textcircled{3} \quad A_3 = \{1, 2, 3, 6\}$$

$$xR_3 y \quad x \leq y$$

$$\begin{array}{c} 6 \\ / \\ 3 \\ / \\ 2 \\ / \\ 1 \end{array}$$

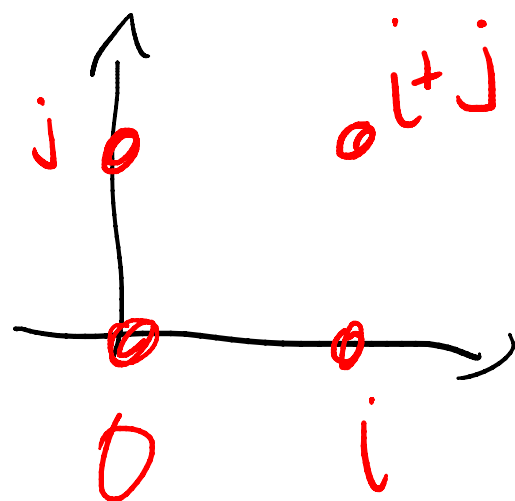
$$\textcircled{4} \quad B = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$a R' b \quad \begin{cases} a_1 \leq b_1, \\ a_2 \leq b_2 \end{cases}$$



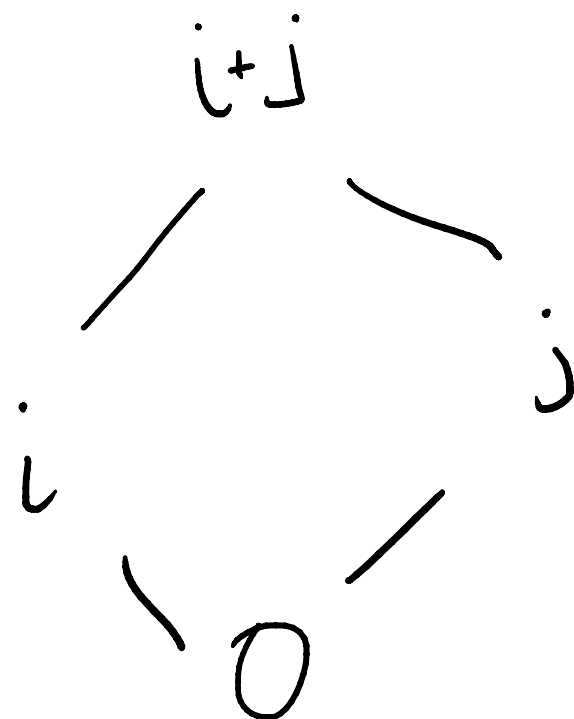
$$\begin{aligned} a &\leq b \\ c &\leq a \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} b \\ | \\ a \\ | \\ c \end{array} \quad d \quad e$$



$$A_4 = \{0, i, j, i+j\}$$

R_4 "idia" τω B



Στην πράξη, τον συμβολισμό για $\Delta\Sigma$ τον απλοποιούμε, ως εξής:

Αντί να πούμε «το (A, R) είναι $\Delta\Sigma$ » λέμε απλώς «το A είναι $\Delta\Sigma$ ».

Επίσης, αν πω «το A είναι $\Delta\Sigma$ », την (ασθενή) διάταξη στο A την συμβολίζω είτε με $\leq_A$, είτε, ακόμα πιο απλά, με $\leq$.

Την αντίστοιχη γνήσια διάταξη τη συμβολίζω αναλόγως, δηλαδή είτε με $<_A$ είτε με $<$.