Κρατάμε σταθερό ένα ΔΣ A, του οποίου τη διάταξη την συμβολίζουμε με $\leq$ και την αντίστοιχη γνήσια διάταξη με $<$.

Θεώρημα: Αν $x, y, z \in A$ τότε: ① $x < y \leq z \Rightarrow x < z$. ② $x \leq y < z \Rightarrow x < z$.

Η απόδειξη είναι εύκολη άσκηση.

Λέμε ότι η διάταξη του A είναι ολική και εννοούμε ότι

$$(\forall x, y \in A) \quad x \leq y \text{ ή } y \leq x.$$

Λέμε το A είναι ολικά διατεταγμένο σύνολο και εννοούμε ότι

$$\text{το } A \text{ είναι ΔΣ και η διάταξη στο } A \text{ είναι ολική.}$$

Είναι εύκολη άσκηση να δείξετε ότι ΤΑΕΙ:

① Το A είναι ΟΔΣ.

② Ο νόμος της τριχοτομίας ισχύει για την $<$, δηλαδή

$$(\forall x, y \in A) \quad x < y \text{ ή } y < x \text{ ή } x = y.$$

Θεωρώ κάποιο υποσύνολο B του A.

Λέμε το x είναι το ελάχιστο στοιχείο του B

$$\text{και εννοούμε} \quad \text{ότι} \begin{cases} & x \in B \\ \text{και} & (\forall y \in B) \quad x \leq y \end{cases}$$

Είναι εύκολη άσκηση ότι, αν υπάρχει ελάχιστο στοιχείο του B

τότε είναι μοναδικό. Το συμβολίζουμε με $\min B$.

Θεώρημα: Έστω A κάποιο ΟΔΣ. Τότε

κάθε πεπερασμένο μη-κενό υποσύνολο του A έχει ελάχιστο στοιχείο.

Απόδειξη: Επαναδιατυπώνω το θεώρημα:

$(\forall n \in \omega)(\forall B \subseteq A) \quad {}^{\#}B = n \Rightarrow \Big(B = \varnothing \text{ ή } (\exists x) x = \min B\Big).$

Το δείχνω με επαγωγή στο n. Η βάση της επαγωγής είναι προφανής, επειδή αν ${}^{\#}B = 0$ τότε $B = \varnothing$.

Η επαγωγική υπόθεση είναι:

Έστω n κάποιος φυσικός αριθμός τέτοιος ώστε κάθε μη-κενό υποσύνολο με n στοιχεία έχει ελάχιστο στοιχείο.

Απομένει το επαγωγικό βήμα. Έστω λοιπόν B κάποιο υποσύνολο του A με ${}^{\#}B = n+1$.

Επειδή $n+1 \neq 0$, ξέρω $B \neq \varnothing$. Άρα μπορώ να θεωρήσω κάποιο $a \in B$.

Έστω $B' = \{x \in B : x \neq a\}$. Άρα ${}^{\#}B' = n$ (άσκηση: αποδείξτε το αυστηρά).

Αν $B' = \varnothing$, τότε $B = \{a\}$ άρα a είναι το ζητούμενο ελάχιστο στοιχείο.

Απομένει η περίπτωση $B' \neq \varnothing$. Από επαγωγική υπόθεση, υπάρχει το $x' = \min B'$.

Από ολικότητα της διάταξης έχω δυο περιπτώσεις, $x' \leq a$ και $a \leq x'$.

Αφήνω ως εύκολη άσκηση ότι στην πρώτη περίπτωση $x' = \min B$ και στην δεύτερη $a = \min B$. ■

Παρόμοια με το ελάχιστο στοιχείο, μπορούμε να θεωρήσουμε και το μέγιστο στοιχείο.

Αφήνω ως άσκηση να διατυπώσετε τον αντίστοιχο ορισμό και τα αντίστοιχα αποτελέσματα.

Σημειώνω μόνο ότι το μέγιστο στοιχείο του B (αν υπάρχει) συμβολίζεται με $\max B$.

Ορολογία: Λέμε το A είναι καλώς διατεταγμένο σύνολο και εννοούμε

κάθε μη-κενό υποσύνολο του A έχει ελάχιστο στοιχείο.

Θεώρημα: Κάθε ΚΔΣ είναι ΟΔΣ

Πράγματι, αν $\min(\{x, y\}) = x$ τότε $x \leq y$,

αλλοιώς το $\min(\{x, y\})$ αναγκαστικά είναι το y, δηλαδή $y \leq x$.

Θεώρημα: Κάθε πεπερασμένο ΟΔΣ είναι ΚΔΣ.

Πράγματι, κάθε υποσύνολο πεπερασμένου είναι πεπερασμένο,

είναι και υποσύνολο ΟΔΣ, άρα (αν είναι μη-κενό) έχει min.

Συμφωνία (ισχύει για όλες τις επόμενες διαλέξεις):

Αν θεωρήσω κάποιο υποσύνολο B του A ως ΔΣ,

θα εννοώ ότι η διάταξη του B είναι αυτή που «κληρονομεί» από το A.

Θεώρημα: Έστω B υποσύνολο κάποιου ΚΔΣ A. Τότε και το B είναι ΚΔΣ.

Πράγματι, αν C είναι μη-κενό υποσύνολο του B,

τότε είναι μη-κενό υποσύνολο του ΚΔΣ A, άρα έχει min.

Όμως το min στο A είναι και min στο B, επειδή κάναμε την παραπάνω συμφωνία.

Συμφωνία (ισχύει για όλες τις επόμενες διαλέξεις):
Αν το ΔΣ A είναι υποσύνολο ή του $\mathbb{R}$ ή του ω, τότε, εκτός αν πω ρητά το αντίθετο, εννοώ ότι η διάταξη του A είναι η συνήθης.

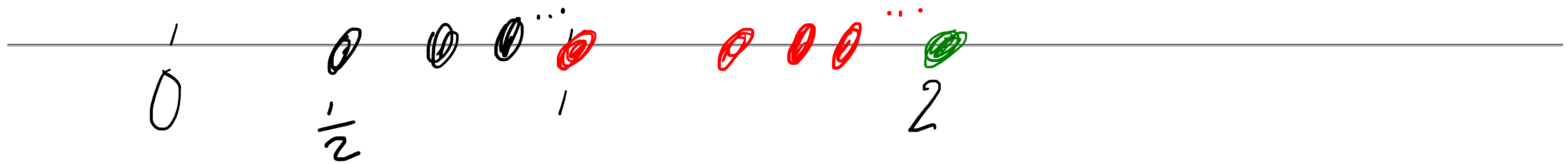
Παράδειγμα: Αν το ΔΣ A είναι κάποιο από τα $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{-}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, [0,1], [0,1] \cap \mathbb{Q}$, τότε (παρ' όλο που είναι ΟΔΣ) δεν είναι ΚΔΣ.

<u>Παράδειγμα:</u> Και το A_1, και το A_2, και το A_3 (βλ. παρακάτω) είναι ΚΔΣ:

$A_1 = \{x \in \mathbb{R} : (\exists n \in \omega) \quad x = 1 - 1/(n+2)\}$

$A_2 = A_1 \cup \{1\}$

$A_3 = A_2 \cup T[A_2]$ όπου $T(x) = x + 1$.



Άσκηση: Έστω A ΟΔΣ. ΝΔΟ ΤΑΕΙ:

① Το A είναι ΚΔΣ.

② Δεν υπάρχει ακολουθία $a : \omega \to A$ που είναι γνησίως φθίνουσα (δηλαδή $a_0 > a_1 > a_2 > \cdots$).

Υπόδειξη: Η μια κατεύθυνση είναι πιο δύσκολη και χρειάζεται το αξίωμα επιλογής
(όταν το λέω αυτό, απλώς εννοώ ότι τα υπόλοιπα αξιώματά μας δεν αρκούν).
(Παρεμπιπτόντως: Για τα αξιώματά μας χρησιμοποιούμε τη συντομογραφία ZFC
(αξιώματα των Zermelo-Fraenkel μαζί με το Axiom of Choice)
εκτός αν θέλουμε να εξαιρέσουμε το αξίωμα επιλογής,
οπότε τότε η συντομογραφία θα είναι ZF.
Έτσι, αυτό που λέω παραπάνω είναι ότι για τη μια κατεύθυνση αρκούν τα αξιώματα ZF
αλλά για την άλλη όχι.)
Αν απλώς θέλετε να δώσετε την απόδειξη με το συνήθη τρόπο που δίνουμε αποδείξεις στα μαθηματικά,
τότε εντάξει, η άσκηση παραμένει καλή άσκηση.
Αν πάλι αισθάνεστε «δυνατός λύτης», και στοχεύετε σε «αυστηρή απόδειξη»,
(τότε σας προειδοποιώ η επόμενη σελίδα είναι «spoiler»)

τότε έξτρα υπόδειξη είναι (spoiler alert!) να επιλέξετε στοιχείο από κάθε μη-κενό υποσύνολο που δεν έχει min.

30. Αρχικά Τμήματα

Κρατάμε σταθερό ένα ΟΔΣ A. Αν υπάρχει το το ελάχιστο στοιχείο του A τότε το συμβολίζουμε με 0_A.

Νέες Συντομογραφίες σε αυτή την ενότητα:

$\mathrm{AT}(B)$	Το B είναι αρχικό τμήμα του A
$\Gamma\mathrm{AT}(B)$	Το B είναι γνήσιο αρχικό τμήμα του A

Ορολογία: Έστω $B \subseteq A$. Λέμε $\mathrm{AT}(B)$ και εννοούμε: Αν $z \in A$ και $y \in B$ και $z \leq y$ τότε $z \in B$.

z

Το νόημα της φράσης «$\mathrm{AT}(B)$» μπορούμε να το σκεφτόμαστε με δυο (παρόμοιους) τρόπους:

το B είναι «κλειστό ως προς προηγούμενα στοιχεία»

(ή: το B είναι «κλειστό ως προς μικρότερα στοιχεία»)

το B «απορροφά» προηγούμενα (ή: μικρότερα) στοιχεία

Παραδείγματα:

① $B = \varnothing$.

② $B = A$ (το λεγόμενο μη-γνήσιο αρχικό τμήμα του A)

③ Αν $A = \omega$ τα αρχικά τμήματα είναι ακριβώς οι φυσικοί αριθμοί (και (βλ. ②) το ίδιο το ω).

Άσκηση: ΝΔΟ $\quad (\forall x \in A) \quad \mathrm{AT}(\{x\}) \quad \Leftrightarrow \quad$ υπάρχει το 0_A και ισούται με x.

Άσκηση: Ποιά είναι τα αρχικά τμήματα του $\mathbb{R}$; Γιατί;

(Αν μπορείτε να τη λύσετε χωρίς να διαβάσετε παρακάτω, μπράβο σας!

Στην επόμενη σελίδα είναι ένα spoiler που δίνει τη μισή λύση,

και στην μεθεπόμενη ενότητα άλλο ένα που δίνει την άλλη μισή.

Όσο για την απόδειξη (spoiler alert!), πληρότητα.)

Ορολογία: Λέμε $\mathrm{\Gamma AT}(B)$ και εννοούμε: $\quad \mathrm{AT}(B)$ και $B \neq A$.

Ορισμός (της αντιστοιχίας που αντιστοιχεί το x στο A_x):

Δεδομένου στοιχείο x του A, ορίζω το γνήσιο αρχικό τμήμα A_x που αντιστοιχεί στο x ως εξής:

$$A_x = \{y \in A : y < x\}.$$

Λήμμα (η αντιστοιχία είναι καλώς ορισμένη):

Το A_x είναι πράγματι γνήσιο αρχικό τμήμα του A.

Απόδειξη: Είναι εύκολη άσκηση.

Λήμμα (η αντιστοιχία διατηρεί τη διάταξη):

$(\forall x, y \in A) \quad x \leq y \quad \Rightarrow \quad A_x \subseteq A_y.$

Απόδειξη: Είναι εύκολη άσκηση.

Λήμμα: Η αντιστοιχία είναι ένα-προς-ένα.

Απόδειξη: Αν $x \neq y$ (ας πούμε $x < y$), τότε $A_y \ni x \notin A_x$, άρα $A_x \neq A_y$.

Θεώρημα (η αντιστοιχία διατηρεί και «ανιχνεύει» τη διάταξη):

$(\forall x, y \in A) \quad x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad A_x \subseteq A_y.$

Απόδειξη: Το προ-προηγούμενο λήμμα είναι το «διατηρεί»

(αν, συγκρίνοντας τα x, y βρω ότι το x είναι το μικρό και το y είναι το μεγάλο,

τότε αυτό διατηρείται αν περάσω στα αντίστοιχα αρχικά τμήματα).

Απομένει να δείξω ότι, αντιστρόφως, μπορώ να «ανιχνεύσω» τη διάταξη των x, y

από την διάταξη των αντιστοίχων αρχικών τμημάτων.

Έστω λοιπόν $x, y \in A$ τέτοια ώστε $A_x \subseteq A_y$. ΘΝΔΟ $x \leq y$.

Με άτοπο, έστω λοιπόν $y < x$. Άρα $y \leq x$. Άρα $A_y \subseteq A_x$. Άρα $A_x = A_y$.

Επειδή η αντιστοιχία είναι ένα-προς-ένα, έχω $x = y$,

που είναι άτοπο από την «χρωματιστή ανισότητα» στην προ-προηγούμενη γραμμή. $\blacksquare$

Θεώρημα (για ΚΔΣ η αντιστοιχία είναι ένα-προς-ένα και επί):

Υποθέστε ότι το A είναι (όχι απλώς ΟΔΣ αλλά) ΚΔΣ.

Τότε κάθε στοιχείο x του A καθορίζει, και καθορίζεται από, ένα μοναδικό γνήσιο αρχικό τμήμα B του A.

Οι αντίστροφες αντιστοιχίες είναι $B = A_x$ και $x = \min(A \backslash B)$.

Απόδειξη: Σε δύο βήματα.

Βήμα 1: Έστω ότι ΓΑΤ(B).

Άρα το $A \backslash B$ είναι μη-κενό (επειδή έχουμε γνήσιο υποσύνολο).

Άρα το $x = \min(A \backslash B)$ υπάρχει (επειδή έχουμε ΚΔΣ).

Ισχυρισμός: $A_x \subseteq B$.

Πράγματι, αν $y \in A_x$, τότε $y < x$,

άρα το y δεν μπορεί να ζει στο $A \backslash B$ που έχει min το x.

Αφού $y \in A$ αλλά $y \notin A \backslash B$, αναγκαστικά $y \in B$. $\blacksquare$(ισχ.)

Θα ολοκληρώσω τώρα το Βήμα 1, δείχνοντας την ισότητα $B = A_x$.

Απομένει η ανισότητα $B \subseteq A_x$, έστω λοιπόν $y \in B$.

Επειδή κάθε ελάχιστο στοιχείο ενός συνόλου ειδικότερα είναι στοιχείο του συνόλου,

ξέρουμε ότι $x \in A \backslash B$. Άρα $x \notin B$.

Άρα το y δεν μπορεί να είναι $\geq$ του x,

αφού τότε το x θα «απορροφόταν» από το αρχικό τμήμα B ως μικρότερο του $y \in B$.

(ή: το «$z \in A$ και $y \in B$ και $z \leq y$ τότε $z \in B$» ισχύει $\forall z$ άρα και για $z = x$).

Είδαμε ότι ΔΙΟ $y \geq x$, δηλαδή $y < x$, δηλαδή $y \in A_x$. ■(βήμα 1)

Θα ολοκληρώσω τώρα την απόδειξη.

Γνωρίζω από προηγούμενο λήμμα ότι η αντιστοιχία $x \mapsto A_x$ είναι ένα-προς-ένα.

Γνωρίζω όμως από το βήμα 1 ότι είναι και επί.

(Στο βήμα 1 έγραψα το B ως $B = A_x$.)

Άρα η αντιστοιχία $x \mapsto A_x$ είναι αντιστρέψιμη,

και η αντίστροφη αντιστοίχία, από το βήμα 1 πάλι, είναι αυτή που λέει το Θεώρημα.

Με άλλα λόγια: Αν η f^{-1} υπάρχει (δηλαδή, αν η f είναι ένα-προς-ένα και επί)

και αν $B = f(x)$

τότε $x = f^{-1}(B)$.

Εδώ το $f(x)$ είναι το A_x

και στο βήμα 1 βρήκαμε x τέτοιο ώστε $B = f(x)$,

ήταν το $x = \min(A \backslash B)$. $\quad \blacksquare$(Θ)

31. Το Αξίωμα της Θεμελίωσης

Έφτασε η ώρα για το προτελευταίο αξίωμα.

(Υπομονή όμως για το τελευταίο, μέχρι την τελευταία διάλεξη.)

Αξίωμα της Θεμελίωσης:

Κάθε μη-κενο σύνολο y περιέχει στοιχείο x ξένο με το y.

Εμείς θα χρειαστούμε μόνο μια φορά αυτό το αξίωμα:

Θεώρημα: Κανένα σύνολο δεν ανήκει στον εαυτό του.

Απόδειξη: Έστω A σύνολο. ΘΝΔΟ $A \notin A$.

Με άτοπο, έστω λοιπόν ότι $A \in A$. Έστω $y = \{A\}$.

Θεωρώ $x \in y$ με $y \cap x = \varnothing$. (Το Αξίωμα της Θεμελίωσης μου το επιτρέπει αυτό.)

Ξέρω $x \in y = \{A\}$, δηλαδή $x = A$.

Άρα, αφού αφ'ενός πάντα $A \in \{A\}$, και αφ'ετέρου υποθέσαμε ότι $A \in A$,

το συμπέρασμα είναι ότι $A \in y \cap x = \varnothing$, άτοπο. $\blacksquare$

<u>32. Επόμενα Στοιχεία</u>

Κρατώ σταθερό ένα ΚΔΣ A, του οποίου τη διάταξη συμβολίζω με $\leq$, αλλά και, προσωρινά, με R.

Σας θυμίζω το επόμενο σύνολο A^+. Ξέρουμε $A^+ = A \cup \{A\}$.

Σκέφτομαι τα στοιχεία x του A^+ σαν τα «παλιά» στοιχεία (τα $x \in A$),

μαζί με ένα «καινούριο» στοιχείο (το $x = A$).

Ξέρουμε επίσης ότι $A \notin A$ (το A δεν είναι «παλιό»).

Αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε μια διάταξη S στο A^+ ως

$S = R \cup (A^+ \times \{A\})$.

Η S καθορίζεται πλήρως από τις παρακάτω δυο ιδιότητές της:

① Αν $x, y \in A$, τότε $xRy \quad \Leftrightarrow \quad xSy$.

Αυτό είναι η γνωστή μας συμφωνία ότι η διάταξη του υποσυνόλου A κληρονομήθηκε από το A^+.

② Αν $y = A$ τότε xSy $(\forall x \in A^+)$.

Με άλλα λόγια, το «καινούριο» στοιχείο $y = A$ είναι το max του A^+.

$A = \omega$

$\omega^+ \times \{\omega\}$

(x, y)

$y = \omega$

$y = A = \max A^+$

$x \leq y$