Στο εξής, θα συμβολίζω και την S με $\leq$.

Επίσης θα λέω το ΔΣ A^+ και θα εννοώ το ΔΣ (A^+, S).

Θεώρημα: Το A^+ είναι ΚΔΣ.

Η απόδειξη είναι άσκηση.

Ορισμός: Έστω $x \in A$. Θα ορίσω ένα υποσύνολο A_x^* του A:

$$A_x^* = \{y \in A : y \leq x\}$$

Θεώρημα: Έστω x στοιχείο του ΚΔΣ A. Τότε το A_x^* είναι αρχικό τμήμα του A.

Η απόδειξη είναι (πολύ) εύκολη άσκηση.

Το A_x^* θα το λέω το κλειστό αρχικό τμήμα του x.

Παρατηρούμε ότι το το A_x^* είναι γνήσιο αρχικό τμήμα του A^+.

Συμβολίζω με x^* το αντίστοιχο στοιχείο του A^+. Δηλαδή $x^* = \min(A^+ \setminus A_x^*)$.

Ισοδύναμα, $A^+_{x^*} = A_x^*$. (Συμφωνούμε ότι το A_y^+ πάντα σημαίνει $(A^+)_y$.)

Θεώρημα: Έστω x στοιχείο του ΚΔΣ A.

Τότε δεν υπάρχει αρχικό τμήμα B του A^+ με $A_x \subset B \subset A_x^*$.

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι $A_x^* = A_x \cup \{x\}$.

Από αυτό εύκολα ελέγχουμε ότι δεν υπάρχει ούτε καν σύνολο B με $A_x \subset B \subset A_x^*$. $\blacksquare$

Ορολογία: Έστω X ΟΔΣ και $a, b \in X$. Θα λέω ότι το b είναι αμέσως επόμενο του a

και θα εννοω: 1 $a < b$, και 2 $(\nexists c \in X) a < c < b$.

Θεώρημα: Έστω a στοιχείο του ΟΔΣ X.

Τότε, αν υπάρχει αμέσως επόμενο στοιχείο του a στο X, τότε είναι μοναδικό.

Απόδειξη: Με άτοπο, έστω λοιπόν $b_1 < b_2$ αμέσως επόμενα του a.

Άρα $a < b_1 < b_2$, που είναι άτοπο, επειδή το b_2 είναι αμέσως επόμενο του a. ■

Συνήθως λεώ απλώς το επόμενο και εννοώ το αμέσως επόμενο.

Άσκηση: Για ποια $a \in X$ υπάρχει το επόμενο του a στο X αν $X = \mathbb{Z}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$;

Αν X είναι το υποσύνολο του $\mathbb{Q}$ με $X = \{0\} \cup \{a : (\exists n \in \mathbb{Z}_+) a = 1/n\}$;

Θεώρημα: Έστω x στοιχείο του ΚΔΣ A.

Τότε υπάρχει το επόμενο του x στο A^+, και ισούται με x^*.

Απόδειξη: Ξέρουμε ότι και τα στοιχεία και οι ανισότητες στο A^+ καθορίζουν,
και καθορίζονται από,
τα αντίστοιχα γνήσια αρχικά τμήματα και τις αντίστοιχες ανισότητες μεταξύ τους.
Άρα το ζητούμενο προκύπτει από το ότι (1) $A_x \subset A_x^*$
και (2) δεν υπάρχει αρχικό τμήμα B του A^+ με $A_x \subset B \subset A_x^*$. ■

Θα συμβολίζω με s την συνάρτηση $s : A \to A^+$ με $x \mapsto x^*$.

Θεώρημα: Με s όπως παραπάνω, έστω $x \in A$. Τότε ΤΑΕΙ:

① $s(x) \notin A$.

② $s(x) = A$.

③ $x = \max A$

Θεώρημα: Με s όπως παραπάνω, ΤΑΕΙ:

① Η s παίρνει τιμές στο A.

② Το A δεν είναι επόμενο.

③ Δεν υπάρχει το $\max A$.

Οι αποδείξεις είναι άσκηση.

A^+

$A \quad 0 \quad 1 \quad 2$

$A^+ \quad 1 \quad 2 \quad 3 \ldots$

Σημαντικό Παράδειγμα/Ορισμός:

Έστω $\omega + 1 = \omega^+$.

Σαν σύνολο, το $\omega + 1$ έχει στοιχεία τους φυσικούς αριθμούς, μαζί με το ω.

Η διάταξη είναι $0 < 1 < 2 < \cdots < \omega$.

Ισχυρίζομαι ότι το ω δεν είναι επόμενο. Δηλαδή $(\nexists n)\ s(n) = \omega$. Αυτό το βλέπουμε με τρεις τρόπους:

① Αν $n \in \omega$ ελέγχουμε ότι $s(n) = n + 1$. Ειδικότερα, $s(n) \neq \omega$.

② Η s είναι η γνωστή μας από τα αξιώματα του Peano $s : \omega \to \omega$. Άρα $s(n) \in \omega$ άρα $s(n) \neq \omega$.

③ Το ω, ως σύνολο, δεν έχει max. Ισοδύναμα, το ω, ως στοιχείο του ω^+, δεν είναι επόμενο.

Έστω τώρα $\omega + 2 = (\omega + 1)^+$.

Η διάταξη του $\omega + 2$ είναι $0 < 1 < 2 < \cdots < \omega < \omega + 1$

από όπου βλέπουμε ότι το $\omega + 1$ είναι επόμενο,

αφού είναι επόμενο του ω,

ισοδύναμα αφού η $s : \omega + 1 \to \omega + 2$ δεν παίρνει τιμές στο $\omega + 1$ (αφού $s(\omega) \notin \omega + 1$),

ισοδύναμα αφού $\omega = \max(\omega + 1)$, ειδικότερα το $\omega + 1$ έχει max.

Ο επόμενος στόχος μας είναι να δούμε πως επηρεάζονται οι ανισότητες από το επόμενο στοιχείο.

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $x, y \in A$. Τότε:

① $x < y^* \quad \Leftrightarrow \quad x \leq y$

② $x^* \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x < y$

③ $x^* \leq y^* \quad \Leftrightarrow \quad x \leq y$

④ $x^* = y^* \quad \Leftrightarrow \quad x = y$

Απόδειξη του ①: $x < y^* \quad \Leftrightarrow \quad x \in A^+_{y_*} = A^*_y \quad \Leftrightarrow \quad x \leq y$.

Απόδειξη του ②: Αν $x^* \leq y$, από $x < x^* \leq y$ έχω $x < y$.

Αντιστρόφως, αν $x < y$ ΘΝΔΟ $x^* \leq y$ δηλαδή ότι ΔΙΟ $y < x^*$.

Πράγματι, το $y < x^*$ δίνει $x < y < x^*$ που είναι άτοπο αφού το x^* είναι το επόμενο του x.

Απόδειξη του ③: $x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x < y^* \quad \Leftrightarrow \quad x^* \leq y^*$.

Απόδειξη του ④: Από το ③, αφού «δυο ανισότητες κάνουν μια ισότητα» (οι λεπτομέρειες άσκηση).

33. Οριακά Στοιχεία

Το A θα συμβολίζει ένα ΚΔΣ, και το A^+ θα είναι το γνωστό μας ΚΔΣ.

Το 0_A είναι το $\min A$ (αν υπάρχει, δηλαδή αν $A \neq \varnothing$).

Ορολογία: Έστω $x \in A$. Λέμε το x είναι οριακό στοιχείο του A

και εννούμε ότι το x δεν είναι επόμενο.

Άρα μία και μόνο μία από τις δύο περιπτώσεις ισχύει: ① το x είναι οριακό. ② $(\exists y \in A) y^* = x$.

Παραδείγματα:

① Αν το A έχει τουλάχιστον ένα στοιχείο, τότε έχει τουλάχιστον ένα οριακό στοιχείο, το 0_A.

② Αν το A είναι πεπερασμένο, τότε δεν έχει άλλα οριακά στοιχεία (εκτός του 0_A).

③ Το ω δεν έχει άλλα οριακά στοιχεία (εκτός του $0_\omega = 0$).

④Το ω είναι οριακό στοιχείο και του $\omega + 1$ και του $\omega + 2$.

⑤ Το υποσύνολο του $\mathbb{Q}$ με στοιχεία

$1 - 1/2 < 1 - 1/3 < 1 - 1/4 < \cdots < 1 < 2 - 1/2 < 2 - 1/3 < 2 - 1/4 < \cdots < 2$

έχει οριακά στοιχεία τα $1/2, 1, 2$.

Έστω X ΔΣ, $a \in X$, και $B \subseteq X$.

Λέμε το a είναι ανω φράγμα του B και εννοούμε ότι

$$(\forall b \in B) \quad b \leq a.$$

Συμβολίζω με $B^{\alpha\varphi}$ το σύνολο των άνω φραγμάτων του B στο X.

Συμβολίζουμε με $\sup B$ το $\min B^{\alpha\varphi}$ (αν υπάρχει).

Όπως κάθε min, είναι μοναδικό (αν υπάρχει).

Παραδείγμα: Αν $X = \mathbb{R}$, το $\sup B$ είναι το γνωστό μας από την ανάλυση.

Η πληρότητα του $\mathbb{R}$ λέει ακριβώς ότι το $\sup B$ υπάρχει, αρκεί τα $B, B^{\alpha\varphi}$ να είναι μη-κενά.

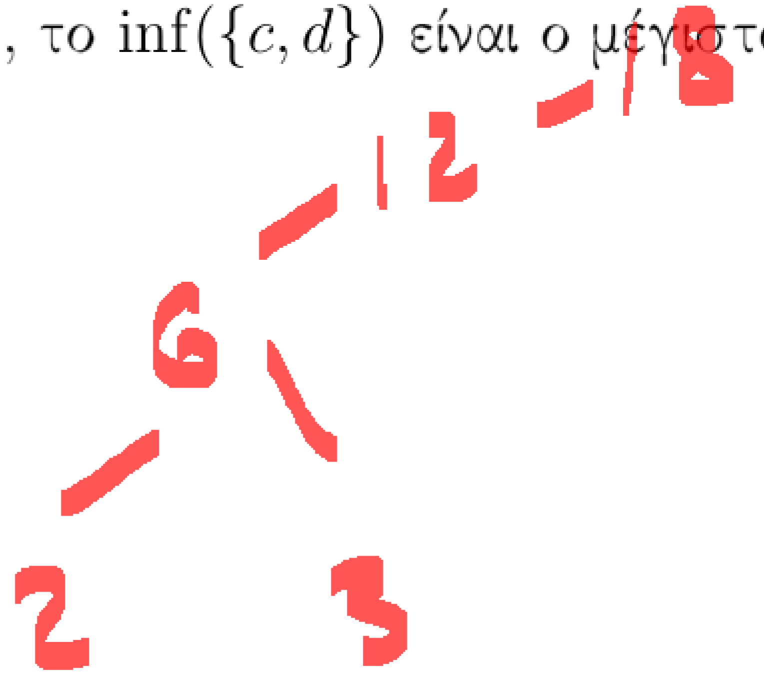
Παραδείγμα: Αν $X = \mathbb{Z}_+$ με διάταξη «διαιρεί» τότε το $\sup(\{c, d\})$ είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των c, d.

Αυτό είναι επαναδιατύπωση της εξής ιδιότητας του ΕΚΠ:

Αν $a_0, a \in \mathbb{Z}_+$ και $a_0 = \text{ΕΚΠ}(c, d)$ τότε $a_0 | a \quad \Leftrightarrow \quad b | a (\forall b \in \{c, d\})$.

Παρεμπιπτόντως, «προφανείς» είναι οι ορισμοί των κάτω φραγμάτων και του inf για τυχαίο X.

Τότε, στο $X = \mathbb{Z}_+$ με διάταξη «διαιρεί», το $\inf(\{c, d\})$ είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των c, d.



Θεώρημα: Έστω B υποσύνολο του ΔΣ X τέτοιο ώστε ύπάρχει το $\sup B$.

Τότε το $\max B$ υπάρχει αν και μόνο αν $\sup B \in B$.

Σε αυτή την περίπτωση, $\max B = \sup B$.

Σκίτσο της απόδειξης: Προκύπτει εύκολα από τα εξής:

Αν ένα άνω φράγμα του B ζει στο B, τότε είναι $\leq$ από κάθε άνω φράγμα του B.

Αν ένα άνω φράγμα a του B ζει στο B, τότε υπάρχει το $\max B$ και ισούται με a.

Αντιστρόφως, αν υπάρχει το $\max B$, τότε είναι ένα άνω φράγμα του B που ζει στο B. $\blacksquare$

Άσκηση: Δώστε τις λεπτομέρειες της παραπάνω απόδειξης.

Επιστρέφουμε στα αγαπημένα μας ΚΔΣ A και A^+.

Προφανώς, αν $x \in A$, $\max A_x^* = x$. Άρα και $\sup A_x^* = x$.

Έστω $B \subseteq A^+$. Επειδή το A είναι το max του A^+, $A \in B^{\alpha\varphi}$, άρα $B^{\alpha\varphi} \neq \varnothing$.

Άρα, επειδή είμαστε σε ΚΔΣ, το min του $B^{\alpha\varphi}$, δηλαδή το $\sup B$, πάντα υπάρχει. Αποδείξαμε:

Θεώρημα: Για κάθε υποσύνολο B του A^+, υπάρχει το $\sup B$. $\blacksquare$

Θεώρημα (Χαρακτηρισμός των οριακών σημείων):

Έστω x στοιχείο του ΚΔΣ A. Τότε ΤΑΕΙ:

① $\sup A_x = x$.

② Το x είναι οριακό σημείο του A.

Απόδειξη του ①⇒②:

Έστω ότι $\sup A_x = x$. ΘΝΔΟ το x είναι οριακό, δηλαδή ότι δεν είναι επόμενο.

Με άτοπο, έστω λοιπόν $y \in A$ με $y^* = x$.

Τότε $A_x = A_{y^*} = A^+_{y^*} = A^*_y$ που έχει max, άρα και sup, το y.

Δηλαδή $\sup A_x = y$, δηλαδή $x = y$, δηλαδή $y^* = y$, άτοπο. ■(①⇒②)

Απόδειξη του ②⇒①:

Ισοδύναμα, δείχνω ότι η άρνηση της ① συνεπάγεται την άρνηση της ②.

Έστω $y = \sup A_x$. Έστω $y \neq x$. ΑΝΔΟ $x = y^*$, αφού τότε το x είναι επόμενο, δηλαδή όχι οριακό.

Αν $y \notin A_x$, δηλαδή αν $x \leq y$, τότε επειδή το x είναι άνω φράγμα του A_x, έχω $x = y$

(το μόνο στοιχείο $\leq$ του ελαχίστου είναι το ίδιο το ελάχιστο

ειδικότερα το μόνο άνω φράγμα $\leq$ του ελαχίστου άνω φράγματος είναι το ίδιο το ελάχιστο άνω φράγμα),

που είναι αδύνατο αφού $y \neq x$.

Άρα $y \in A_x$ δηλαδή $\sup A_x \in A_x$ δηλαδή $\sup A_x = \max A_x = y$.

Ένα αρχικό τμήμα που έχει max το y αναγκαστικά ισούται με A_y^* (άσκηση).

Άρα $A_y^* = A_x$ που λέει ακριβώς ότι το x και το y^* αντιστοιχούν στο ίδιο αρχικό τμήμα, δηλαδή ισούνται. ■

Στην προηγούμενη απόδειξη, αποδείξαμε ένα ισχυρότερο θεώρημα, το εξής:

Θεώρημα (Πιο λεπτομερής χαρακτηρισμός των οριακών και των επόμενων στοιχείων):

Έστω x στοιχείο του ΚΔΣ A. Τότε μία και μόνο μία από τις παρακάτω δύο περιπτώσεις ισχύει:

① Το $\max A_x$ υπάρχει.

Σε αυτή την περίπτωση, αν y συμβολίζει το $\max A_x$, τότε $x = y^*$, ειδικότερα το x είναι επόμενο.

② Το $\max A_x$ δεν υπάρχει.

Σε αυτή την περίπτωση, $\sup A_x = x$ και το x είναι οριακό. ■

Θεώρημα : Έστω x στοιχείο του ΚΔΣ A και $y = \sup A_x$. Τότε

$$\bigcup_{z \in A_x} A_z = A_y \,.$$

$\bigcup\{A_z : z \in A_x\}$

Απόδειξη: Αν $w \in A_z$ και $z \in A_x$ τότε $w < z < x$.

Αφού $x \in \{y, y^*\}$, έχω $w < y$ επειδή:

αν $x = y$ τότε είναι προφανές.

αν $x = y^*$ τότε $w < z \leq y$ άρα $w < y$.

Δείξαμε τη μια από τις δυο ζητούμενες ανισότητες, δηλαδή ότι $\bigcup A_z \subseteq A_y$.

Αντιστρόφως, έστω $w \in A_y$. Επειδή $x \in \{y, y^*\}$, έχω $w < x$. ΑΝΔΟ $(\exists z) w < z < x$.

Αν $x = y^*$, παίρνω $z = y$.

Αλλοιώς το x δεν είναι επόμενο. Τότε πάλι υπάρχει τέτοιο z, επειδή, αν δεν υπήρχε, αυτό θα σήμαινε ότι $x = w^*$, που είναι αδύνατον αφού το x δεν είναι επόμενο. ∎

Ενότητα 34. Υπερπεπερασμένη Επαγωγή

Έστω A ΚΔΣ με ελάχιστο στοιχείο 0_A. Ας δούμε πρώτα την κεντρική ιδέα της ενότητας.
Ξεκινάμε με ένα τύπο, που τον συμβολίζουμε με $\Phi(x)$.
Από αυτό τον τύπο, φτιάχνουμε την εξής πρόταση, που θα την ονομάζω πρόταση (*):

Πρόταση (*): $(\forall x \in A) \quad \Phi(x)$

Στην ενότητα αυτή θα περιγράψουμε μια μέθοδο απόδειξης της πρότασης (*).
Αυτή η μέθοδος λέγεται Υπερπεπερασμένη Επαγωγή.
Η υπερπεπερασμένη επαγωγή γενικεύει την γνωστή μας επαγωγή ως εξής:
Στην ειδική περίπτωση που $A = \omega$, παίρνουμε την γνωστή μας επαγωγή.

$(\forall n \in \omega) \quad \ldots \quad \Phi(x)$

$x \qquad A$

Για την γνωστή μας επαγωγή, υπάρχουν δυο παραλλαγές,
η ισχυρή και η συνήθης.

Το ίδιο θα συμβεί και εδώ, αλλά οι ρόλοι θα αντιστραφούν.
Αυτό σημαίνει ότι
η συνήθης μορφή της υπερπεπερασμένης επαγωγής
είναι η πιο δύσκολη να την καταλάβουμε,
αλλά και αυτή που λύνει πιο εύκολα τα πιο δύσκολα προβλήματα.

Περιγραφή της Ισχυρής Μορφής της Υπερπεπερασμένης Επαγωγής:

Κάνουμε την Επαγωγική Υπόθεση:

(ΕΥ) Είναι δεδομένο κάποιο x στο A που έχει την εξής ιδιότητα:

Για όλα τα $y \in A_x$, ισχύει η $\Phi(y)$.

Μετά αποδεικνύουμε το Επαγωγικό Βήμα:

(ΕΒ) Για το δεδομένο x, ισχύει η $\Phi(x)$.

Απόδειξη της Ορθότητας της Παραπάνω Μεθόδου:

Μέ άτοπο, έστω λοιπόν $\Phi(x)$ τύπος τέτοιος ώστε,
παρ'όλο που αποδείξαμε ότι η ΕΥ συνεπάγεται το ΕΒ,
η πρόταση (*) είναι ψευδής.
Δηλαδή το σύνολο B που ορίζω παρακάτω
$B = \{x \in A : \text{δεν ισχύει η } \Phi(x)\}$
δεν είναι κενό.

Έστω x_0 το min του B. Ειδικότερα, $x_0 \in B$.
Έστω $y \in A$. Επειδή κανένα $y < x_0$ δεν μπορεί να ζει στο B,
και επειδή «$y \notin B$» σημαίνει «ισχύει η $\Phi(y)$»,
γνωρίζουμε ότι η Επαγωγική Υπόθεση για $x = x_0$ είναι τώρα μια αληθής πρόταση.

Από την απόδειξη «ΕΥ⇒ΕΒ» συμπεραίνουμε ότι ισχύει και το Επαγωγικό Βήμα για $x = x_0$.
Δηλαδή ισχύει η $\Phi(x_0)$.
Δηλαδή $x_0 \notin B$, που είναι άτοπο.
Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.
