Είχαμε δει $\phi(x)$ (πχ $x=n$
$\phi(x)$ : $n! < 2^n$ )

$A=\omega$

$(\forall x \in A) \quad \phi(x)$

$\underbrace{\ldots\ n}_{\text{προηγούμενους}}\ n+1$

"πατέρας" στηλερό

Τώρα: $A$ τυχαίο ΙΚΔΣ $\quad O_A = \min A$

Περιγραφή της Συνήθους Μορφής της Υπερπεπερασμένης Επαγωγής:

Δείχνουμε ότι ισχύει η Βάση της Επαγωγής:

(ΒΕ) Ισχύει η $\Phi(0_A)$.

Κάνουμε την Επαγωγική Υπόθεση για Επόμενα Στοιχεία:

---

(ΕΥ1) Είναι δεδομένο κάποιο $x = y^*$ στο $A$ τ.ω. ισχύει η $\Phi(y)$.

---

Μετά αποδεικνύουμε το Επαγωγικό Βήμα για Επόμενα Στοιχεία:

---

(ΕΒ1) Για το δεδομένο $x$, ισχύει η $\Phi(x)$.

---

Κάνουμε την Επαγωγική Υπόθεση για Οριακά Στοιχεία:

---

(ΕΥ2) Είναι δεδομένο κάποιο οριακό $x$ στο $A$ που έχει την εξής ιδιότητα:
Για όλα τα $y \in A_x$, ισχύει η $\Phi(y)$.

---

Τέλος αποδεικνύουμε το Επαγωγικό Βήμα για Οριακά Στοιχεία:

---

(ΕΒ2) Για το δεδομένο $x$, ισχύει η $\Phi(x)$.

---

Η βάση της επαγωγής δεν είναι απαραίτητη, γιατί περιλαμβάνεται στο ΕΒ2.
Συνήθως όμως είναι βολικό να την κάνουμε, και έτσι
να μπορούμε να υποθέτουμε στην ΕΥ2 ότι $x \neq 0_A$.

---

Αυτή η μορφή της επαγωγής είναι ένα «μίγμα»
συνήθους επαγωγής, που καλύπτει την περίπτωση $x = y^*$,
και ισχυρής επαγωγής για οριακά $x$.

---

Άσκηση: Να αποδείξετε την ορθότητα της συνήθους μορφής της υπερπεπερασμένης επαγωγής.

---

Υπόδειξη: Όπως για την ισχυρή μορφή, μόνο που διακρίνετε περιπτώσεις, $x_0$ επόμενο ή οριακό.

---

Άσκηση: Να αποδείξετε ότι, για κάθε στοιχείο $x$ του $A$,
υπάρχει πεπερασμένη ακολουθία $x_0, x_1, \ldots x_n = x$ με $x_0$ οριακό και $x_{j+1} = x_j^*$ $(\forall j \in n)$.

---

οριακό $x_0$ $x_{n-1}$ $x_n$

Παρεμπιπτόντως, έχουμε τώρα γενικεύσει όλα τα αξιώματα του Peano
από το $A = \omega$ στο τυχαίο ΚΔΣ $A$:

---

P2: $(\forall x \in A)(\exists! y \in A^{+}) y = s(x)$

P4: $(\forall x, y \in A) \quad s(x) = s(y) \Rightarrow x = y$

P1 και P3: Κάθε $x \in A$ είναι ή επόμενο ή οριακό αλλά όχι και τα δύο.

P5: Ισχύει η υπερπεπερασμένη επαγωγή για το $A$.

---

Για να κάνετε την σύγκριση,
θυμηθείτε το $\omega$ δεν έχει άλλα οριακά εκτός από το 0,
και δεν έχει ούτε max άρα το $s(x)$ παίρνει τιμές όχι απλώς στο $\omega^{+}$ αλλά στο $\omega$.

Ενότητα 35. Αύξουσες Συναρτήσεις

Ξεκινάμε με $A, B, C$ που είναι, προσωρινά, απλώς ΔΣ. Σύντομα όμως θα είναι ΚΔΣ.

Ορολογία: Λέμε η $(f, A, B)$ είναι αύξουσα συνάρτηση

$$\text{και εννοούμε:} \begin{cases} f : A \to B \\ \text{τα } A, B \text{ είναι } \Delta\Sigma \\ (\forall x, y \in A) \quad x \leq_A y \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq_B f(y) \end{cases}$$

Στην πράξη, λέμε απλά ότι η $f : A \to B$ είναι αύξουσα.
Επίσης, συμβολίζουμε την $(f, A, B)$ απλώς με $f$.

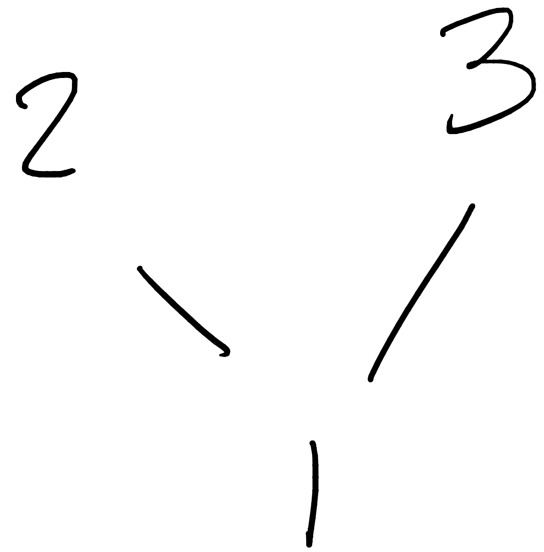
Παράδειγμα: Έστω $A = \{1, 2, 3\}$ με τη διάταξη $\leq_A$ να είναι «διαιρεί».
Έστω $B = \{1, 2, 3\}$ με τη διάταξη $\leq_B$ να είναι η συνήθης.
Ως σύνολα, $A = B$, αλλά ως ΔΣ $A \neq B$.
Θεωρώ και τις $f : A \to B$ και $g : B \to A$ με $f(x) = g(x) = x$.
Ως συναρτήσεις μεταξύ συνόλων, οι $f$ και $g$ ισούνται,
αφού ισούνται και οι δυο με την ταυτοτική συνάρτηση του $\{1, 2, 3\}$.
Αφήνω ως άσκηση να ελέγξετε ότι η $f : A \to B$ είναι αύξουσα ενώ η $g : B \to A$ όχι.

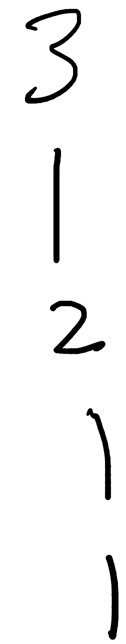
---

Θεώρημα: Έστω $f : A \to B$ αύξουσα, και έστω ότι η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : B \to A$ υπάρχει.
Τότε και η $f^{-1} : B \to A$ είναι αύξουσα, υπό την προϋπόθεση ότι το $A$ είναι ΟΔΣ.

---

Η απόδειξη είναι εύκολη άσκηση. Παρατηρήστε ότι το προηγούμενο παράδειγμα δείχνει ότι
το θεώρημα δεν ισχύει χωρίς την προϋπόθεση για το $A$ να είναι ΟΔΣ.





$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left] & B \arrow[l, bend right, "g(x)=x"'] \end{tikzcd}$$

$f(x)=x$

$A \neq B$

ως ΠΣ

Ορολογία: Λέμε η $f : A \to B$ είναι ισομορφισμός διατεταγμένων συνόλων

$$\text{και εννοούμε:} \begin{cases} \text{η } f : A \to B \text{ είναι αύξουσα} \\ \text{η } f^{-1} : B \to A \text{ υπάρχει} \\ \text{η } f^{-1} : B \to A \text{ είναι αύξουσα} \end{cases}$$

---

Θεώρημα: Η ταυτοτική συνάρτηση $I : A \to A$ είναι ισομορφισμός ΔΣ.

---

Θεώρημα: Αν οι $f : A \to B$, $g : B \to C$ είναι αύξουσες, τότε η $g \circ f : A \to C$ είναι αύξουσα.

---

Θεώρημα: Αν οι $f : A \to B$, $g : B \to C$ είναι ισομορφισμοί ΔΣ,
τότε η $g \circ f : A \to C$ είναι ισομορφισμός ΔΣ.

---

Η αποδείξεις είναι εύκολη άσκηση.

Ορολογία: Λέμε Τα ΔΣ $A, B$ είναι ισόμορφα (συμβ: $A \approx B$)και εννοούμε ότι
υπάρχει κάποια $f : A \to B$ που είναι ισομορφισμός διατεταγμένων συνόλων.

---

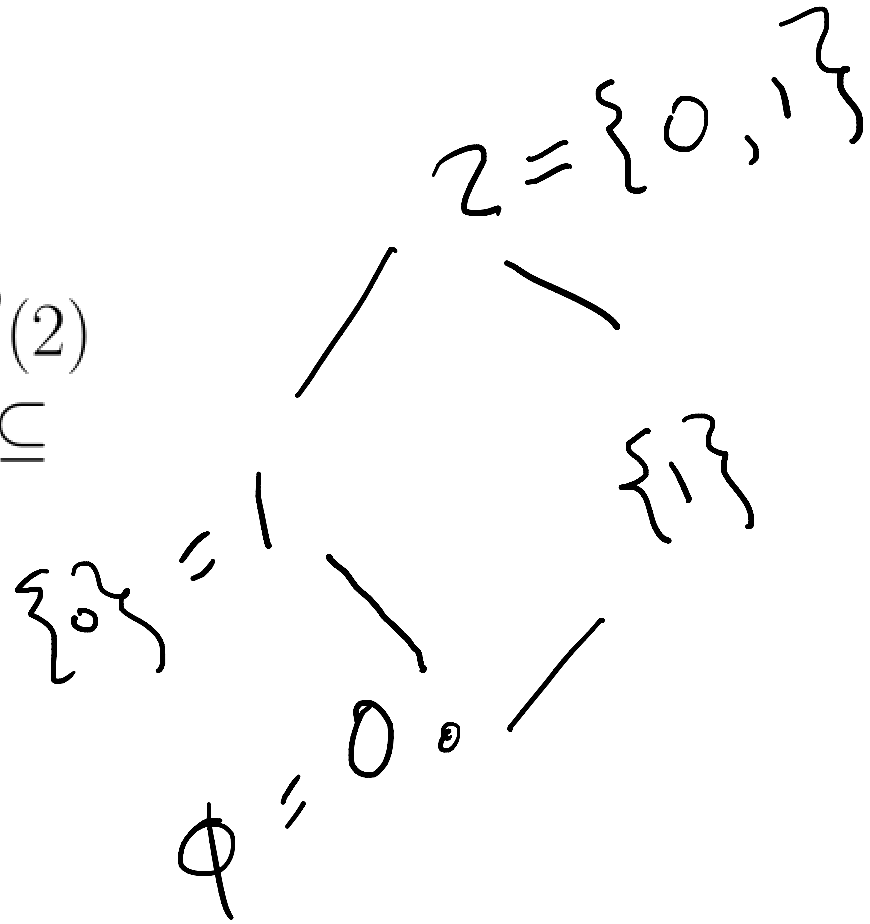
Τα ισόμορφα ΔΣ τα λέμε και όμοια.
Η συνήθης απόδειξη, μαζί με τα τρία προηγούμενα θεωρήματα,
δίνει ότι αυτή η σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας.

---

Παράδειγμα (ότι, διαισθητικά, «$\approx$» σημαίνει «ίδιο σχήμα»):

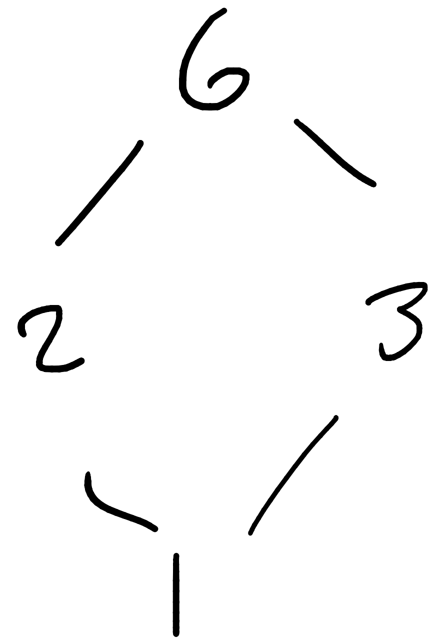
$A = \mathcal{P}(2)$

διάταξη $\subseteq$




$B = \{1, 2, 3, 6\}$

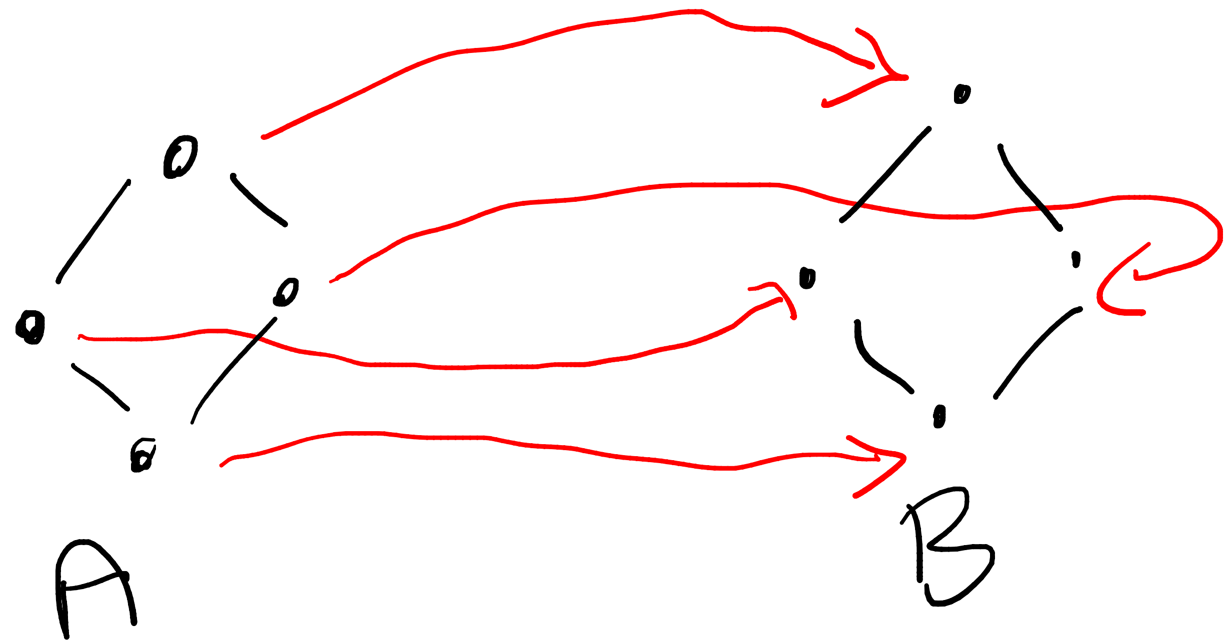
διάταξη «διαιρεί»



Άσκηση: Στο προηγούμενο παράδειγμα, ΝΔΟ $A \approx B$

"Προχ"

Λύση




$\exists^{?} f$

έστω

$f(0)=1$

$f(1)=2$

$f(\{1\})=3$  $f(2)=6$

προφ:

1 κ.ο. $f: A \to B$

2 αύξουσα

"Καθαρό":

Θεώρω $f: A \to B$

$S \mapsto 2^{m_0} 3^{m_1}$ όπου

$m_j = \begin{cases} 0, & j \notin S \\ 1, & j \in S \end{cases}$

δεδ.

(δηλ. $m: 2 \to 2$ η χαρ. συν. του $S \subseteq 2$)

(βλ. ασκ. $\mathcal{P}(A) \sim 2^A$)

εδώ $A = 2$

Ορίζω $g : B \to A$

$$u \longmapsto \{ j \in 2 : p_j \mid u \}$$ όπου

$$p_0 = 2 \quad p_1 = 3$$

Ελέγχω: $\begin{cases} \text{αντίστροφες} \\ \text{αύξουσες} \end{cases}$

Άσκηση: Να επαναλάβετε την προηγούμενη άσκηση,
αλλάζοντας όμως τα σύνολα ως εξής:
$A = \mathcal{P}(3),\ B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

Αν έχουμε δεδομένη μια ΑΣ $f : A \to B$,
τότε λέμε η $f$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση (θα χρησιμοποιώ τη συντομογραφία ΓΝΑΣ)
και εννοούμε $(\forall x, y \in A) \quad x <_A y \quad \Rightarrow \quad f(x) <_B f(y)$.

Θεώρημα: Έστω $f : A \to B$ αύξουσα.
Αν η $f$ είναι ένα-προς-ένα τότε είναι γνησίως αύξουσα.
Το αντίστροφο ισχύει υπό την προϋπόθεση ότι το $A$ είναι ΟΔΣ.

Η απόδειξη είναι εύκολη άσκηση.

Άσκηση (σχετικά με την προϋπόθεση στο προηγούμενο θεώρημα):

Πάρτε $A = \{1, 2, 3\}$ με διάταξη «διαιρεί» και $B = \{4, 5\}$ με διάταξη τη συνήθη.

ΝΔΟ $\exists!$ ΓΝΑΣ $f : A \to B$.

Υπάρχει ένα-προς-ένα συνάρτηση από το σύνολο $A$ στο σύνολο $B$;

Επιστρέφουμε στα ΚΔΣ. Οι συναρτήσεις που μας ενδιαφέρουν θα είναι πολύ ειδικής μορφής:
Θα είναι γνησίως αύξουσες, καί θα έχουν επίσης την ιδιότητα
ότι το σύνολο τιμών τους είναι αρχικό τμήμα.

---

Ορολογία: Έστω $A$ και $B$ δυο ΚΔΣ και έστω $f : A \to B$ γνησίως αύξουσα.
Θα λέω η $f$ είναι ομομορφισμός καλώς διατεταγμένων συνόλων
και θα εννοώ ότι η εικόνα της $f$ είναι αρχικό τμήμα του $B$.

---

Σχαδ: 5.3

Θεώρημα (Μοναδικότητα Ομομορφισμού):
Έστω $f : A \to B$ και $g : A \to B$ ομομορφισμοί καλώς διατεταγμένων συνόλων.
Τότε $f = g$.

---

Θεώρημα (Ύπαρξη Ομομορφισμού): Έστω $A, B$ καλώς διατεταγμένα σύνολα.
Αν δεν υπάρχει ομομορφισμός $f : A \to B$ τότε υπάρχει ομομορφισμός $g : B \to A$.

---

A B ✓ πόσοι ομφ $A \to B$ ?

Οήι

$A \to B \quad \exists\ ?$

$\begin{pmatrix} A & A \\ \downarrow & \uparrow \\ B & B \end{pmatrix}$

Ύπαρξη: Αν όχι

τότε $\exists\ B \to A$