A ΚΔΣ $\quad A = ?$ $\quad \#A = n+1$

$A \sim n+1$

$\emptyset$

0_A

$0_A^* \; \left(= (0_A)^* \right)$ $\quad$ συμβ: $1_A = 0_A^*$

$2_A := (1_A)^*$ (αν $\exists$)

$(n+1)_A := n_A^*$ (αν $\exists$)

n_A

$|$

$\vdots$

2_A

$|$

1_A

$|$

0_A

αν A άπειρο

$\vdots$

n_A

$\vdots$

l_A

o_A

$(\forall n \in \omega)$

έστω $A' = \{n_A : n \in \omega\}$

ίσως $A = A'$

Αν όχι

$\exists$ το $\sup A'$ (γτ?)

το συμβολίζω

ω_A

A $\quad n := n_A$

$\omega := \omega_A$

B $\quad n = n_B$

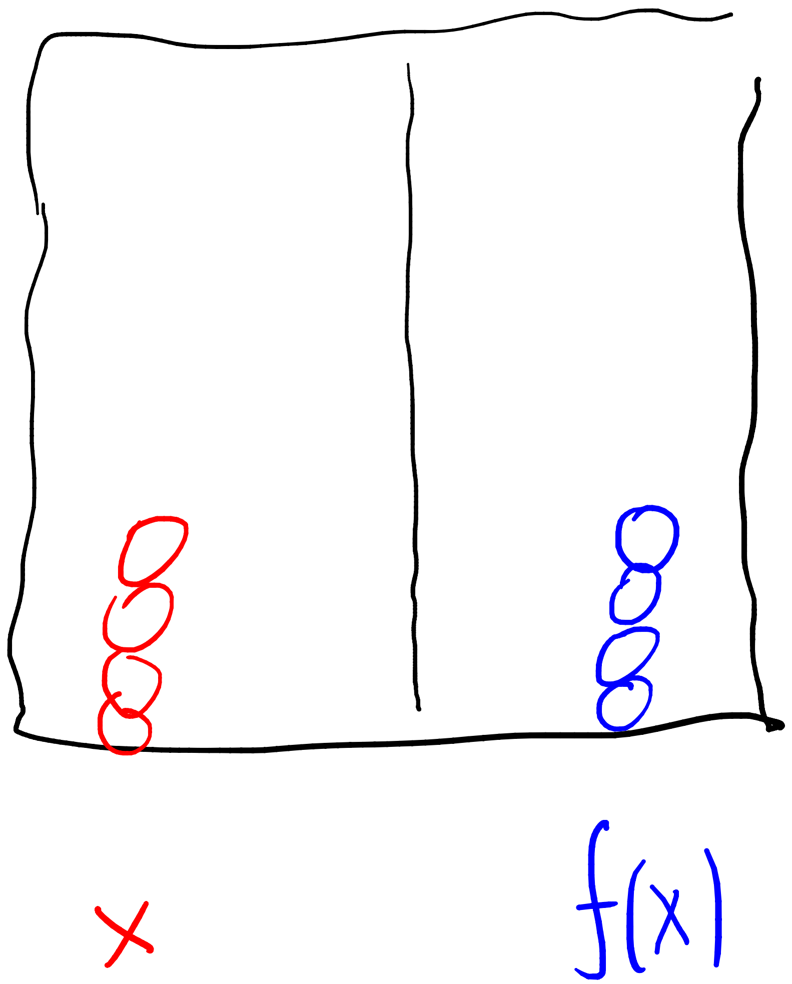
$\omega = \omega_B$

$$\begin{array}{ccc}
 & & \omega+1 \\
 & \omega & \omega \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
n & n & n \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0
\end{array}$$

A, B ✓

$f: A \to B$ ομφ (αν $\exists$)

$f = ?$



$A = \emptyset$ $f = \emptyset$ είναι συν. $(\forall x \in A) \ldots$

" ομφ

$(B^0 = 1 = \{0\} = \{\emptyset\}$

πεπ)

Αν A, B σύνολα

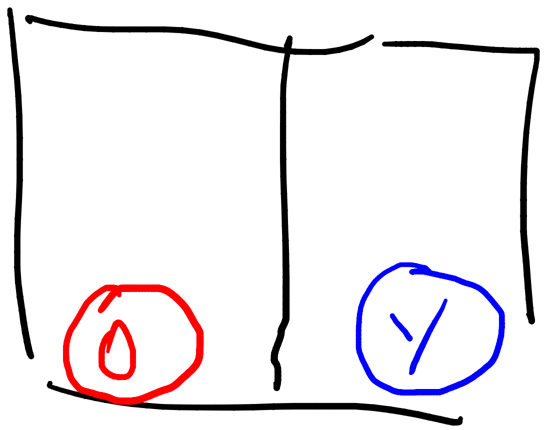
"ομφ σύνολο" είναι 1-1

$\exists$ ομφ $A \to B$ "το A δεν

$\# A \leq \# B$ είναι πολύ μεγάλο"

Αν $A \neq \varphi$

$\exists$ το 0_A



Ισχ: $y = 0$

Αν $B = \varphi$

$(0^A = 0)$

(αν $A \neq 0$)

$\nexists f$

$(f(0_A) \in B = \varphi$
άτοπ$)$

(τότε $\exists B \to A$!)

Γίνεται $f(0_A) = y \neq 0_B$?

όχι : πρέπει $f[A] =: C$ να είναι
αρχ. ζύμνα

$A \xrightarrow{f} B$

σαν συνάρτ. συνόλων

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] & C \arrow[l, shift left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

αίζουσες

$A \simeq C$

$0_B < y \in C$ (για αυτή, έστω $0_B \neq y$)

αρχ. τμ.

άρα $0_B \in C$

έστω $f(x) = 0_B$

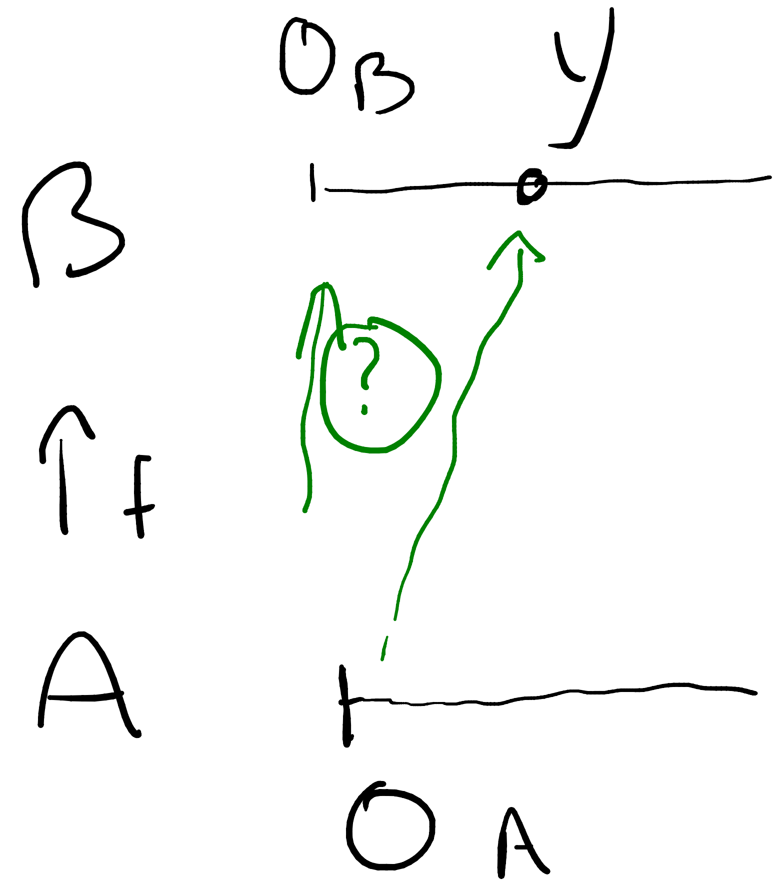
$x \neq 0_A$ (αλλιώς $\underset{\substack{\shortparallel \\ 0_B}}{f(x)} \neq \underset{\substack{\shortparallel \\ y}}{f(0_A)}$)

άρα $0_A < x$

ΓΝΑΣ $\quad f(O_A) < f(x)$

$y < O_B$ ατπ

ή:



2 2

1 1

0 0

αν
f ομφ
τότε

$$f(x^*) = (f(x))^*$$

$*$

ω	ω
$\vdots$	$\vdots$
n	n
$\vdots$	$\vdots$
2	2
1	1
0	0

$$f(\omega_A) = \omega_B$$

Αν f ομφ τότε

$$f\left(\sup_{x<x_0} X\right) = \sup_{x<x_0} f(x)$$

$*\ *$

Ασκ | Θεωρώντας γνωστά τα (*), (**)

αποδείξτε το Θ Μοναδ Ομφ

Υποδ | Υπερπ. Επαγ. στο $x \in A$ με $\Phi(x)$: $f(x)=g(x)$

Εχ

Κάντε πρώτα την Ασκ.

«Μοναδικότητα των ΑΑ»

Θεωρούμε A, B και C που είναι ΚΔΣ.

Όταν λέμε ότι η $f : A \to B$ είναι ισομορφισμός καλώς διατεταγμένων συνόλων απλώς εννοούμε ότι είναι ισομορφισμός διατεταγμένων συνόλων.
Παρατηρήστε ότι τότε είναι ομομορφισμός καλώς διατεταγμένων συνόλων.

Παρατηρήστε επίσης τα εξής:
Η ταυτοτική συνάρτηση $I : A \to A$ είναι ομομορφισμός (προκύπτει, π.χ., αφού είναι ισομορφισμός).
Η σύνθεση ομομορφισμών είναι ομομορφισμός.
Αν η $f : A \to B$ είναι ομομορφισμός και αν η $f^{-1} : B \to A$ υπάρχει, τότε είναι ομομορφισμός, άρα τότε η f (και η f^{-1}) είναι ισομορφισμός.

Παρατηρήστε ότι ο μοναδικός ομομορφισμός $f : A \to A$ είναι ο $f = I$.

Θεώρημα (το ανάλογο του θεωρήματος των Cantor, Schröder, Bernstein για καλώς διατεταγμένα σύνολα):
Έστω A, B καλώς διατεταγμένα σύνολα για τα οποία
και υπάρχει ομομορφισμός $f : A \to B$,
και επίσης υπάρχει ομομορφισμός $g : B \to A$.
Τότε $A \approx B$.

<u>Απ)</u> Αν

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\exists f"] \arrow[rr, bend right] & B \arrow[r, "\exists g"] & A \end{tikzcd}$$

έστω $h = g \circ f$

άρα $h = I$

παρόμοια, $f \circ g = I$

$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\}$ άρα $g = f^{-1}$

άρα $\exists$ η f^{-1}

άρα η f είναι ισομφ

άρα $A \cong B$

$\blacksquare$

Δεδομένου στοιχείου x του καλώς διατεταγμένου συνόλου A, υπάρχει (ακριβώς) ένας σημαντικός ομομορφισμός $J : A_x \to A$, αυτός που ορίζεται με $J(y) = y$.

Θεώρημα (το ανάλογο της Αρχής του Περιστεριώνα για καλώς διατεταγμένα σύνολα):
Κανένα καλώς διατεταγμένο σύνολο δεν είναι όμοιο με γνήσιο αρχικό του τμήμα.

Σχ | προσωρινά: A, B πεπ. σύνολα

ΑΠ: αν B "γν. υποσ. του A"

τότε ΔΙΟ A ισόμορφο B

Απ | ΜΕ ατπ

Έστω λοιπόν $A \simeq A_x$

Θεωρώ ισομφ $f : A \to A_x$

Ειδικότερα, $f(y) \in A_x$

δ/δ $\boxed{f(y) < x \quad (\forall y \in A) \quad \cancel{\forall}}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & A_X \arrow[r, "J"] & A \end{tikzcd}$$

(δηλ: $g = J \circ f$)

Άρα $g = I$

Δλδ $I = J \circ f$

Άρα $(\forall y \in A)$ $I(y) = J(f(y))$

Δλδ $y = f(y)$

ισχύει $\forall y$ άρα & για $y = X$

$X = f(X)$. Από (*) : $x < X$

άρα $\lambda \neq X$ ατπ $\blacksquare$

$\boxed{\text{Εχ}}$ $\forall$ ΚΔΣ A

τα $A_0 = A$, $A_1 = A^+$, $A_2 = (A^+)^+$

$, \ldots, A_{n+1} = (A_n)^+$

είναι όλα διαφορετικά <u>με την ισχυρή έννοια</u>

(όχι ισόμορφα)

Εξηγώ: κάθε ένα είναι γνήσιο αρχ. τμήμα του επόμενου

$$\left(A^{+}_{x} = A \quad \text{αν} \quad x = A \right)$$

π.χ.

$$\omega \not\approx \omega+1 \not\approx \omega+2$$

Ενώ $\quad \omega \sim \omega+1 \sim \omega+2 \sim \aleph_0$

Εισαγωγή στους διατακτικούς αριθμούς

δ.α.

πληθ. αριθμοί π.α.

π.α. cardinal numbers ένα δύο τρία

δ.α. ordinal — // — πρώτος $2^{\text{ος}}$ $3^{\text{ος}}$

π.α. 0 1 2 3 … $\aleph_0$ $\aleph_1$

δ.α 0 1 2 3 … ω $\omega+1$. $\omega+2$ … $\omega+\omega$ …