
Ενότητα 36. Διατακτικοί Αριθμοί

Νέες Συντομογραφίες σε αυτή την ενότητα:

$\in\text{-}\Delta\Sigma(\alpha)$ σημαίνει το α είναι \in -διατεταγμένο σύνολο.

$\Delta A(\alpha)$ σημαίνει το α είναι διατακτικός αριθμός.

Θεωρώ ένα καλώς διατεταγμένο σύνολο α , με διάταξη \leq και γνήσια διάταξη $<$.

Θεωρώ επίσης και τις παρακάτω δυο ιδιότητες που ίσως έχει το α :

Ιδιότητα 1: $\forall \beta \in \alpha \quad \alpha_\beta = \beta$.

Ιδιότητα 2: $\forall \beta, \gamma \in \alpha \quad \gamma \in \beta \iff \gamma < \beta$.

$\pi \alpha \rho$ | Έχει το α την ιδιότητα / (?)

$\alpha = 0$ | $(\forall \beta \in \emptyset) \dots$ ΝΑΙ

$\alpha = 1 = \{0\}$ | " $\forall \beta \in \alpha$ " " $\gamma \text{ για } \beta = 0$ "

πάντα $A \cap O_A = \emptyset$

άρα $\alpha_0 = \emptyset = 0$

$$\alpha = 2 = \{0, 1\}$$

" $\forall \beta \in \alpha$ "

$$\exists \gamma \in \beta = 0$$

$$\forall \gamma \in \beta = 1$$

$\beta = 0$: NAI όπως πριν

$$\beta = 1 \quad \alpha_\beta = \{\gamma \in \alpha : \gamma < 1\} = \{0\} = 1$$

(NAI)

Η ορολογία που χρησιμοποιώ είναι η εξής:

Αν κάποιο $\Delta\Sigma$ έχει την ιδιότητα 2, λέω ότι είναι \in -διατεταγμένο σύνολο.

Οπότε $\in\text{-}\Delta\Sigma(\alpha)$ σημαίνει: Το α έχει την ιδιότητα 2.

Ένα \in -διατεταγμένο σύνολο καθορίζεται πλήρως από το σύνολο των στοιχείων του.

Πράγματι, η μόνη πληροφορία που λείπει είναι η διάταξη,

δηλαδή η πληροφορία, δεδομένων στοιχείων x και y , αν ισχύει ή όχι το $x < y$.

Όμως αυτό είναι ισοδύναμο με $x \in y$

(και το αν ισχύει ή όχι η πρόταση $x \in y$ είναι πλήρως καθορισμένο από τα x και y).

Σας θυμίζω και την ιδιότητα, που ίσως έχει ένα δεδομένο σύνολο S ,

να είναι μεταβατικό σύνολο.

Χρησιμοποιώ τη συντομογραφία $\text{μβ}(S)$ να σημαίνει: Το S είναι μεταβατικό σύνολο.

Σας θυμίζω αυτό σημαίνει: $\forall x \in S \quad x \subseteq S$.

Θεώρημα: Αν το α είναι ΚΔΣ τότε:

Το α έχει την ιδιότητα 1 αν και μόνο αν έχει τις εξής δυο ιδιότητες: $\mu\beta(\alpha)$ και $\epsilon-\Delta\Sigma(\alpha)$.

Η απόδειξη είναι **άσκηση**.

$\mu\beta(\alpha)$ | $\exists \sigma \omega \sigma \alpha$ $\alpha_\beta = 1$ $(\forall \beta \in \alpha)$

$\mu\beta(\alpha)$ (?) | $\exists \sigma \omega \beta \in \alpha$

$\exists \alpha \alpha$ $\alpha_\beta = \beta$

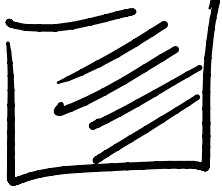
$E-\Delta\Sigma(\alpha)$ (?)

Έστω $\beta, \gamma \in \alpha$

πάντα $y \in A_x \Leftrightarrow y < x$

παινω $A = \alpha \quad x = \beta \quad y = \gamma$

Εκνω $\gamma \in \alpha_\beta \Leftrightarrow \gamma < \beta$

δδ $\gamma \in \beta \Leftrightarrow \gamma < \beta$  (ευθεί)

Αυτοσυσπώλως, έστω $\begin{cases} \gamma \in \beta(\alpha) \\ \gamma \in \Delta \Sigma(\alpha) \end{cases}$

έστω $\beta \in \alpha$ οπότε $\alpha_\beta = \beta$?

$\alpha_\beta \subseteq \beta$?

έστω $\gamma \in \alpha_\beta$

άρα $\begin{cases} \gamma \in \alpha \\ \gamma \in \beta \end{cases}$

Από $\varepsilon\text{-}\Delta\Sigma(\alpha)$ έχω $\gamma \in \beta$ \square (\subseteq)

$\alpha_\beta \supseteq \beta$ (?)

Έχω $\gamma \in \beta$

Από $\mu\alpha\beta(\alpha)$ έχω $\beta \subseteq \alpha$ άρα $\gamma \in \alpha$
Έχω $\left\{ \begin{array}{l} \beta, \gamma \in \alpha \\ \gamma \in \beta \end{array} \right.$ από $\varepsilon\text{-}\Delta\Sigma(\alpha)$ έχω $\gamma \in \beta$ οπότε
όσο $\gamma \in \alpha \cap \beta$ \square (\cap)

Ορολογία: Λέμε το α είναι διατακτικός αριθμός (συντ: $\Delta A(\alpha)$)

και εννοούμε: $\left\{ \begin{array}{l} \text{το } \alpha \text{ είναι } \text{ΚΔΣ} \\ \text{μτβ}(\alpha) \\ \in\text{-}\Delta\Sigma(\alpha) \end{array} \right.$

Από το προηγούμενο θεώρημα βλέπουμε ότι:

Οι διατακτικοί αριθμοί είναι ακριβώς τα ΚΔΣ που έχουν την Ιδιότητα 1.

Άσκηση: Κάθε φυσικός αριθμός είναι διατακτικός αριθμός.

Άσκηση: Το ω είναι διατακτικός αριθμός.

$0 \quad 1 \quad 2 \quad \dots \quad \omega$

Σας θυμίζω ότι κάθε ΚΔΣ A καθορίζει το γνωστό μας ΚΔΣ A^+ .

Θεώρημα: Αν το a είναι διατακτικός αριθμός τότε και το a^+ είναι διατακτικός αριθμός.

Η απόδειξη είναι **άσκηση**. Υπόδειξη: Συγκρίνετε τα A_x και A_x^+ .

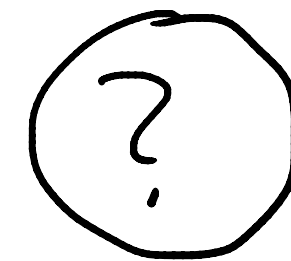
ποιοι δ.α. ξέρουμε?

$0, 1, 2, \dots, \omega, \omega+1 = \omega^+, \omega+2 = (\omega+1)^+, \dots$

$\mu \in$ "αρετή υπομονή"

αριθμ $\omega+n$ $(n \in \omega)$

$\omega+\omega = \{0, \dots, \omega, \dots, \omega+n, \dots\}$



Θεώρημα: Αν το β είναι στοιχείο του διατακτικού αριθμού α , τότε και το β είναι διατακτικός αριθμός.

Απ | $\exists \epsilon \omega \triangleright A(\alpha)$

'Αρα $\exists \beta(\alpha)$ άρα $\beta \subseteq \alpha$

άρα το β είναι $\kappa \Delta \Sigma$ (β). συμφωνία

για "κνηρωμένη διάταξη")

$\epsilon \omega \gamma \in \beta$
AND O

$\beta_\gamma = \gamma$ (?)

Βήμα 1 $\alpha_\beta = \beta$

Βήμα 2 $\left. \begin{array}{l} \gamma \in \beta \\ \gamma \in \beta \end{array} \right\} \text{ άρα } \gamma \in \alpha \text{ άρα } \alpha_\gamma = \gamma$

Βήμα 3 πάντα $(Ax)_y = Ay$
($\forall \kappa \in \Sigma A$, $\forall x \in A$, $\forall y \in Ax$)

πάρε $A = \alpha$ $x = \beta$ $y = \gamma$

· exm $(\alpha \beta)_\gamma = \alpha_\gamma$

dis $\beta_\gamma = \gamma \quad \square \quad (\theta)$

Ενότητα 37. Η Διάταξη των Διατακτικών Αριθμών

Ορολογία: Έστω α, β διατακτικοί αριθμοί. Λέμε $\beta \leq \alpha$
εννοούμε ότι \exists ομομορφισμός $f : \beta \rightarrow \alpha$.

Ένας σημαντικός στόχος μου στην ενότητα αυτή είναι να αποδείξω:

Θεώρημα 1: Αυτή η σχέση είναι ολική διάταξη.

Ως πρώτο βήμα, ας εξηγήσω σύντομα τι λέει το θεώρημα:

Λέει ότι η παραπάνω σχέση έχει την ανακλαστική, αντισυμμετρική, και μεταβατική ιδιότητα, καθώς και την ιδιότητα της ολικής διάταξης (αν $\Delta A(\alpha)$ και $\Delta A(\beta)$ τότε $\beta \leq \alpha$ ή $\alpha \leq \beta$).

Το επόμενο βήμα μου είναι να δώσω τις αποδείξεις όλων των παραπάνω εκτός της αντισυμμετρικότητας, που είναι πιο δύσκολη, και χρειάζεται δύο ενδιάμεσες αποδείξεις.

θα δούμε β ε ρ < > β > ρ
β ε ρ < > β > ρ

Η ανακλαστικότητα προκύπτει από το ότι η ταυτοτική $I : \alpha \rightarrow \alpha$ είναι ομομορφισμός.


Η μεταβατικότητα προκύπτει από το ότι η σύνθεση $g \circ f : \gamma \rightarrow \alpha$ είναι ομομορφισμός, αν ξεκινήσω με ομομορφισμούς $f : \gamma \rightarrow \beta$ και $g : \beta \rightarrow \alpha$.

Το ότι η διάταξη είναι ολική προκύπτει από το θεώρημα ύπαρξης ομομορφισμού.

Σας θυμίζω ότι η απόδειξη της αντισυμμετρικότητας αναβάλλεται για λίγο.

Λήμμα: Αν το β είναι υποσύνολο του διατακτικού αριθμού α τότε είναι αρχικό τμήμα του α .

Απ1 $\exists \alpha \omega \quad y < x \text{ σο } \alpha \quad \exists \Delta \text{ } \emptyset \quad y \in \beta \text{ ?}$

$\Delta A(\alpha) \rightarrow \left. \begin{array}{l} \in - \Delta \Sigma(\alpha) \\ y < x \text{ σο } \alpha \end{array} \right\} \rightarrow y \in X \left. \right\} \rightarrow y \in \beta$ 

$\Delta A(\beta) \rightarrow \left. \begin{array}{l} \mu \tau \beta(\beta) \\ x \in \beta \end{array} \right\} \rightarrow X \subseteq \beta$

Λήμμα: Αν το β είναι στοιχείο του διατακτικού αριθμού α τότε $\beta^+ \subseteq \alpha$.

Η απόδειξη είναι καλή εύκολη **άσκηση**.

Θεώρημα 2: Αν α, β είναι διατακτικοί αριθμοί τότε

$$\beta \subseteq \alpha \iff \beta \leq \alpha.$$

Απόδειξη του Ευθέως:

Έστω ότι $\beta \subseteq \alpha$. ΘΝΔΟ $\beta \leq \alpha$.

Αυτό είναι προφανές στην περίπτωση $\beta = \alpha$. Απομένει λοιπόν η περίπτωση $\beta \subset \alpha$.

Τότε το λήμμα λέει ότι το β είναι γνήσιο αρχικό τμήμα του α ,

άρα υπάρχει ο ομομορφισμός $J : \beta \rightarrow \alpha$.

Άρα η ανισότητα $\beta \leq \alpha$ είναι άμεση συνέπεια του ορισμού της διάταξης των διατακτικών αριθμών.

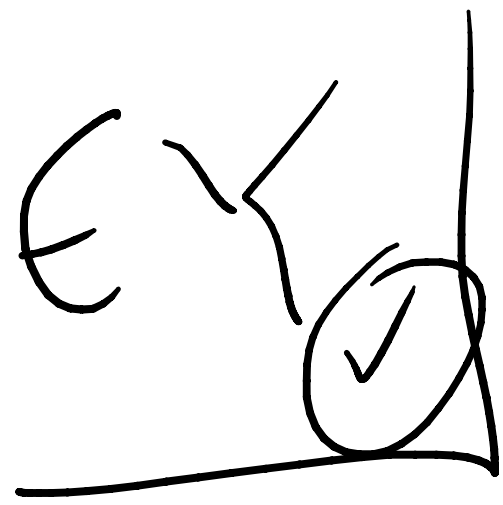
Αντιστροφή

Έστω $\beta \leq \alpha$

Θεωρεί $f: \beta \rightarrow \alpha$ συμφ

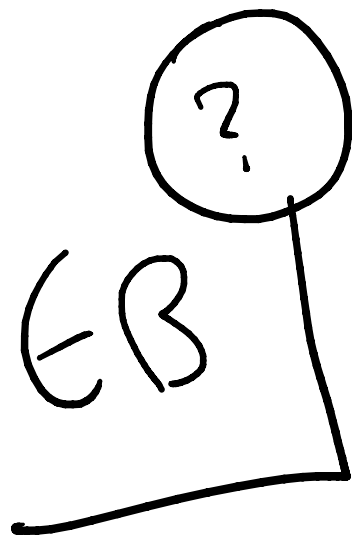
ANDO $\mu \in \forall E$ ω $x \in \beta$ $\text{ότι } \phi(x)$

όπου $\phi(x) : \begin{cases} x \in \alpha \\ f(x) = x \end{cases}$



$\exists \chi \omega \delta \in \delta. \gamma \in \beta \quad \tau. \omega.$

$\forall \delta < \gamma \in \beta \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta \in \alpha \\ f(\delta) = \delta \end{array} \right.$



$\gamma \in \alpha \quad (1)$
 $f(\gamma) = \gamma \quad (2)$

Τα $\delta < \gamma$ στο β

είναι τα $\delta \in \gamma$

'Αρα, από EV, $f[\gamma] = \gamma$

'Αρα $\gamma \subseteq \alpha$

Από προηγ. λήμμα, $\Rightarrow \gamma$ είναι αεχ. ζυ.
του α

I δx | $\gamma \neq \alpha$ An. I δx | με απττ
 έχω Join $\gamma = \alpha$

Θεωρώ τον $J: \gamma \rightarrow \beta$ (όπου, αν $\gamma = \beta$,
 είναι $J = I$)

έχω $\gamma \xrightarrow{J} \beta \xrightarrow{f} \gamma$

από "Cantor - Schar-Bernst. για $|\kappa| < \aleph_\Sigma$ "

βλέπω ότι το J είναι ισόμρ

ἀρα $J \in \Pi'$ ἀρα $J = \underline{I}_\gamma$ ἀρα $\gamma = \beta$


ατπ ανού $\gamma \in \beta$ διδ $\gamma \in \gamma$ ατπ

$(\forall A \quad A \notin A)$

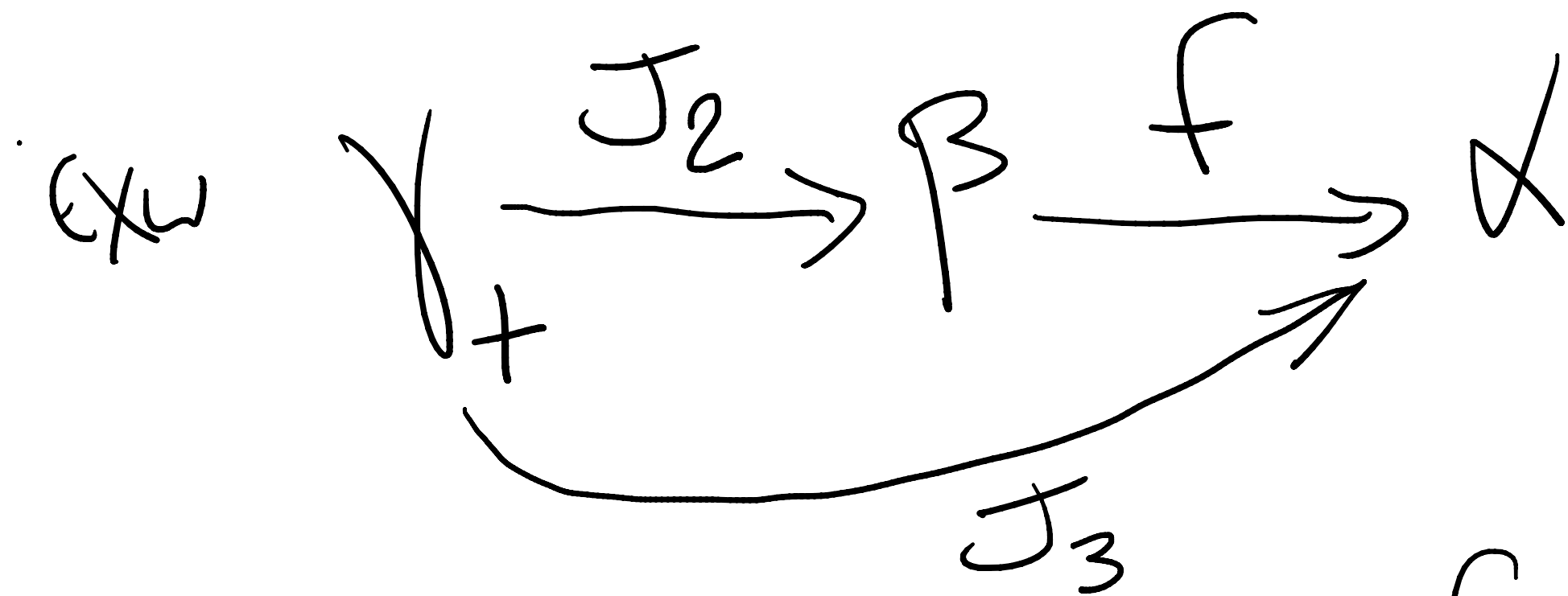
\square (16x)

'Αρα το απχ. γ του d είναι γνήσιο

'Εστω $\gamma = d_x$ (για κάποιο $x \in d$)

$\Delta A(d)$ άρα $d_x = x$ άρα $\gamma = x$ άρα $\gamma \in d$
 (1)

Ουπόθεση, $\gamma \in \beta$ άρα $\gamma_+ \subseteq \beta$



Μοναδικότητα: $J_3 = f \circ J_2$

$$\delta \delta J_3(x) = f(J_2(x)) \quad \forall x \in \gamma_+$$

άρα $\forall \gamma$
 $x = \gamma$

$$\delta(\gamma) = \gamma(\forall \gamma) \quad \text{άρα} \quad \gamma = f(\alpha) \quad \square$$

Ολοκλήρωση της Απόδειξης του Θεωρήματος 1: Απομένει να δείξω ότι, αν για τους διατακτικούς αριθμούς α, β ισχύει $\beta \leq \alpha$ και $\alpha \leq \beta$, τότε $\beta = \alpha$. Αυτό είναι άμεσο από το θεώρημα 2, αφού έχω $\beta \subseteq \alpha$ και $\alpha \subseteq \beta$, δηλαδή $\beta = \alpha$.

Θεώρημα 3: Αν α, β είναι διατακτικοί αριθμοί τότε

$$\beta = \alpha \iff \beta \approx \alpha.$$

Απόδειξη του Ευθέως: Αν $\beta = \alpha$ τότε η ταυτοτική συνάρτηση είναι ισομορφισμός.

Αυτό είναι κάτι που ισχύει πρακτικά πάντα στα μαθηματικά.

Είναι η ανακλαστική ιδιότητα της σχέσης ισοδυναμίας «είναι ισόμορφα».

Απόδειξη του Αντιστρόφου:

Αν $\beta \approx \alpha$ τότε υπάρχουν ομομορφισμοί και προς τις δυο κατευθύνσεις, $\beta \rightarrow \alpha$ και $\alpha \rightarrow \beta$.

Δηλαδή $\beta \leq \alpha$ και $\alpha \leq \beta$. Δηλαδή $\beta = \alpha$.
