Ενότητα 36. Διατακτικοί Αριθμοί

Νέες Συντομογραφίες σε αυτή την ενότητα:

$\in$-ΔΣ(α) σημαίνει το α είναι $\in$-διατεταγμένο σύνολο.

ΔΑ(α) σημαίνει το α είναι διατακτικός αριθμός.

Θεωρώ ένα καλώς διατεταγμένο σύνολο α, με διάταξη $\leq$ και γνήσια διάταξη $<$.

Θεωρώ επίσης και τις παρακάτω δυο ιδιότητες που ίσως έχει το α:

Ιδιότητα 1: $\forall \beta \in \alpha \quad \alpha_\beta = \beta$.

Ιδιότητα 2: $\forall \beta, \gamma \in \alpha \quad \gamma \in \beta \quad \Leftrightarrow \quad \gamma < \beta$.

Παρ | Έχει το α την ιδιότ. / ?

$\boxed{\alpha = 0}$ $(\forall \beta \in \emptyset)$ ... NAI

$\boxed{\alpha = 1 = \{0\}}$ "$\forall \beta \in \alpha$" "για $\beta = 0$"

πάντα $A_{O_A} = \emptyset$ άρα $\alpha_0 = \emptyset = 0$

$\alpha = 2 = \{0, 1\}$

"$\forall \beta \in \alpha$" για $\beta = 0$
και για $\beta = 1$ "

$\beta = 0$: ΝΑΙ όπως πριν

$\beta = 1$ $\alpha_\beta = \{\gamma \in \alpha : \gamma < 1\} = \{0\} = 1$

ΝΑΙ

Η ορολογία που χρησιμοποιώ είναι η εξής:
Αν κάποιο ΔΣ έχει την ιδιότητα 2, λέω ότι είναι $\in$-διατεταγμένο σύνολο.
Οπότε $\in$-ΔΣ(α) σημαίνει: Το α έχει την ιδιότητα 2.

Ένα $\in$-διατεταγμένο σύνολο καθορίζεται πλήρως από το σύνολο των στοιχείων του.
Πράγματι, η μόνη πληροφορία που λείπει είναι η διάταξη,
δηλαδή η πληροφορία, δεδομένων στοιχείων x και y, αν ισχύει ή όχι το $x < y$.
Όμως αυτό είναι ισοδύναμο με $x \in y$
(και το αν ισχύει ή όχι η πρόταση $x \in y$ είναι πλήρως καθορισμένο από τα x και y).

Σας θυμίζω και την ιδιότητα, που ίσως έχει ένα δεδομένο συνόλο S,
να είναι μεταβατικό σύνολο.
Χρησιμοποιώ τη συντομογραφία μτβ(S) να σημαίνει: Το S είναι μεταβατικό σύνολο.
Σας θυμίζω αυτό σημαίνει: $\forall x \in S \quad x \subseteq S$.

Θεώρημα: Αν το α είναι ΚΔΣ τότε:
Το α έχει την ιδιότητα 1 αν και μόνο αν έχει τις εξής δυο ιδιότητες: μτβ(α) και $\in$-ΔΣ(α).

Η απόδειξη είναι άσκηση.

Λύση | Έστω ότι $\alpha_\beta = \beta$ $(\forall \beta \in \alpha)$

μτβ(α) ? | Έστω $\beta \in \alpha$

Άρα $\alpha_\beta = \beta$

πάντα $A_x \subseteq A$

$\forall A$ πάρε $A = \alpha$

$\forall x \in A$ $\not\to$ $x = \beta$

διδ $\beta \subseteq \alpha$ ∎ (μτβ(α))

ε-$\Delta\Sigma(\alpha)$?

Έστω $\beta, \gamma \in \alpha$

Πάντα $y \in A_x \Longleftrightarrow y < x$

Παίρνω $A = \alpha \quad x = \beta \quad y = \gamma$

Έχω $\gamma \in \alpha_\beta \Longleftrightarrow \gamma < \beta$

άρα $\gamma \in \beta \Longleftrightarrow \gamma < \beta$ ■ (ευθύ)

Αντιστρόφως; έστω $\begin{cases} \psi\tau\beta(\alpha) \\ \in\text{-}\Delta\Sigma(\alpha) \end{cases}$

έστω $\beta \in \alpha$ όποτε $\alpha_\beta = \beta$?

$\alpha_\beta \subseteq \beta$?

έστω $\gamma \in \alpha_\beta$

άρα $\begin{cases} \gamma \in \alpha \\ \gamma < \beta \end{cases}$

Από $\in$-ΔΣ(α) έχω $\gamma \in \beta$ $\blacksquare$ ($\subseteq$)

$\boxed{\alpha_\beta \supseteq \beta \ ?}$

Ξέρω $\gamma \in \beta$

από μzβ(α) έχω $\beta \subseteq \alpha$ άρα $\gamma \in \alpha$

ξέρω $\begin{cases} \beta, \gamma \in \alpha \\ \gamma \in \beta \end{cases}$ από $\in$-ΔΣ(α) έχω $\gamma < \beta$ στο α

δηλ $\gamma \in \alpha_\beta$ $\blacksquare$ ($\supseteq$)

Ορολογία: Λέμε το α είναι διατακτικός αριθμός (συντ: ΔΑ(α))

$$\text{και εννοούμε:}\begin{cases} \text{το } \alpha \text{ είναι ΚΔΣ} \\ \text{μτβ}(\alpha) \\ \in\text{-ΔΣ}(\alpha) \end{cases}$$

Από το προηγούμενο θεώρημα βλέπουμε ότι:

Οι διατακτικοί αριθμοί είναι ακριβώς τα ΚΔΣ που έχουν την Ιδιότητα 1.

Άσκηση: Κάθε φυσικός αριθμός είναι διατακτικός αριθμός.

Άσκηση: Το ω είναι διατακτικός αριθμός.

$0 \quad 1 \quad 2 \quad \ldots\ldots \quad \omega$

Σας θυμίζω ότι κάθε ΚΔΣ A καθορίζει το γνωστό μας ΚΔΣ A^+.

Θεώρημα: Αν το α είναι διατακτικός αριθμός τότε και το α^+ είναι διατακτικός αριθμός.

Η απόδειξη είναι άσκηση. Υπόδειξη: Συγκρίνετε τα A_x και A_x^+.

ποιούς δ.α. ξέρουμε?

$$0, 1, 2, \dots, \omega, \omega+1 = \omega^+, \omega+2 = (\omega+1)^+ \dots$$

με "αρκετή υπομονή"

φτιάχνω κάθε $\omega+n$ (new)

$$\omega+\omega = \{0, \dots, \omega, \dots, \omega+n, \dots\} \quad ?$$

Θεώρημα: Αν το β είναι στοιχείο του διατακτικού αριθμού α, τότε και το β είναι διατακτικός αριθμός.

<u>Απ</u>| Έστω ΔΑ(α)

Άρα μτβ(α) άρα $\beta \subseteq \alpha$

άρα το β είναι ΚΔΣ (βλ. συμφωνία για "κληρονομημένη διάταξη")

Έστω $\gamma \in \beta$

ΑΝΔΟ $\boxed{B_\gamma = \gamma \; ?}$

Βήμα 1 $\alpha_\beta = \beta$

Βήμα 2 $\left.\begin{array}{l}\gamma \in \beta \\ \gamma \subseteq \beta\end{array}\right\}$ άρα $\gamma \in \alpha$ άρα $\alpha_\gamma = \gamma$

Βήμα 3 πάντα $(A_x)_y = A_y$

$(\forall$ ΚΔΣ A, $\forall x \in A$, $\forall y \in A_x)$

Πάρε $A = \alpha$ $\quad x = \beta$ $\quad y = \gamma$

Έχω $(\alpha_\beta)_\gamma = \alpha_\gamma$

dlδ $\beta_\gamma = \gamma$ $\blacksquare$ (θ)

Ενότητα 37. Η Διάταξη των Διατακτικών Αριθμών

Ορολογία: Έστω α, β διατακτικοί αριθμοί. Λέμε $\beta \leq \alpha$
εννούμε ότι $\exists$ ομομορφισμός $f : \beta \to \alpha$.

Ένας σημαντικός στόχος μου στην ενότητα αυτή είναι να αποδείξω:

Θεώρημα 1: Αυτή η σχέση είναι ολική διάταξη.

Ως πρώτο βήμα, ας εξηγήσω σύντομα τι λέει το θεώρημα:
Λέει ότι η παραπάνω σχέση έχει την ανακλαστική, αντισυμμετρική, και μεταβατική ιδιότητα,
καθώς και την ιδιότητα της ολικής διάταξης (αν $\Delta \mathrm{A}(\alpha)$ και $\Delta \mathrm{A}(\beta)$ τότε $\beta \leq \alpha$ ή $\alpha \leq \beta$).

Το επόμενο βήμα μου είναι να δώσω τις αποδείξεις όλων των παραπάνω
εκτός της αντισυμμετρικότητας, που είναι πιο δύσκολη, και χρειάζεται δύο ενδιάμεσες αποδείξεις.

Θα δούμε $\beta \in \alpha \Longleftrightarrow \beta \leq \alpha$

$\beta \in \alpha \Longleftrightarrow \beta < \alpha$

Η ανακλαστικότητα προκύπτει από το ότι η ταυτοτική $I : \alpha \to \alpha$ είναι ομομορφισμός.

Η μεταβατικότητα προκύπτει από το ότι η σύνθεση $g \circ f : \gamma \to \alpha$ είναι ομομορφισμός, αν ξεκινήσω με ομομορφισμούς $f : \gamma \to \beta$ και $g : \beta \to \alpha$.

Το ότι η διάταξη είναι ολική προκύπτει από το θεώρημα ύπαρξης ομομορφισμού.

Σας θυμίζω ότι η απόδειξη της αντισυμμετρικότητας αναβάλλεται για λίγο.

Λήμμα: Αν το β είναι υποσύνολο του διατακτικού αριθμού α τότε είναι αρχικό τμήμα του α.

Απ | Έστω $y < x$ στο α, $x \in \beta$. ΘΝΔΟ $y \in \beta$?

$$\left.\begin{array}{l} \Delta A(\alpha) \longrightarrow \varepsilon\text{-}\Delta\Sigma(\alpha) \\ y < x \text{ στο } \alpha \end{array}\right\} \longrightarrow y \in x$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta A(\beta) \longrightarrow \mu\tau\beta(\beta) \\ x \in \beta \end{array}\right\} \longrightarrow x \subseteq \beta$$

$$\left.\begin{array}{l} y \in x \\ x \subseteq \beta \end{array}\right\} \longrightarrow y \in \beta \ \blacksquare$$

Λήμμα: Αν το β είναι στοιχείο του διατακτικού αριθμού α τότε $\beta^+ \subseteq \alpha$.

Η απόδειξη είναι καλή εύκολη άσκηση.

Θεώρημα 2: Αν α, β είναι διατακτικοί αριθμοί τότε

$$\beta \subseteq \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \beta \leq \alpha.$$

Απόδειξη του Ευθέως:
Έστω ότι $\beta \subseteq \alpha$. ΘΝΔΟ $\beta \leq \alpha$.
Αυτό είναι προφανές στην περίπτωση $\beta = \alpha$. Απομένει λοιπόν η περίπτωση $\beta \subset \alpha$.
Τότε το λήμμα λέει ότι το β είναι γνήσιο αρχικό τμήμα του α,
άρα υπάρχει ο ομομορφισμός $J : \beta \to \alpha$.
Άρα η ανισότητα $\beta \leq \alpha$ είναι άμεση συνέπεια του ορισμού της διάταξης των διατακτικών αριθμών.

Αντιστρόφως

έστω $\beta \leq \alpha$

Θεωρώ $f : \beta \to \alpha$ σμφ

ΑΝΔΟ με Υ/Ε στο $x \in \beta$ ότι $\phi(x)$

όπου $\phi(x) : \begin{cases} x \in \alpha \\ f(x) = x \end{cases}$

ε γ ✓

έχω δεδ. $\gamma \in \beta$ τ.ω.

$\forall \delta < \gamma$ στο β $\begin{cases} \delta \in \alpha \\ f(\delta) = \delta \end{cases}$

ε β ?

$\gamma \in \alpha$ (1)

$f(\gamma) = \gamma$ (2)

Τα $\delta < \gamma$ στο β

είναι τα $\delta \in \gamma$

Άρα, από E_1^γ, $f[\gamma] = \gamma$

Άρα $\gamma \subseteq \alpha$

Από προηγ. λήμμα, το γ είναι αρχ. τμ. του α

Ισχ | $\gamma \neq \alpha$ — Αν. Ισχ | ΜΕ ΑΤΠ
Έστω λοιπόν $\gamma = \alpha$

Θεωρώ τον $J : \gamma \to \beta$ (όπου, αν $\gamma = \beta$,
έπεται $J = I$)

έχω $\gamma \xrightarrow{J} \beta \xrightarrow{f} \gamma$

από "Cantor - Schr.-Bernst. για ΙCΔΣ"

βλέπω ότι το J είναι ισομφ

άρα J επί άρα $J = I_\gamma$ άρα $\gamma = \beta$

ατπ αφού $\gamma \in \beta$ δηλ $\gamma \in \gamma$ ατπ

$(\forall A \quad A \notin A)$

(ισχ)

Άρα το αρχ. στ. γ του α είναι <u>γνήσιο</u>

Έστω $\gamma = \alpha_x$ (για κάποιο $x \in \alpha$)

$\Delta A(\alpha)$ άρα $\alpha_x = x$ άρα $\gamma = x$ άρα $\gamma \in \alpha$

$\blacksquare$ (1)

Θυμηθείτε, $\gamma \in \beta$ άρα $\gamma_+ \subseteq \beta$

έχω
$$\begin{tikzcd} \gamma_+ \arrow[r, "J_2"] \arrow[rr, bend right, "J_3"'] & \beta \arrow[r, "f"] & \alpha \end{tikzcd}$$

μοναδικότητα: $J_3 = f \circ J_2$

δηλ. $J_3(x) = f(J_2(x)) \quad \forall x \in \gamma_+$ άρα και για $x = \gamma$

$J(y) = y \ (\forall y)$ άρα $\gamma = f(\gamma)$ $\blacksquare$

Ολοκλήρωση της Απόδειξης του Θεωρήματος 1: Απομένει να δείξω ότι, αν για τους διατακτικούς αριθμούς α, β ισχύει $\beta \leq \alpha$ και $\alpha \leq \beta$, τότε $\beta = \alpha$.
Αυτό είναι άμεσο από το θεώρημα 2, αφού έχω $\beta \subseteq \alpha$ και $\alpha \subseteq \beta$, δηλαδή $\beta = \alpha$.

Θεώρημα 3: Αν α, β είναι διατακτικοί αριθμοί τότε

$$\beta = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \beta \approx \alpha.$$

Απόδειξη του Ευθέως: Αν $\beta = \alpha$ τότε η ταυτοτική συνάρτηση είναι ισομορφισμός.
Αυτό είναι κάτι που ισχύει πρακτικά πάντα στα μαθηματικά.
Είναι η ανακλαστική ιδιότητα της σχέσης ισοδυναμίας «είναι ισόμορφα».

Απόδειξη του Αντιστρόφου:
Αν $\beta \approx \alpha$ τότε υπάρχουν ομομορφισμοί και προς τις δυο κατευθύνσεις, $\beta \to \alpha$ και $\alpha \to \beta$.
Δηλαδή $\beta \leq \alpha$ και $\alpha \leq \beta$. Δηλαδή $\beta = \alpha$.