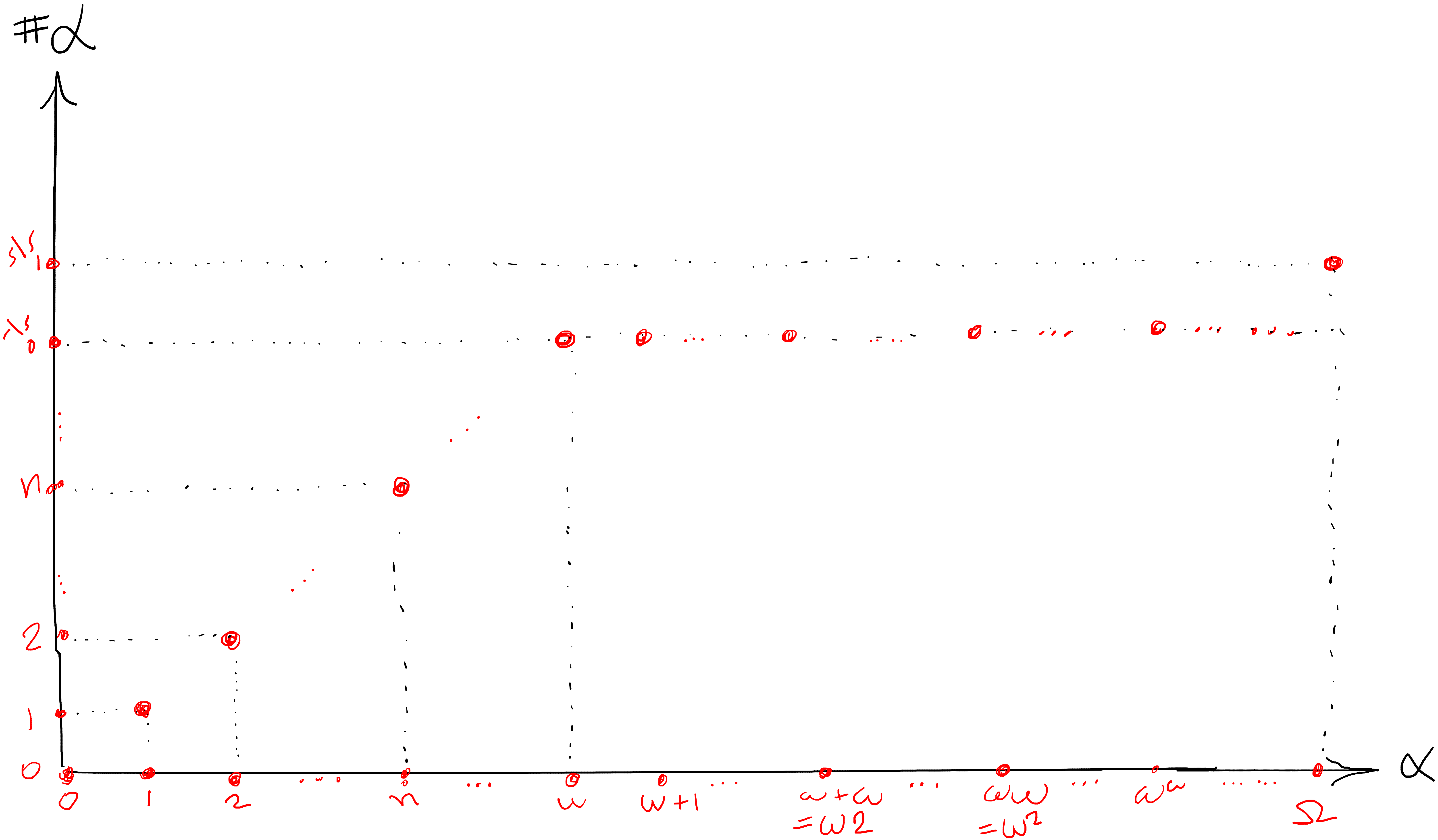
#α
$\aleph_1$
$\aleph_0$
n
2
1
0
α
0
1
2
n
ω
ω+1
ω+ω
=ω2
ωω
=ω²
ω^ω
Ω

Λήμμα: Αν α, β είναι διατακτικοί αριθμοί τότε

$$\beta \in \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \beta < \alpha.$$

Πριν αποδείξω το Λήμμα, ας δούμε τι πραγματικά λέει.
Όταν λέμε ότι το A είναι σύνολο διατακτικών αριθμών τότε εννοούμε το προφανές, δηλαδή ότι κάθε στοιχείο του A είναι διατακτικός αριθμός.

Συμφωνία: Αν το A είναι σύνολο διατακτικών αριθμών τότε, εκτός αν πω ρητά το αντίθετο, το θεωρώ ως ΔΣ χρησιμοποιώντας την διάταξη των διατακτικών αριθμών.

Θεώρημα 4: Αν α είναι διατακτικός αριθμός τότε
η διάταξη που έχει το α ως διατακτικός αριθμός
ταυτίζεται με τη διάταξη που έχει το α ως σύνολο διατακτικών αριθμών.

Απόδειξη του Θεωρήματος 4: Είναι άμεση από το Λήμμα, και την αφήνω ως άσκηση.

Απόδειξη του Λήμματος : Έστω ότι $\beta \in \alpha$. Από μεταβατικότητα, $\beta \subseteq \alpha$.
Από Θεώρημα 2, $\beta \leq \alpha$. Αφού κανένα σύνολο δεν ανήκει στον εαυτό του, $\beta \neq \alpha$. Άρα $\beta < \alpha$.

Αντιστρόφως, έστω ότι $\beta < \alpha$. Ειδικότερα, $\beta \leq \alpha$, άρα, από Θεώρημα 2, $\beta \subseteq \alpha$.
Από το προηγούμενο λήμμα, το β είναι αρχικό τμήμα του α.
Επειδή $\beta < \alpha$, ξέρω $\beta \neq \alpha$, άρα το β είναι γνήσιο αρχικό τμήμα του α.
Άρα το β γράφεται ως $\beta = \alpha_x$, για κάποιο $x \in \alpha$.
Αφού το α είναι διατακτικός αριθμός, $\alpha_x = x$, άρα $\beta = x$, άρα $\beta \in \alpha$.
Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του λήμματος.

Παρεμπιπτόντως, είχαμε αποδείξει το $n \notin n$ για φυσικούς αριθμούς, χωρίς το αξίωμα της θεμελίωσης.
Υπάρχει ανάλογη διασκεδαστική απόδειξη του $\alpha \notin \alpha$ για διατακτικούς αριθμούς, η εξής:
Αν το $x = \alpha$ ήταν στοιχείο του α, θα ήταν γνήσιο αρχικό τμήμα του,
και, αφού πάντα ίσα πράγματα είναι ισόμορφα,
το α θα ήταν ισόμορφο με κάποιο γνήσιο αρχικό τμήμα του, που είναι αδύνατον.

Ενότητα 38. Οι Διατακτικοί Αριθμοί είναι Καλώς Διατεταγμένοι

Ας εξηγήσω τι εννοώ στον τίτλο αυτής της ενότητας: Εννοώ ότι ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 1: Κάθε σύνολο διατακτικών αριθμών είναι ΚΔΣ.

Απόδειξη: Ας εξηγήσω τι εννοώ στη διατύπωση του θεωρήματος:
Εννοώ ότι, αν A είναι σύνολο διατακτικών αριθμών,
που το θεωρώ ως ΔΣ με τη διάταξη των διατακτικών αριθμών, τότε είναι ΚΔΣ.

Άρα η απόδειξη του Θεωρήματος 1 είναι άμεση συνέπεια του παρακάτω Θεωρήματος 2:

Θεώρημα 2: Κάθε μη-κενό σύνολο διατακτικών αριθμών έχει ελάχιστο στοιχείο.

Απόδειξη: Έστω A μη-κενό σύνολο διατακτικών αριθμών,
που, εννοείται, το θεωρώ ως ΔΣ με τη διάταξη των διατακτικών αριθμών.
Θέλω να δείξω ότι υπάρχει το $\min A$.
Θεωρώ $\alpha \in A$, και διακρίνω περιπτώσεις, $\alpha \cap A = \varnothing$ (περίπτωση 1) και $\alpha \cap A \neq \varnothing$ (περίπτωση 2).

Στην περίπτωση 1, αφήνω ως άσκηση ότι το α είναι το $\min A$.

Στην περίπτωση 2, θεωρώ το ελάχιστο στοιχείο α_0 του μη-κενού υποσυνόλου $\alpha \cap A$ του ΚΔΣ α.
Αφήνω ως άσκηση ότι το α_0 είναι το $\min A$.

Θεώρημα 3 (Χαρακτηρισμός των Διατακτικών Αριθμών):
Έστω α σύνολο. Τότε ΤΑΕΙ:
(1) Το α είναι διατακτικός αριθμός.
(2) Το α είναι μεταβατικό σύνολο διατακτικών αριθμών.

Απόδειξη του (1)⇒(2): Έστω ότι το α είναι διατακτικός αριθμός.
Από τον ορισμό του διατακτικού αριθμού, είναι μεταβατικό σύνολο.
Από προηγούμενο θεώρημα, κάθε στοιχείο του είναι διατακτικός αριθμός.

Απόδειξη του (2)⇒(1): Έστω ότι το α είναι μεταβατικό σύνολο διατακτικών αριθμών.
Εννοείται τότε το θεωρώ ως ΔΣ με τη διάταξη των διατακτικών αριθμών.
Από το Θεώρημα 1, είναι ΚΔΣ.
Είναι και μεταβατικό, δηλαδή ισχύει ότι μτβ(α).
Από τον ορισμό του διατακτικού αριθμού, ΑΝΔΟ ισχύει και ότι $\in$-ΔΣ(α).
Αυτό είναι το τελευταίο λήμμα της προηγούμενης ενότητας,
που λέει ότι μια γνήσια ανισότητα $\gamma < \beta$ διατακτικών αριθμών είναι ισοδύναμη με $\gamma \in \beta$.

Ενότητα 39. Η Κατασκευή των Πληθικών Αριθμών

Ορολογία: Έστω ξ διατακτικός αριθμός.
Λέμε ο διατακτικός αριθμός ξ είναι αρχικός

και εννοούμε ότι ($\forall$ διατακτικό αριθμό $\beta < \xi$) ΔΙΟ $\beta \sim \xi$.

Παραδείγματα:

(1) Κάθε φυσικός αριθμός είναι αρχικός διατακτικός αριθμός.

(2) Το ω είναι αρχικός διατακτικός αριθμός.

(3) Τα $\omega + 1, \omega + 2$ δεν είναι αρχικοί διατακτικοί αριθμοί.

(4) Εκτός του ω, κανένας άλλος αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός δεν είναι αρχικός.

Ορολογία: Έστω ξ διατακτικός αριθμός.
Λέμε το σύνολο ξ είναι πληθικός αριθμός
και εννοούμε ότι ο διατακτικός αριθμός ξ είναι αρχικός.

Άρα οι φυσικοί αριθμοί είναι πληθικοί αριθμοί. Επίσης το ω είναι πληθικός αριθμός.
Αλλά ούτε το $\omega + 1$, ούτε το $\omega + 2$,
ούτε κανένας άλλος αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός είναι πληθικός αριθμός.

Ορισμός: Έστω S σύνολο. Ο πληθικός αριθμός του S (συμβ. $^{\#}S$) ορίζεται ως

ο πληθικός αριθμός ξ τ.ω. $\xi \sim S$.

Δεν είναι καθόλου προφανές ότι ο πληθικός αριθμός του S είναι καλώς ορισμένος.
Αλλά ας το αναβάλλουμε για λίγο αυτό, και ας αποδείξουμε πρώτα τρία ενδιαφέροντα θεωρήματα.

Θεώρημα 1: $\aleph_0 = \omega$.

Απόδειξη: Έστω $\xi = \omega$. Ξέρουμε ότι το ξ είναι πληθικός αριθμός.
Έστω $S = \omega$. Άρα $\xi = S$ ειδικότερα $\xi \sim S$.
Άρα βρήκαμε πληθικό αριθμό ξ τ.ω. $\xi \sim S$. Άρα $^{\#}S = \xi$. Δηλαδή $^{\#}\omega = \omega$.
Η απόδειξη ολοκληρώθηκε αφού ο $\aleph_0$ ορίζεται ως $^{\#}\omega$.

Αξ Επιλογής!

Ας δούμε τώρα ότι μπορούμε να αποδείξουμε τις ιδιότητες των πληθικών αριθμών
που, ουσιαστικά, πήραμε ως αξιώματα στην ενότητα 21.
Μπορούμε δηλαδή να αποδείξουμε το πρώτο θεώρημα της ενότητας 21.
Έχουμε ήδη ορίσει τι είναι οι πληθικοί αριθμοί και τι είναι ο πληθικός αριθμός του συνόλου S.
Αυτό που απομένει είναι το παρακάτω:

Θεώρημα 2:
(1) $(\forall S_1, S_2) \qquad S_1 \sim S_2 \quad \Leftrightarrow \quad {}^{\#}S_1 = {}^{\#}S_2.$
(2) (∀ πληθικό αριθμό x) $\qquad {}^{\#}x = x.$
(3) $(\forall n \in \omega) \qquad {}^{\#}n = n.$

Απόδειξη του (3): Είναι ειδική περίπτωση του (2), επειδή κάθε φυσικός αριθμός είναι πληθικός αριθμός.

Απόδειξη του (2): Όπως το θεώρημα 1 (που ήταν η ειδική περίπτωση $x = \omega$).

Απόδειξη του (1): Για το ευθύ, έστω S_1 και S_2 σύνολα τ.ω. $S_1 \sim S_2$.
Έστω $\xi_1 = {}^{\#}S_1$ και $\xi_2 = {}^{\#}S_2$. ΘΝΔΟ $\xi_1 = \xi_2$.
Ο πληθικός αριθμός ξ_2 του S_2 χαρακτηρίζεται από τη σχέση $\xi_2 \sim S_2$,
είναι δηλαδή η μοναδική λύση του τύπου $x \sim S_2$ με x πληθικό αριθμό.
Από μεταβατικότητα της $\sim$, αφού $\xi_1 \sim S_1 \sim S_2$, έχουμε $\xi_1 \sim S_2$.
Άρα και το ξ_1 είναι λύση του παραπάνω τύπου, άρα $\xi_1 = \xi_2$.
Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη για το ευθύ.

Για το αντίστροφο, έστω S_1 και S_2 σύνολα τ.ω. ${}^{\#}S_1 = {}^{\#}S_2$.
Χρησιμοποιούμε πάλι ότι ο πληθικός αριθμός ξ_1 του S_1 χαρακτηρίζεται από τη σχέση $\xi_1 \sim S_1$, τώρα μας αρκεί απλώς ότι αληθεύει αυτή η σχέση. Παρόμοια, $\xi_2 \sim S_2$, όπου $\xi_2 = {}^{\#}S_2$.
Έχουμε ${}^{\#}S_1 = {}^{\#}S_2$, δηλαδή $\xi_1 = \xi_2$, άρα $\xi_1 \sim \xi_2$.
Εφαρμόζοντας συμμετρικότητα της $\sim$ έχουμε $S_1 \sim \xi_1 \sim \xi_2 \sim S_2$.
Εφαρμόζοντας μεταβατικότητα έχουμε $S_1 \sim S_2$, και η απόδειξη του θεωρήματος ολοκληρώθηκε.

Θεώρημα 3:

(1) Έστω x, y πληθικοί αριθμοί. Τότε

$$x \leq y \text{ ως αρχικοί διατακτικοί αριθμοί αν και μόνο αν } x \leq y \text{ ως πληθικοί αριθμοί.}$$

(2) Η διάταξη των πληθικών αριθμών είναι ολική.

Απόδειξη του (2): Είναι άμεση από το (1) αφού η διάταξη των διατακτικών αριθμών είναι ολική.

Απόδειξη του (1): Έστω ότι $\beta \leq \alpha$ είναι μια ανισότητα διατακτικών αριθμών.
Άρα $\beta \subseteq \alpha$, άρα ισχύει η ανισότητα πληθικών αριθμών $^{\#}\beta \leq {}^{\#}\alpha$.
Παίρνω $\beta = x$ και $\alpha = y$. Από το μέρος (2) του θεωρήματος 2, $^{\#}x = x$ και $^{\#}y = y$.
Άρα ισχύει η ανισότητα πληθικών αριθμών $x \leq y$.

Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει η ανισότητα πληθικών αριθμών $x \leq y$.
ΘΝΔΟ ισχύει η ανισότητα διατακτικών αριθμών $x \leq y$.
Με άτοπο, έστω λοιπόν ότι ΔΙΟ $x \leq y$ ως διατακτικοί αριθμοί.
Δηλαδή $y < x$ ως διατακτικοί αριθμοί. Ειδικότερα, $x \neq y$.

Ξέρω ότι $y < x$ ως διατακτικοί αριθμοί, άρα $y \leq x$ ως διατακτικοί αριθμοί.
Εφαρμόζοντας το ευθύ μέρος της απόδειξης, ξέρω ότι $y \leq x$ ως πληθικοί αριθμοί.
Άρα, ως προς τη διάταξη πληθικών αριθμών, $x \leq y$ και $y \leq x$.
Άρα $x = y$, άτοπο, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Ενότητα 40. Ο πληθικός αριθμός ενός συνόλου είναι καλώς ορισμένος

Ας κρατήσουμε ένα τυχαίο σύνολο S σταθερό,
και ας σκεφτούμε πως ορίσαμε τον πληθικό αριθμό του S.
Σας θυμίζω αυτό τον πληθικό αριθμό τον συμβολίζω με ${}^{\#}S$.

Ο ορισμός του ${}^{\#}S$ είναι ο εξής:
Θεωρώ ένα πληθικό αριθμό ξ που έχει την ιδιότητα ότι $\xi \sim S$.
Ορίζω τον ${}^{\#}S$ ως

$$
{}^{\#}S = \xi.
$$

Για να είναι αυτό καλώς ορισμένο, πρέπει να δείξω την ύπαρξη και την μοναδικότητα αυτού του ξ.

Απόδειξη της μοναδικότητας: Έστω ξ_1, ξ_2 πληθικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\xi_1 \sim S$ και $\xi_2 \sim S$.
ΘΝΔΟ $\xi_1 = \xi_2$. Με άτοπο, έστω λοιπόν ότι $\xi_1 \neq \xi_2$.

Τα ξ_1, ξ_2 είναι διατακτικοί αριθμοί, και η διάταξη των διατακτικών αριθμών είναι ολική.
Άρα $\xi_1 \leq \xi_2$ ή $\xi_2 \leq \xi_1$. Ας πούμε (δίχως βλάβη της γενικότητας) $\xi_1 \leq \xi_2$.
Από $\xi_1 \neq \xi_2$ έχω $\xi_1 < \xi_2$.

Από $\xi_1 \sim S$ και $\xi_2 \sim S$ έχω $\xi_1 \sim \xi_2$. Δηλαδή βρήκα κάποιο $\beta < \xi_2$ (το $\beta = \xi_1$) τέτοιο ώστε $\beta \sim \xi_2$.
Δηλαδή ο διατακτικός αριθμός ξ_2 δεν είναι αρχικός.
Δηλαδή το σύνολο ξ_2 δεν είναι πληθικός αριθμός. Αυτό είναι το άτοπο που ολοκληρώνει την απόδειξη.

Η απόδειξη της ύπαρξης δεν είναι τόσο απλή.
Χρειάζεται δυο σημαντικά θεωρήματα που δεν θα αποδείξω.

Θεώρημα Ύπαρξης του Διατακτικού Αριθμού ενός ΚΔΣ:
Αν το A είναι ΚΔΣ τότε υπάρχει διατακτικός αριθμός α τέτοιος ώστε $A \approx \alpha$.

Ας θυμηθούμε το πρόβλημα που μας απασχολεί:
Δεδομένου συνόλου S, γιατί υπάρχει πληθικός αριθμός ξ τέτοιος ώστε $\xi \sim S$;
Ο επόμενος στόχος μου είναι να εξηγήσω πως το προηγούμενο θεώρημα δίνει την απάντηση, στην ειδική περίπτωση που το S είναι το σύνολο στοιχείων κάποιου ΚΔΣ A (εννοω: σαν σύνολα, $A = S$, αλλά το A δεν είναι απλώς σύνολο αλλά ΚΔΣ).

Απόδειξη της ύπαρξης του ξ στην παραπάνω ειδική περίπτωση:
Θεωρώ διατακτικό αριθμό α τέτοιο ώστε $A \approx \alpha$.

Ισχυρισμός: Το $B = \{\beta \in \alpha^+ : \beta \sim A\}$ δεν είναι κενό.
Απόδειξη: Μια αύξουσα συνάρτηση είναι ειδικότερα συνάρτηση,
άρα ένας ισομορφισμός ΚΔΣ είναι ειδικότερα ισομορφισμός συνόλων.
Άρα η f που είναι «μάρτυρας» του $A \approx \alpha$ είναι και μάρτυρας του $A \sim \alpha$.
Ειδικότερα, $\alpha \sim A$. Με άλλα λόγια, $\alpha \in B$. $B \neq \emptyset$

Για να ολοκληρώσω την απόδειξη ότι υπαρχει το ξ που ψάχνω, έστω $\xi = \min B$.
ΑΝΔΟ $\xi \sim A$ και ότι το ξ είναι πληθικός αριθμός.

Το $\xi \sim A$ ισχύει επειδή το ξ, ως ελάχιστο στοιχείο του B, είναι ειδικότερα στοιχείο του B.

Είναι το ξ πληθικός αριθμός; Αν δεν ήταν, θα ήταν ισοπληθικό με κάποιο $\beta < \xi$.
Τότε θα είχα $\beta \sim \xi \sim A$ άρα και $\beta \sim A$ άρα και $\beta \in B$ (οι λεπτομέρειες είναι καλή εύκολη άσκηση).
Θα είχα δηλαδή στοιχείο γνήσια μικρότερο του ελαχίστου στοιχείου, που είναι άτοπο.

Θεώρημα (Αρχή Καλής Διάταξης):
Κάθε σύνολο είναι το σύνολο στοιχείων κάποιου ΚΔΣ.

Επιστρέφω στο πρόβλημα που μας απασχολεί:
Δεδομένου συνόλου S, γιατί υπάρχει πληθικός αριθμός ξ τέτοιος ώστε $\xi \sim S$;
Έχουμε δει την απάντηση στην ειδική περίπτωση που το σύνολο S προέρχεται από κάποιο ΚΔΣ A.
Τώρα η Αρχή Καλής Διάταξης μας λέει ότι αυτή η ειδική περίπτωση
είναι στην πραγματικότητα η γενική περίπτωση.

Αξ επιλ!