

Οι αποδείξεις πρέπει να γίνουν χρησιμοποιώντας μόνο ότι έχουμε αποδείξει στις διαλέξεις 1–5.

1. Δίνονται τρεις τύποι (που θα τους συμβολίζω, αντίστοιχα, με $\Phi_0(x)$, $\Phi_1(x)$, και $\Phi_2(x)$):

$x = 0$.

$(\exists a) \quad x = \{a\}$

$(\exists a)(\exists b) \quad a \neq b \text{ και } x = \{a, b\}$

Για $n = 0, 1, 2$, να αποδείξετε : $(\forall x) \quad x \sim n \Leftrightarrow \Phi_n(x)$.

2. Να βρείτε παρόμοιο $\Phi_3(x)$ έτσι ώστε το ζητούμενο της προηγούμενης άσκησης να ισχύει και για $n = 3$. Δεν χρειάζεται να αποδείξετε τίποτα σε αυτή την άσκηση.

3. Να αποδείξετε : $(\forall x) \quad x^0 = 1$.

4. Να αποδείξετε : $(\forall x) \quad x^1 \sim x$.

5. Να αποδείξετε : $(\forall x) \quad x^2 \sim x \times x$.

6. Να αποδείξετε : $(\forall A) \quad \mathcal{P}(A) \sim 2^A$.

Υπόδειξη: Η τιμή της ζητούμενης συνάρτησης στο υποσύνολο B του A είναι η λεγόμενη χαρακτηριστική συνάρτηση χ_B του B . ($\chi_B(a)$ είναι η λογική τιμή της πρότασης « $a \in B$ », τουλάχιστον αν συμφωνήσουμε ότι «1=αληθής, 0=ψευδής».)

7. Θα χρειαστείτε, δεδομένης $f : A_1 \rightarrow B_1$, την εικόνα $f[A_2]$ ενός υποσυνόλου A_2 του A_1 .

Σας θυμίζω πρώτα την αντίστροφη εικόνα $f^{-1}[B_2]$ ενός υποσυνόλου B_2 του B_1 :

$$f^{-1}[B_2] = \{x \in A_1 : f(x) \in B_2\}$$

η εικόνα είναι λίγο πιο περίπλοκη:

$$f[A_2] = \{y \in B_1 : (\exists x \in A_2) \quad y = f(x)\}$$

Έστω $A = 3$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Θεωρώ την $f : A \rightarrow B$ που ισούται με $\{(0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$. (Δηλαδή, η f «είναι η συνάρτηση $f(x) = x^2$ », τουλάχιστον αν θεωρήσω ως πεδίο ορισμού το A και αν « x^2 » έχει τη συνηθισμένη του σημασία, και όχι αυτή της άσκησης 5.)

Για κάθε $x \in A$ να απαντήσετε την ερώτηση: Ισχύει ότι $f(x) = f[x]$;

Μετά να αποδείξετε ότι η απάντησή σας για $x = 2$ είναι σωστή.