

ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

Σημειώσεις

Κ. Σκανδαλης
Πρακλειό 1990

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή	1
Κεφάλαιο 1. Αξιώματα. Πράξεις με συνολα.	
1.1 Αρχικές έννοιες	3
1.2 Η γλώσσα της θεωρίας συνολων	3
1.3 Το αξίωμα εκτασης. Εγκλεισμος	4
1.4 Το κενό συνολο	6
1.5 Ζευγη	6
1.6 Ένωση	8
1.7 Το σχημα υποσυνολων του Zermelo	10
1.8 Αλγεβρα συνολων	11
1.9 Δυναμοσυνολο	15
Άσκησεις	17
Κεφάλαιο 2. Σχέσεις. Συναρτήσεις.	
2.1 Συναρτήσεις και σχέσεις στα Μαθηματικά	18
2.2 Καρτεσιανο γινόμενο συνολων	18
2.3 Σχέσεις	20
2.4 Συναρτήσεις	23
2.5 Οικογενείες συνολων	26
2.6 Σχέσεις ισοδυναμίας	29
2.7 Διατάξεις	33
Άσκησεις	40
Κεφάλαιο 3. Οι φυσικοί αριθμοί.	
3.1 Οι φυσικοί αριθμοί ως συνολα	44
3.2 Το συνολο των φυσικων αριθμων	45
3.3 Διατάξη των φυσικων αριθμων	48
3.4 Η Αρχή Ελαχιστου	51
3.5 Η Αρχή Αναδρομής	52
3.6 Αριθμητική στο ω	54
3.7 Κωδικοποίηση ζευγων	55
3.8 Οι ακέραιοι, ρητοί και πραγματικοί αριθμοί	56
Άσκησεις	60

Κεφάλαιο 4. Οι πληθικοί αριθμοί.

4.1	Ισοπληθικά συνολα	63
4.2	Η ιδέα του πληθικού αριθμού	64
4.3	Πεπερασμένα συνολα	65
4.4	Αριθμησιμα συνολα	68
4.5	Πραξεις με πληθικούς αριθμούς	73
4.6	Συγκριση πληθικών αριθμών	77
	Ασκησεις	85

Κεφάλαιο 5. Οι διατακτικοί αριθμοί.

5.1	Καλές διαταξεις	89
5.2	Η Αρχή Υπερπεπερασμένης Επαγωγής	91
5.3	Συγκριση καλών διαταξεων	92
5.4	Διατακτικοί αριθμοί	94
5.5	Συγκριση διατακτικών αριθμών	97
5.6	Συνολα διατακτικών αριθμών	98
5.7	Το σχημα αντικαταστασης	100
5.8	Ο αριθμος Hartogs	104
5.9	Οριακοί διατακτικοί αριθμοί. Πραξεις με διατακτικούς αριθμούς.	105
5.10	Υπερπεπερασμένες ακολουθίες. Αρχή Υπερπεπερασμένης Αναδρομής.	107
5.11	Αρχικοί διατακτικοί αριθμοί. Η ιεραρχία των αλεφ.	113
	Ασκησεις	119

Κεφάλαιο 6. Το αξίωμα επιλογής.

6.1	Το αξίωμα επιλογής	124
6.2	Το Λήμμα των Kuratowski και Zorn	125
6.3	Η Αρχή Καλής Διαταξης	127
6.4	Οι πληθικοί αριθμοί στη θεωρία ZFC	128
6.4	Άλλες συνεπειες του αξιώματος επιλογής	130
6.6	Εφαρμογες της Αρχής Υπερπεπερασμένης Αναδρομής	131
	Ασκησεις	136

Παραρτημα. Τα αξιώματα της θεωρίας συνολων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι έννοιες "σύνολο" και "ανήκει" είναι από τις παλιότερες και πιο βασικές στα Μαθηματικά. Κάθε κλάδος των Μαθηματικών, εκτός από κάποια αντικείμενα, μελετά και συλλογές αντικειμένων. Εξετάζονται π.χ. σύνολα αριθμών, γεωμετρικών σχημάτων, συναρτήσεων κ.α.

Μέχρι το 19ο αιώνα κανείς δεν ασχολήθηκε σοβαρά με τη μελέτη των συνόλων. Πρώτος μελέτησε τα σύνολα ο Georg Cantor [1845-1918] και αυτός θεωρείται δημιουργός της θεωρίας συνόλων. Εξετάσε τα σύνολα ανεξαρτήτως από τη φύση των αντικειμένων τους. Χάρη στο έργο του Cantor και άλλων μαθηματικών (R.Dedekind, P.G.Dirichlet, B.Riemann) η θεωρία συνόλων εξελίχθηκε από βοηθητικό σε βασικό κλάδο των σύγχρονων Μαθηματικών.

Η διαλισθητική και απεριοριστή χρήση της έννοιας του συνόλου οδήγησε στις αρχές του 20ου αιώνα τη θεωρία συνόλων σε αντινομίες (παράδοξα). Το πιο γνωστό είναι το παραδόξο του Russell, που είναι συνέπεια της λεγόμενης αρχής αφαιρέσης. Η αρχή αυτή λέει: "Κάθε ιδιότητα ορίζει σύνολο". Συγκεκριμένα, αν P είναι μια ιδιότητα, τότε η συλλογή

$$\{x: P(x)\}$$

όλων των αντικειμένων που έχουν την ιδιότητα P , είναι σύνολο. Η αρχή αφαιρέσης ήταν κοινώς αποδεκτή και χρησιμοποιούταν ευρέως για κατασκευές συνόλων. Ο B.Russell το 1905 παρατήρησε ότι παίρνοντας το

$$V = \{x: x \notin x\}$$

θα έχουμε: $V \in V$ εάν και μόνον εάν $V \notin V$. Η βασική αρχή της θεωρίας συνόλων του 19ου αιώνα αναδειχθηκε λοιπόν εσφαλμένη.

Ένα άλλο παραδόξο (J.Richard 1905, G.Berry 1906) έδειξε ότι χρειάζεται προσοχή και στη χρήση της γλώσσας των Μαθηματικών. Έστω

n = ο μικρότερος φυσικός αριθμός που δεν ορίζεται από έκφραση της ελληνικής γλώσσας με λιγότερες από δεκαοκτώ λέξεις.

Ο αριθμός n ορίστηκε με μια έκφραση που έχει δεκαεπτά λέξεις!

Τότε έγινε φανερό η ανάγκη πιο προσεκτικής μελέτης της γλώσσας που χρησιμοποιούμε στα Μαθηματικά.

Η κρίση δεν αφορούσε λοιπόν μόνο στη θεωρία συνόλων αλλά γενικότερα στα Μαθηματικά. Οι αντινομίες γεννήσαν την ανάγκη αναθεώρησης και πιο προσεκτικής θεμελίωσης των Μαθηματικών. Πολλοί

κλαδοι των Μαθηματικων επανεξεταστηκαν και αναπτυχθηκαν ξανα με τη λεγομενη αξιωματικη μεθοδο. Για την αποφυγη των ασαφειων καθοριστηκαν αυστηροι κανονες για την μαθηματικη γλωσσα. Πολλες μαθηματικες θεωριες ξαναδιατυπωθηκαν σε αυστηρα τυποποιημενη γλωσσα.

Το πρωτο αξιωματικο συστημα για τη θεωρια συνολων δοθηκε το 1908 απο τον E.Zermelo [1871-1953]. Η χρηση της εννοιας συνολο ειναι περιορισμενη και υπαρχουν μερικοι καθορισμενοι κανονες σχηματισμου συνολων. Οι ιδεες του Zermelo ξεκαθαριστηκαν αργοτερα και επεκταθηκαν απο τους T.Skolem και A.Fraenkel το 1922. Η θεωρια ZF (απο τα ονοματα των Zermelo και Fraenkel) ειναι σημερα το πιο γνωστο αξιωματικο συστημα για τη θεωρια συνολων. Αλλες θεωριες συνολων φτιαχτηκαν το 1925 απο τον J.von Neuman και το 1940 απο τους K.Gödel και P.Bernays.

Στις αξιωματικες θεωριες τα παλια "παραδοξα" δεν οδηγουν σε αντιφασεις. Αντιθετα αποδεικνυεται απο τα αξιωματα οτι δεν υπαρχουν τα "περιεργα συνολα" που δημιουργησαν τις αντινομιες.

Το μαθημα αυτο ειναι μια εισαγωγη στην αξιωματικη θεωρια συνολων ZF. Δεν γινεται ομως σε αυστηρα τυποποιημενη μορφη. Χρησιμοποιουνται εκφρασεις της ελληνικης γλωσσας αλλα μονον οταν αυτες ισοδυναμουν με επιτρεπτες εκφρασεις μιας τυπικης γλωσσας. Αυτο μπορει ευκολα να το διαπιστωσει καθενας που θα ασχοληθει σοβαρα με τη θεωρια συνολων.

Οι σημειωσεις χωριζονται σε 6 κεφαλαια. Στο τελος καθε κεφαλαιου υπαρχουν ασκησεις.

Τα αξιωματα της θεωριας ZF αναφερονται στις σημειωσεις σταδιακα, καθως εμφανιζεται η αναγκη χρησης τους. Η πληρης λιστα τους βρισκεται στο τελος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΑΞΙΩΜΑΤΑ. ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΟΛΑ.

1.1 Αρχικές έννοιες.

Η θεωρία συνολων έχει ως αρχικές έννοιες την έννοια "σύνολο" και το κατηγορημα "ανήκει". Αυτές δεν ορίζονται.

Στα Μαθηματικά εξετάζονται σύνολα διαφορών αντικειμένων π.χ. αριθμών, σημείων, συναρτήσεων. Μελετούνται όμως και σύνολα συνολων, σύνολα συνολων συνολων κ.ο.κ. Στη θεωρία συνολων έχουμε ένα μόνον είδος αντικειμένων: τα σύνολα. Δεν υπάρχουν άλλα αντικείμενα εκτός από αυτά. Έτσι η γλώσσα της θεωρίας συνολων γίνεται απλούστερη. Αυτό δεν είναι καθόλου ενδειξη φτώχειας της θεωρίας συνολων, αφού ορίζονται (ως σύνολα!) όλα τα μαθηματικά αντικείμενα.

Θα χρησιμοποιούμε τη λέξη "κλάση", για να περιγράψουμε συλλογές αντικειμένων που μπορεί να μην είναι σύνολα. Οι κλάσεις που δεν είναι σύνολα δεν είναι αντικείμενα της θεωρίας. Λέγονται γνήσιες κλάσεις και θα εμφανίζονται μόνο στις περιγραφές και τα σχόλια. Έτσι π.χ. λέμε για ευκολία η κλάση όλων των συνολων, χωρίς αυτή, όπως θα δούμε αργότερα, να είναι σύνολο. Θα μιλάμε για κλάσεις αντικειμένων που έχουν μια ιδιότητα Φ . Δεν θα γράφουμε όμως $\{x: \Phi(x)\}$, αν δεν ξέρουμε ότι υπάρχει σύνολο που αποτελείται από όλα τα αντικείμενα με την ιδιότητα Φ .

Στην τυποποιημένη θεωρία συνολων η λέξη κλάση μπορεί να αποφευχθεί εντελώς.

1.2 Η γλώσσα της θεωρίας συνολων.

Για να συμβολίζουμε σύνολα, χρησιμοποιούμε ως μεταβλητές μικρά και κεφαλαία γράμματα του λατινικού και του ελληνικού αλφαβήτου. Για το "ανήκει" παραδοσιακά χρησιμοποιείται το σύμβολο $\in$ (από την αρχαία ελληνική λέξη "ἔστί").

Για να συμβολίσουμε το " x ανήκει στο y ", γράφουμε:

$$x \in y$$

που διαβάζεται επίσης "το x είναι στοιχείο του y ".

Η γλώσσα της θεωρίας συνολων χρησιμοποιεί και τα λογικά σύμβολα:

- σύμβολα λογικών συνδέσμων: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- ποσοδευκτες: $\exists$, $\forall$
- το σύμβολο ισότητας: $=$

καθώς και παρενθέσεις ως βοηθητικά σύμβολα.

Συμφωνά νε τους κανόνες της λογικής σχηματίζουμε τους λεγόμενους
 τύπους της γλώσσας. Αρχικοί τύποι είναι οι εκφράσεις μορφής

και $x \in y$
 $x = y$.

Πιο σύνθετοι τύποι σχηματίζονται ως εξής:

α) Αν φ είναι τύπος, τότε $\neg \varphi$ είναι επίσης τύπος.

β) Αν φ και ψ είναι τύποι, τότε και οι εκφράσεις

$\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi$

είναι τύποι.

γ) Αν φ είναι τύπος και x μεταβλητή, τότε οι εκφράσεις

$\exists x \varphi(x)$, $\forall x \varphi(x)$

είναι επίσης τύποι.

Για παραδοσιακούς λόγους αντί του $\neg(x \in y)$ γράφουμε $x \notin y$ και αντί
 του $\neg(x = y)$ γράφουμε $x \neq y$. Για την απλοποίηση δεχόμαστε μερικές ακόμα
 συντμήσεις τύπων. Θα γράφουμε

$(\exists x \in y) \varphi(x)$ αντί του $\exists x (x \in y \wedge \varphi(x))$,

$(\forall x \in y) \varphi(x)$ αντί του $\forall x (x \in y \rightarrow \varphi(x))$.

1.3 Το αξίωμα εκτασης. Εγκλεισμός.

Το πρώτο από τα αξιώματα της θεωρίας ZF εκφράζει μια βασική
 ιδιότητα της έννοιας του "ανήκει". Μας λέει πως αυτή συνδέεται με την
 ισοτιμία.

A1. Αξίωμα εκτασης (extensionality).

"Δύο σύνολα που έχουν τα ίδια στοιχεία είναι ίσα"

Συμβολικά

$$(\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)) \rightarrow A = B.$$

Το αξίωμα αυτό σχολιάζεται ως εξής: "Ένα σύνολο καθορίζεται πλήρως από
 τα στοιχεία του (τη λεγόμενη εκταση του)".

Παρατήρηση. Το αξίωμα εκτασης εκφράζεται συχνά ως εξής:

$$(\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)) \leftrightarrow A = B$$

και διαβάζεται: "Δύο σύνολα είναι ίσα εάν και μόνον εάν έχουν τα ίδια
 στοιχεία". Η αντιστροφή συνεπαγωγή του A1, δηλαδή η

$$A = B \rightarrow \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B),$$

είναι όμως λογικά αληθινός τύπος. Δεν χρειάζεται λοιπόν να την παρούμε
 ως αξίωμα της θεωρίας ZF.

Το αξίωμα εκτασης, όπως θα δούμε στη συνέχεια, εφαρμόζεται πολύ συχνά. Θα σημειώσουμε τώρα μερικά απλά παραδείγματα. Θα εμφανιστούν σ' αυτά συνολα, των οποίων η υπάρξη θα δικαιολογηθεί αργότερα.

Παράδειγμα 1. Τα συνολα $\{1,2\}$ και $\{2,1\}$ είναι ίσα, αφού έχουν τα ίδια στοιχεία. Ας προσεξουμε όμως ότι $1 \notin \{1\} \neq \{\{1\}\}$, διότι $1 \notin \{1\}$.

Παρατήρηση. Το γεγονός ότι ένα σύνολο δεν είναι στοιχείο του εαυτού του είναι διαισθητικά φανερό. Αυτό είναι συνέπεια ενός από τα αξιώματα της θεωρίας συνολων (του αξιώματος κανονικότητας). Το αξίωμα αυτό δεν θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια. Είναι διατυπωμένο στο παράρτημα ως Α9.

Παρατήρηση. Για οποιοδήποτε σύνολο A , η ιδιότητα " $x \in A$ " ορίζει σύνολο. Υπάρχει σύνολο που αποτελείται από όλα τα αντικείμενα μ' αυτή την ιδιότητα (το σύνολο A). Εχουμε δηλαδή $A = \{x : x \in A\}$.

Συχνά συμβαίνει όλα τα στοιχεία ενός συνόλου A να ανήκουν σ' ένα σύνολο B , χωρίς υποχρεωτικά τα A, B να είναι ίσα. Παρακάτω ορίζουμε τη σχέση του "περιεχέσθαι", που λέγεται και εγκλεισμός.

Ορισμός. Λέμε ότι το σύνολο A είναι υποσύνολο του συνόλου B και γράφουμε

$$A \subseteq B$$

οταν κάθε στοιχείο του A είναι στοιχείο του B . Ορίζουμε δηλαδή:

$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B).$$

Αν $A \subseteq B$ λέμε επίσης ότι το A περιέχεται στο B ή ότι το B περιέχει το A ή ακόμα ότι το B είναι υπερσύνολο του A .

Ας σημειώσουμε μερικές απλές ιδιότητες του εγκλεισμού.

Προταση 1. Για οποιαδήποτε συνολα A, B, C :

- i) $A \subseteq A$,
- ii) $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$,
- iii) $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \rightarrow A=B$.

Η συνεπαγωγή $A=B \rightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ είναι φανερά αληθινή. Έτσι λοιπόν μαζί με την τελευταία προταση έχουμε:

$$A=B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Ας προσεξουμε επίσης ότι ο εγκλεισμός δεν είναι συμμετρικός. Δεν ισχύει εν γενει το: $A \subseteq B \rightarrow B \subseteq A$.

Ορισμός. Λέμε ότι το A είναι γνήσιο υποσύνολο του B οταν A περιέχεται στο B αλλά το B δεν είναι υποσύνολο του A , δηλαδή οταν $A \subseteq B$ και $A \neq B$. Γράφουμε τότε $A \subset B$ ή $A \subsetneq B$.

1.4 Το κενό σύνολο.

Χρειαζομαστε ένα αξίωμα που θα εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός τουλάχιστον συνόλου. Αυτή δεν προκύπτει από το αξίωμα εκτασης. Δεχόμαστε το παρακάτω:

A2. Αξίωμα ύπαρξης κενού συνόλου.

"Υπάρχει ένα σύνολο που δεν έχει κανένα στοιχείο", δηλαδή
$$\exists x \forall y (y \notin x).$$

Από το αξίωμα εκτασης επεται ότι το σύνολο, για του οποίου την ύπαρξη μας λείει το A2, είναι μοναδικό. Πραγματικά αν a, b είναι σύνολα που δεν έχουν στοιχεία (δηλαδή $\forall x (x \notin a)$ και $\forall x (x \notin b)$), τότε τα a, b είναι ίσα διότι για οποιοδήποτε x έχουμε: $x \in a \leftrightarrow x \in b$.

Ορισμός. Το μοναδικό σύνολο που δεν έχει κανένα στοιχείο λέγεται κενό σύνολο και συμβολίζεται με $\emptyset$.

Εχουμε προφανώς: $\forall x (x \notin \emptyset)$. Άλλες απλές ιδιότητες του κενού συνόλου εκφράζει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2. Για κάθε A :

- i) $\emptyset \subseteq A$,
- ii) $A \subseteq \emptyset \rightarrow A = \emptyset$,
- iii) $\emptyset = \{x : x \neq x\}$.

Στη συνέχεια θα γνωρίσουμε μερικά αξιώματα που μας επιτρέπουν να κάνουμε κάποιες πράξεις με σύνολα. Με τη βοήθεια τους μπορούμε να σχηματίζουμε νέα σύνολα από ήδη υπάρχοντα.

1.5 Ζεύγη.

A3. Αξίωμα ζευγους.

"Για οποιαδήποτε σύνολα a, b υπάρχει ένα σύνολο του οποίου στοιχεία είναι τα a, b και μονον αυτά", δηλαδή

$$\exists z \forall t (t \in z \leftrightarrow t = a \vee t = b).$$

Από το αξίωμα εκτασης προκύπτει ότι για δοσμένα a, b υπάρχει μοναδικό σύνολο με στοιχεία τα a και b .

Ορισμός. Το σύνολο που έχει ως μοναδικά στοιχεία τα a και b το λέμε ζεύγος με στοιχεία a, b και το συμβολίζουμε

$$\{a, b\}.$$

Αν παρούμε $a=b$, ευκολα βλέπουμε απο τα παραπάνω οτι για καθε a υπάρχει ενα ακριβως συνολο με μοναδικο στοιχειο το a .

Ορισμος. Το συνολο που εχει ως μοναδικο στοιχειο το a λεγεται μονοσυνολο με στοιχειο a και συμβολιζεται με $\{a\}$.

Ειναι προφανες οτι:

$$x \in \{a\} \leftrightarrow x=a \quad \text{και} \quad \{a\} = \{x: x=a\}.$$

Εχουμε επισης:

$$\{a\} = \{a, a\}.$$

Το ζευγος $\{a, b\}$ το λεμε μη διατεταγμενο επειδη για οποιαδηποτε a, b εχουμε $\{a, b\} = \{b, a\}$. Συχνα ομως χρειαζομαστε, εχοντας δυο αντικειμενα, να παrouμε το ενα ως πρωτο και το αλλο ως δευτερο. Θα ορισουμε παρακατω το διατεταγμενο ζευγος $\langle x, y \rangle$ για οποιαδηποτε x, y ετσι ωστε να εχουμε την ιδιοτητα:

$$x \neq y \rightarrow \langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle.$$

Ενας δυνατος ορισμος ειναι ο εξης.

Ορισμος (Kuratowski, 1921). Για οποιαδηποτε x, y θετουμε:

$$\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Το συνολο $\langle x, y \rangle$ το λεμε διατεταγμενο ζευγος με στοιχεια τα x και y .

Το οτι ο ορισμος ειναι καταλληλος το δειχνει η ακολουθη προταση.

Προταση 3. Για καθε a, b, c, d :

$$\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \leftrightarrow a=c \wedge b=d.$$

Αποδειξη: Το $(\leftarrow)$ ειναι φανερο. Για το $(\rightarrow)$ ας υποθεσουμε οτι

$$(*) \quad \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}.$$

Απο το παραπάνω εχουμε $\{a\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\}$, αρα $\{a\} = \{c\}$ ειτε $\{a\} = \{c, d\}$.

Περιπτωση 1: Αν $\{a\} = \{c\}$, τοτε $a=c$ και η $(*)$ γινεται $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, d\}\}$. Επεται οτι $\{a, b\} \in \{\{a\}, \{a, d\}\}$ και συνεπws $\{a, b\} = \{a\}$ ειτε $\{a, b\} = \{a, d\}$. Αν ειναι $\{a, b\} = \{a\}$ εχουμε $b=a$ και απο την $(*)$ συμπεραινουμε οτι $\{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}, \{a, d\}\}$. Αρα $\{a, d\} = \{a\}$ και εχουμε $d=a=b$. Αν ειναι $\{a, b\} = \{a, d\}$, τοτε επισης $b=d$. Δειξαμε λοιπον οτι στην περιπτωση 1 παντα εχουμε $a=c$ και $b=d$.

Περιπτωση 2: Αν $\{a\} = \{c, d\}$ εχουμε αμεσως $a=c=d$. Η $(*)$ γινεται τοτε

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$$

και συνεπws $\{a, b\} = \{a\}$. Επεται οτι $a=b$. Αρα $a=d=c=d$. Τελικα και στην περιπτωση 2 εχουμε $a=c$ και $b=d$. ■

Πορίσμα. Αν $a \neq b$, τότε $\langle a, b \rangle \neq \langle b, a \rangle$.

Μπορούμε γενικότερα να ορίσουμε διατεταγμένες τριάδες, τετράδες κ.ο.κ. Θετώντας

$$\langle a, b, c \rangle = \langle \langle a, b \rangle, c \rangle$$

ευκολα διαπιστώνουμε ότι

$$\langle a, b, c \rangle = \langle x, y, z \rangle \leftrightarrow a = x \wedge b = y \wedge c = z.$$

Ομοια ορίζουμε

$$\langle a, b, c, d \rangle = \langle \langle a, b, c \rangle, d \rangle$$

και έχουμε τις αντιστοιχες ιδιότητες.

1.6 Ένωση.

Η δυνατότητα εκτέλεσης της διαισθητικά γνωστής πράξης ένωσης συνολων εξασφαλίζεται απο αντιστοιχο αξιωμα. Θα διατυπώσουμε πρώτα μια ασθενέστερη του μορφή για την ένωση δυο συνολων. Παρακατω θα γνωρίσουμε το γενικευμενο αξιωμα ένωσης.

A4'. Αξιωμα ένωσης.

"Για οποιαδήποτε συνολα A, B υπαρχει ενα συνολο του οποιου στοιχεια ειναι εκεινα που ανηκουν σε τουλαχιστον ενα απο τα A, B".

Συμβολικα

$$\exists C \forall t (t \in C \leftrightarrow t \in A \vee t \in B).$$

Ειναι προφανες οτι για δοσμενα συνολα A και B, υπαρχει μοναδικο συνολο με την παραπανω ιδιοτητα.

Ορισμος. Ένωση δυο συνολων A, B λεγεται το συνολο του οποιου στοιχεια ειναι εκεινα που ανηκουν στο A ή στο B (ή και στα δυο). Η ένωση των A, B συμβολιζεται με $A \cup B$.

Εχουμε λοιπον

$$x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

δηλαδη

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Μποουμε να ορισουμε γενικότερα την ένωση τριων, τεσσαρων συνολων κ.ο.κ. Θετουμε

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C,$$

$$A \cup B \cup C \cup D = (A \cup B \cup C) \cup D.$$

Χρησιμοποιωντας την ένωση συνολων μποουμε να ορισουμε τις μη διατεταγμενες τριάδες, τετράδες κ.ο.κ. Για δοσμενα a, b, c θετουμε:

$$\{a, b, c\} = \{a, b\} \cup \{c\}$$

και ευκολα βλεπουμε οτι

$$x \in \{a, b, c\} \leftrightarrow x=a \vee x=b \vee x=c,$$

δηλαδη

$$\{a, b, c\} = \{x: x=avx=bvx=c\}.$$

Ομοια, για οποιαδηποτε a, b, c, d θετουμε:

$$\{a, b, c, d\} = \{a, b, c\} \cup \{d\}$$

και εχουμε τις αντιστοιχες ιδιοτητες.

Συχνα ομως χρειαζεται να σχηματισουμε την ενωση μιας μεγαλυτερης συλλογης συνολων. Αυτο ειναι δυνατο με βαση το ακολουθο.

A4. Αξίωμα (γενικευμενης) ενωσης.

"Εστω A συνολο. Υπαρχει ενα συνολο στο οποιο ανηκουν τα στοιχεια των στοιχειων του A , και μονον αυτα".

Αν δουμε το A ως συνολο συνολων, το αξιωμα μας λεει οτι υπαρχει ενα συνολο με στοιχεια ακριβως εκεινα που ανηκουν στα στοιχεια του A . Για δοσμενο A , το συνολο αυτο ειναι μοναδικο.

Ορισμος. Το συνολο που αποτελειται απο τα στοιχεια των στοιχειων ενος συνολου A λεγεται ενωση του A και συμβολιζεται $\cup A$.

Εχουμε προφανως:

$$x \in \cup A \leftrightarrow \exists b(b \in A \wedge x \in b) \leftrightarrow (\exists b \in A)x \in b,$$

δηλαδη

$$\cup A = \{x: (\exists b \in A)x \in b\},$$

που διαβαζεται και ως εξης: "Στοιχεια της ενωσης του A ειναι εκεινα που ανηκουν σε τουλαχιστον ενα απο το στοιχεια του A ". Το αξιωμα ενωσης διατυπωνεται λοιπον συμβολικα:

$$\exists C \forall x(x \in C \leftrightarrow \exists b(b \in A \wedge x \in b)).$$

Παρατηρηση. Στην ειδικη περιπτωση $A = \{X, Y\}$ εχουμε

$$\cup \{X, Y\} = X \cup Y.$$

Ομοια

$$\cup \{X, Y, Z\} = X \cup Y \cup Z.$$

Στα Μαθηματικα χρησιμοποιουμε γενικευμενες ενωσεις της μορφης:

$\bigcup_{t \in T} X_t$ για "οικογενειες" συνολων $\{X_t: t \in T\}$. Θα ορισουμε αργοτερα την εννοια της οικογενειας συνολων. Η παραπανω ενωση θα ειναι η $\cup A$, οπου $A = \{X_t: t \in T\}$.

Σημειωνουμε μερικες ιδιοτητες της ενωσης.

Προταση 4. Για οποιαδηποτε t, A :

- i) Αν $t \in A$, τότε $t \subseteq A$,
- ii) $\cup \emptyset = \emptyset$,
- iii) $\cup \{a\} = a$.

1.7 Το σχημα υποσυνολων του Zermelo.

Τα αξιωματα που δεχθηκαμε μεχρι τωρα δεν μας δινουν τη δυνατοτητα εκτελεσης ολων των γνωστων απο την αφελη θεωρια συνολων πραξεων με τα συνολα οπως π.χ. τομη, διαφορα. Στη συνεχεια θα γνωρισουμε ενα νεο αξιωμα που, μεταξυ αλλων, θα κανει δυνατες τις παραπανω πραξεις. Αυτο ειναι μια περιορισμενη μορφη της Αρχης Αφαιρεσης του Frege. Μας επιτρεπει να σχηματιζουμε νεα συνολα ως συλλογες ολων των αντικειμενων που εχουν μια ιδιοτητα, αλλα μονον μεταξυ των στοιχειων ενος συνολου. Ας σημειωσουμε επισης οτι επιτρεπονται μονον ιδιοτητες που μπορουν να εκφραστουν απο τυπους της γλωσσας της θεωριας συνολων.

A7. Σχημα διαχωρισμου υποσυνολων.

Εστω $\Phi(x)$ τυπος.

"Για καθε συνολο A υπαρχει ενα συνολο B που αποτελειται απο εκεινα τα στοιχεια του A που εχουν την ιδιοτητα Φ ", δηλαδη

$$\exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge \Phi(x)).$$

Υπαρχει λοιπον και, απο το αξιωμα εκτασης, ειναι μοναδικο το συνολο $\{x: x \in A \wedge \Phi(x)\}$. Αυτο γραφεται πιο συντομα και ως εξης:

$$\{x \in A: \Phi(x)\}$$

και ειναι προφανως υποσυνολο του A . Εχουμε

$$t \in \{x \in A: \Phi(x)\} \leftrightarrow t \in A \wedge \Phi(t).$$

Παρατηρηση. Η αρχη αφαιρεσης μπορει να εφαρμοστει για "περιορισμενες" ιδιοτητες. Για οποιονδηποτε τυπο Ψ της γλωσσας και οποιονδηποτε συνολο A η ιδιοτητα

$$\Psi(x) \wedge x \in A$$

οριζει λοιπον (ακριβως ενα) συνολο.

Παρατηρηση. Το αξιωμα υποσυνολων του Zermelo λεγεται σχημα διοτι δεν μπορει να εκφραστει με εναν τυπο της γλωσσας της θεωριας συνολων. Για καθε Φ εχουμε ενα ξεχωριστο αξιωμα διαχωρισμου υποσυνολων.

Το σχημα υποσυνολων εφαρμοζεται συχνα ως εξης. Θελουμε να αποδειξουμε οτι για μια ιδιοτητα Φ υπαρχει το συνολο $\{x: \Phi(x)\}$. Για να το πετυχουμε αρκει να δειξουμε οτι υπαρχει ενα συνολο Y που περιεχει ολα

τα αντικείμενα με τη δοσμένη ιδιότητα Φ .

Θεώρημα 1. Εστω Φ τυπος. Εστω ότι υπάρχει ένα σύνολο Y τέτοιο ώστε:

$$\forall x(\Phi(x) \rightarrow x \in Y).$$

Τότε υπάρχει το σύνολο $\{x: \Phi(x)\}$.

Αποδείξη: Απο το σχήμα διαχωρισμού υποσυνολών υπάρχει το σύνολο

$$Z = \{x \in Y: \Phi(x)\}.$$

Ευκόλα ελέγχουμε ότι

$$x \in Z \leftrightarrow (x \in Y \wedge \Phi(x)) \leftrightarrow \Phi(x)$$

και έχουμε $Z = \{x: \Phi(x)\}$. ■

Παραδειγμα 2. Εστω R σύνολο. Θέλουμε να αποδείξουμε την υπάρξη του συνόλου που αποτελείται από τα πρώτα μέλη των διατεταγμένων ζευγών που είναι στοιχεία του R , δηλαδή το

$$\{x: x \text{ είναι πρώτο μέλος διατεταγμένου ζευγούς που ανήκει στο } R\} = \\ = \{x: \exists y \langle x, y \rangle \in R\}.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$(**) \quad \exists y \langle x, y \rangle \in R \rightarrow x \in UR.$$

Επειδή $\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, επεται ότι αν $\langle x, y \rangle \in R$, τότε $\{x\} \in UR$. Αφού $x \in \{x\}$ και $\{x\} \in UR$, έχουμε ότι $x \in UR$. Αποδείξαμε λοιπόν το (**). Συμφωνα με το θεώρημα 1, υπάρχει το ζητούμενο σύνολο

$$\{x: \exists y \langle x, y \rangle \in R\} = \{x \in UR: \exists y \langle x, y \rangle \in R\}.$$

Αργότερα θα δούμε και άλλες εφαρμογές του παραπάνω θεωρήματος.

Με βάση το σχήμα υποσυνολών μπορούμε να δείξουμε ότι το παραδοξο του Russell δεν δημιουργεί αντιφάση στη θεωρία συνολών.

Θεώρημα 2. Δεν υπάρχει σύνολο όλων των συνολών.

Αποδείξη: Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα σύνολο V , ώστε για κάθε σύνολο x να έχουμε $x \in V$. Απο το σχήμα υποσυνολών υπάρχει το σύνολο $\Delta = \{x \in V: x \notin x\}$. Για κάθε σύνολο y έχουμε

$$y \in \Delta \leftrightarrow (y \in V \wedge y \notin y) \leftrightarrow y \notin y$$

και συνεπώς $\Delta \in \Delta \leftrightarrow \Delta \notin \Delta$. Ατοπο. Μας οδήγησε σ' αυτό η υποθεση υπάρξης του συνόλου V όλων των συνολών. ■

1.8 Αλγεβρα των συνολών.

Θα δείξουμε παρακάτω πως μπορούν να οριστούν οι διαισθητικά γνωστες συνολοθεωρητικές πράξεις τομής και διαφοράς. Για τη δυνατότητα εκτέλεσης αυτών των πράξεων, δηλαδή για την δικαιολογήση υπάρξης των αντιστοιχών συνολών, δεν χρειαζομαστε ειδικά αξιώματα. Αυτή προκύπτει

απο τα αξιώματα που ήδη γνωρίσαμε.

Προταση 5. Εστω A, B συνολα. Υπαρχει μοναδικο συνολο στο οποιο ανηκουν τα κοινα στοιχεια των συνολων A, B , και μονου αυτα.

Αποδειξη: Θετουμε $C = \{x \in A : x \in B\}$ και εχουμε $x \in C \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$. Η μοναδικότητα, ως συνηθως, επεται απο το αξίωμα εκτασης. ■

Ορισμος. Το συνολο που αποτελειται απο τα κοινα στοιχεια των A, B το λεμε τομή των A, B και το συμβολιζουμε $A \cap B$.

Εχουμε

$$x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B,$$

δηλαδη

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Ορισμος. Λεμε οτι δυο συνολα ειναι ξενα (μεταξυ τους) οταν $A \cap B = \emptyset$.

Προταση 6. Εστω A, B συνολα. Υπαρχει μοναδικο συνολο στο οποιο ανηκουν εκεινα τα στοιχεια του συνολου A που δεν ανηκουν στο συνολο B , και μονου αυτα.

Αποδειξη: Θετουμε $D = \{x \in A : x \notin B\}$. ■

Ορισμος. Το συνολο που αποτελειται απο εκεινα τα στοιχεια του συνολου A που δεν ανηκουν στο συνολο B λεγεται διαφορα των συνολων A, B και συμβολιζεται με $A - B$.

Εχουμε

$$x \in A - B \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B,$$

δηλαδη

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Παρατηρηση. Προφανως $A \cap B = B \cap A$. Εν γενει ομως $A - B \neq B - A$, π.χ. $\emptyset - \{\emptyset\} \neq \{\emptyset\} - \emptyset$. Η διαφορα συνολων δεν ειναι λοιπον συμμετρικη πραξη.

Συμμετρικη διαφορα συνολων.

Θα ορισουμε τωρα μιαν αλλη συνολοθεωρητικη πραξη, τη λεγομενη συμμετρικη διαφορα συνολων.

Ορισμος. Εστω A, B συνολα. Συμμετρικη διαφορα τους λεγεται το συνολο

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A).$$

Η υπαρξη του συνολου $A \oplus B$, για οποιαδηποτε A και B ειναι φανερη. Ας σημειωσουμε μερικες βασικες ιδιοτητες της συμμετρικης διαφορας. Οι απλες αποδειξεις τους ειναι ασκησεις.

Προταση 7. Στοιχεια της συμμετρικης διαφορας των συνολων A, B ειναι εκεινα που ανηκουν σε ακριβως ενα απο τα συνολα A, B .

Προταση 8. Για οποιαδηποτε συνολα A, B, C :

- i) $A \cap B = \emptyset \rightarrow A \dot{\cup} B = A \cup B$,
- ii) $A \dot{\cup} A = \emptyset$,
- iii) $A \dot{\cup} \emptyset = A$,
- iv) $A \dot{\cup} B = B \dot{\cup} A$,
- v) $(A \dot{\cup} B) \dot{\cup} C = A \dot{\cup} (B \dot{\cup} C)$,
- vi) $A \cap (B \dot{\cup} C) = (A \cap B) \dot{\cup} (A \cap C)$.

Προταση 9. Για οποιαδηποτε συνολα A, B υπαρχει ακριβως ενα συνολο X τετοιο ωστε $A \dot{\cup} X = B$.

Αποδειξη: Θετουμε $X = A \dot{\cup} B$. ■

Συμπληρωμα συνολου.

Συχνα μας ενδιαφερουν οι συνολοθεωρητικες πραξεις περιορισμενες στα υποσυνολα ενος καθορισμενου συνολου U που καλειται χωρος η συμπαν. Τότε, εκτος απο τις πραξεις: $\cup, \cap, -, \dot{\cup}$ μπορουμε να ορισουμε και το λεγομενο συμπληρωμα συνολου (στον χωρο U).

Ορισμος. Για $A \subseteq U$ θετουμε $A^c = U - A$.

Ευκολα αποδεικνυνται οι παρακατω ιδιοτητες του συμπληρωματος:

Προταση 10. Εστω U συνολο. Για οποιαδηποτε υποσυνολα A, B του U :

- i) $A \cap A^c = \emptyset$, $A \cup A^c = U$,
- ii) $(A^c)^c = A$,
- iii) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,
- iv) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$,
- v) $A - B = A \cap B^c$.

Συνιστωσες.

Εστω οτι σ' ενα χωρο U εχουμε k υποσυνολα $A_1, A_2, \dots, A_k$. Ποσα διαφορετικα υποσυνολα του U μπορουμε να φτιαξουμε απο τα $A_1, A_2, \dots, A_k$ με τις συνολοθεωρητικες πραξεις που γνωρισαμε;

Για να απαντησουμε στο ερωτημα αυτο, θεωρουμε τα συνολα

$$(*) \quad A_1^{i_1} \cap A_2^{i_2} \cap \dots \cap A_k^{i_k},$$

οπου τα $i_1, i_2, \dots, i_k$ ειναι 0 ή 1. Δεχομαστε συμβατικα οτι $A^0 = A$ και $A^1 = A^c$. Τα συνολα μορφης $(*)$ λεγονται συνιστωσες. Υπαρχουν το πολυ 2^k διαφορετικες συνιστωσες. Ειναι φανερο οτι δυο διαφορετικες συνιστω-

σες είναι ξένες μεταξύ τους. Ευκολά μπορεί να αποδειχθεί ότι τα σύνολα A_j και A_j^c είναι ενώσεις συνιστωσών. Κάθε σύνολο που μπορεί να οριστεί στο U από τα $A_1, A_2, \dots, A_k$ με συνολοθεωρητικές πράξεις είναι ένωση κάποιων συνιστωσών. Όλες οι δυνατές ενώσεις είναι 2^{2^k} . Υπάρχουν λοιπόν 2^{2^k} ζητούμενα σύνολα.

Παρατήρηση. Στο επίπεδο μπορούμε να βρούμε k σύνολα $A_1, A_2, \dots, A_k$ έτσι ώστε όλες οι συνιστώσες να είναι μη κενές. Όλες οι δυνατές ενώσεις τους ορίζουν τότε ακριβώς 2^{2^k} διαφορετικά σύνολα.

Γενικευμένη τομή συνόλων.

Θα ορίσουμε τώρα μια ακόμα πράξη με σύνολα. Για ένα δόσμενο σύνολο A , θέλουμε να σχηματίσουμε το σύνολο που αποτελείται από όλα τα κοινά στοιχεία των στοιχείων του A , δηλαδή το

$$\{x: (\forall b \in A) x \in b\}.$$

Η υπαρκτή του τελευταίου συνόλου αποδεικνύεται πιο κάτω, με έναν όμως περιορισμό. Υποθέτουμε ότι το σύνολο A δεν είναι κενό. Το σύνολο αυτό το λέμε γενικευμένη τομή του A και το συμβολίζουμε $\bigcap A$.

Προτάση 11. Εστω $A \neq \emptyset$. Υπάρχει ένα μοναδικό σύνολο του οποίου στοιχεία είναι ακριβώς εκείνα που ανήκουν σε όλα τα στοιχεία του A .

Απόδειξη: Εστω b_0 οποιοδήποτε στοιχείο του A . Εχουμε προφανώς

$$((\forall b \in A) x \in b) \rightarrow x \in b_0.$$

Αρα υπάρχει το σύνολο $\{x: (\forall b \in A) x \in b\}$ (βλ. θεώρημα 1) και είναι υποσύνολο του b_0 . ■

Είναι φανερό ότι για $A \neq \emptyset$:

$$x \in \bigcap A \leftrightarrow (\forall b \in A) x \in b,$$

δηλαδή

$$\bigcap A = \{x: (\forall b \in A) x \in b\}.$$

Ευκολά επίσης βλέπουμε ότι για καθένα $b \in A$ ισχύει $\bigcap A \subseteq b$.

Παρατήρηση. Δεν ορίζεται η τομή του κενού συνόλου. Δεν υπάρχει δηλαδή το σύνολο $\bigcap \emptyset$. Πραγματικά, αν αυτό υπήρχε, τότε για οποιοδήποτε σύνολο x θα είχαμε $x \in \bigcap \emptyset$, και τούτο διότι για κάθε $b \in \emptyset$ ισχύει $x \in b$. Το $\bigcap \emptyset$ θα είχε λοιπόν ως στοιχεία όλα τα σύνολα, κάτι που είναι αδύνατο.

Τελειώνοντας αυτή τη παραγραφο αναφερόμαστε μερικές βασικές ιδιότητες των συνολοθεωρητικών πράξεων. Οι αποδείξεις τους είναι ευκόλες ασκήσεις.

Προταση 12. Για καθε A, B :

- i) $A \subseteq A \cup B$, $A \cap B \subseteq A$,
- ii) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$,
- iii) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$,
- iv) $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$,
- v) $A \cup (B - A) = A \cup B$, $A \cap (B - A) = \emptyset$.

Προταση 13. Για καθε A, B, C :

- i) $(A \cup B) \cap C = A \cap (B \cup C)$, $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$,
- ii) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
- iii) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$, $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

Προταση 14. Για καθε A, B, C :

- i) $A \subseteq B \rightarrow C - B \subseteq C - A$,
- ii) $A \subseteq B \rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$,
- iii) $A \subseteq B \rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$.

Προταση 15. Για καθε A, B :

- i) $A \subseteq B \rightarrow A \subseteq B \cup A$,
- ii) $\emptyset \neq A \wedge A \subseteq B \rightarrow \bigcap B \subseteq A$.

Αλλες ακομα ιδιοτητες περιεχουν οι ασκησεις (σελ.17).

1.9 Δυναμοσυνολο.

A5. Το αξιωμα του δυναμοσυνολου.

"Για καθε συνολο A υπαρχει ενα συνολο που αποτελείται ακριβως απο ολα τα υποσυνολα του A ". Συμβολικα

$$\exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \subseteq A).$$

Η μοναδικοτητα του παραπανω συνολου, για δοσμενο A , ειναι φανερη.

Ορισμος. Το συνολο ολων των υποσυνολων του συνολου A λεγεται δυναμοσυνολο του A και συμβολιζεται με $\mathcal{P}A$.

Εχουμε

$$x \in \mathcal{P}A \leftrightarrow x \subseteq A,$$

δηλαδη

$$\mathcal{P}A = \{x : x \subseteq A\}.$$

Ευκολα αποδεικνυονται τα ακολουθα.

Προταση 16. Για καθε A, B :

- i) $\emptyset \in \mathcal{P}A$,
- ii) $A \in \mathcal{P}A$,

iii) $A \subseteq B \rightarrow \mathcal{P}A \subseteq \mathcal{P}B$.

Παρατήρηση. Αν $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, τότε το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}A$ έχει 2^k στοιχεία.

Το αξίωμα του δυναμοσυνόλου είναι πολύ ισχυρό. Μας επιτρέπει να σχηματίσουμε παρα πολλά σύνολα.

Παραδειγμα 3. Εστω A σύνολο. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει το σύνολο $\{\{a\} : a \in A\}$ όλων των μονοσυνολών στοιχείων του A , δηλαδή το $\{y : (\exists a \in A) y = \{a\}\}$.

Παρατηρούμε ότι:

$$y = \{a\} \wedge a \in A \rightarrow y \subseteq A \rightarrow y \in \mathcal{P}A,$$

δηλαδή

$$(\exists a \in A) y = \{a\} \rightarrow y \in \mathcal{P}A.$$

Εφαρμόζοντας τώρα το θεώρημα 1 συμπεραίνουμε την υπαρκτή του ζητούμενου συνόλου.

Παραδειγμα 4. Δίδεται ένα σύνολο B . Υπάρχει το σύνολο $\{\mathcal{P}A : A \in B\}$ όλων των δυναμοσυνολών των στοιχείων του B . Ας παρατηρήσουμε ότι αν $X \subseteq A$ για κάποιο $A \in B$, τότε $X \subseteq \bigcup B$. Συνεπώς $X \in \mathcal{P}(\bigcup B)$. Άρα για καθένα $A \in B$ έχουμε ότι $\mathcal{P}A \subseteq \mathcal{P}(\bigcup B)$, επομένως $\mathcal{P}A \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup B))$. Δείξαμε λοιπόν ότι:

$$(\exists A \in B) x = \mathcal{P}A \rightarrow x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup B)).$$

Απο το θεώρημα 1 έχουμε την υπαρκτή του συνόλου

$$\{x : (\exists A \in B) x = \mathcal{P}A\},$$

που είναι το ζητούμενο σύνολο $\{\mathcal{P}A : A \in B\}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.1 Αποδειξτε ότι για οποιαδήποτε συνολα A, B, C, D :

- i) $A \cap B = A \leftrightarrow A \subseteq B \leftrightarrow A \cup B = B$, v) $A - (A \cap B) = A - B$,
- ii) $A \subseteq B \wedge C \subseteq D \rightarrow A \cup C \subseteq B \cup D$, vi) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$,
- iii) $A \subseteq B \wedge C \subseteq D \rightarrow A \cap C \subseteq B \cap D$, vii) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$,
- iv) $A \subseteq B \wedge C \subseteq D \rightarrow A - D \subseteq B - C$, viii) $A - (B \cup C) = (A - B) - C$.

1.2 Αποδειξτε τις προτάσεις 12 ως 15 από την σελίδα 15.

1.3 Ορίζουμε $(a, b) = \{\{\{a\}\}, \{\{b\}, \emptyset\}\}$. Αποδειξτε ότι:

$$(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

και συνεπώς ότι: $a \neq b \rightarrow (a, b) \neq (b, a)$.

1.4 Αποδειξτε ότι αν δεχθούμε τα αξιώματα της θεωρίας ZF εκτός από το $A2$ (αξίωμα υπαρξης κενού συνόλου) και ακόμα την πρόταση:

"Υπάρχει τουλάχιστον ένα σύνολο",

τότε μπορούμε να αποδείξουμε το $A2$.

1.5 Βρείτε τα δυναμοσύνολα των παρακάτω συνόλων:

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}.$$

1.6 Αποδειξτε ότι για κάθε σύνολο A :

$$i) \bigcup \mathcal{P}A = A,$$

$$ii) A \subseteq \mathcal{P}A.$$

Πότε στο ii) έχουμε ισότητα;

1.7 Αποδειξτε ότι για οποιαδήποτε A, B :

$$i) \mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B),$$

$$ii) \mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B).$$

Πότε στο ii) έχουμε ισότητα;

1.8 Εξετάστε αν για οποιαδήποτε a, b ισχύει:

$$i) a \in b \rightarrow \mathcal{P}a \in \mathcal{P}b;$$

$$ii) a \subseteq b \rightarrow \mathcal{P}a \subseteq \mathcal{P}b;$$

Εξετάστε αν ισχύουν τα αντιστροφά. Δείξτε επίσης ότι $\mathcal{P}a = \mathcal{P}b \rightarrow a = b$.

1.9 Αποδειξτε ότι για οποιαδήποτε A, B υπάρχουν τα σύνολα: $\{A \cap x : x \in B\}$ και $\{A \cup x : x \in B\}$. Δείξτε ότι

$$i) A \cap \bigcup B = \bigcup \{A \cap x : x \in B\},$$

$$ii) \text{ για } B \neq \emptyset: A \cup \bigcap B = \bigcap \{A \cup x : x \in B\}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΣΧΕΣΕΙΣ. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

2.1 Συναρτήσεις και σχέσεις στα Μαθηματικά.

Μια από τις πιο σημαντικές έννοιες των Μαθηματικών είναι η έννοια της συναρτήσεως. Συναρτήσεις μελετά από παλιά κάθε κλάδος των Μαθηματικών. Μεχρι τις αρχές του 20ου αιώνα δεν υπήρχε όμως ικανοποιητικός ορισμός αυτής της έννοιας. Οι μαθηματικοί εννοούσαν ως συναρτήσεις κάποιες αντιστοιχισεις αντικειμενων σε αντικειμενα που περιγραφονται απο συγκεκριμενους κανονες-"συνταγες": τυπους, πινακες, γραφικες παραστασεις. Καθως αναπτυσσοντουσαν τα Μαθηματικα, εμφανιζοντουσαν συνεχως νεα παραδειγματα συναρτησεων και καποια απο αυτα δεν δινονταν απο κανονες σαν τους παραπανω.

Μια πραγματικη συναρτηση πραγματικης μεταβλητης μπορει πληρως να περιγραφει απο το λεγομενο γραφημα της. Αυτο ειναι ενα υποσυνολο του επιπεδου που αποτελειται απο ολα τα διατεταγμενα ζευγη $\langle x, y \rangle$ με $y=f(x)$. Ειναι χαρακτηριστικο οτι, για καθε x του πεδιου ορισμου μιας συναρτησης f , στο γραφημα της f υπαρχει ακριβως ενα ζευγαρι με πρωτη συντεταγμενη x .

Στηριζομενη στο παραπανω, η θεωρια συνολων δινει εναν αυστηρο και απλο ορισμο της έννοιας της συναρτήσεως (Peano, 1911). Πριν όμως τον γνωρισουμε θα ασχοληθουμε με μια γενικότερη και εξισου σημαντικη μαθηματικη έννοια, την έννοια της σχέσης. Καποιες σχέσεις, οπως οι διαταξεις και οι σχέσεις ισοδυναμιας παιζουν σπουδαιο ρολο στα Μαθηματικα. Θα μελετησουμε μονο τις διμελεις σχέσεις που κυριως συνανταμε στα Μαθηματικα. Μια τετοια σχεση μπορει να ταυτιστει με ενα συνολο διατεταγμενων ζευγων: συγκεκριμενα, με το συνολο των $\langle x, y \rangle$, για τα οποια το x βρισκεται σε σχεση με το y . Οι σχέσεις ταυτιζονται λοιπον με τα γραφηματα τους.

Για την καλυτερη κατανοηση των εξεταζομενων εννοιων, θα χρησιμοποιοησουμε στα παραδειγματα αυτου του κεφαλαιου και συνολα των οποιων η υπαρξη θα δικαιολογηθει αργότερα.

2.2 Καρτεσιανο γινομενο συνολων.

Προταση 1. Εστω A, B συνολα. Υπαρχει (και ειναι μοναδικο) ενα συνολο που αποτελειται απο ολα τα ζευγη $\langle a, b \rangle$ με $a \in A$ και $b \in B$. Υπαρχει δηλαδη το συνολο $\{\langle a, b \rangle : a \in A, b \in B\}$.

Αποδειξη: Παρατηρούμε ότι αν $a \in A$ και $b \in B$, τότε $\{a\} \subseteq A, \{a, b\} \subseteq A \cup B$ και συνεπώς $\{a\} \in \mathcal{P}(A \cup B), \{a, b\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Επεται ότι $\{\{a\}, \{a, b\}\} \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$, άρα $\langle a, b \rangle \in \mathcal{PP}(A \cup B)$. Βλέπουμε λοιπόν ότι

$$(\exists a \in A)(\exists b \in B)x = \langle a, b \rangle \rightarrow x \in \mathcal{PP}(A \cup B).$$

Θετώντας τώρα:

$$C = \{x \in \mathcal{PP}(A \cup B) : (\exists a \in A)(\exists b \in B)x = \langle a, b \rangle\},$$

εχουμε

$$x \in C \leftrightarrow (\exists a \in A)(\exists b \in B)x = \langle a, b \rangle,$$

δηλαδή

$$C = \{\langle a, b \rangle : a \in A, b \in B\}.$$

Το σύνολο C έχει λοιπόν τη ζητούμενη ιδιότητα. Η μοναδικότητα του επεται από το αξίωμα εκτασης. ■

Ορισμός. Εστω A, B σύνολα. Καρτεσιανό γινόμενο των A, B λέμε το σύνολο

$$A \times B = \{\langle a, b \rangle : a \in A, b \in B\}.$$

Παράδειγμα 1.

$$i) \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \times \{a, b, c\} = \{\langle \emptyset, a \rangle, \langle \emptyset, b \rangle, \langle \emptyset, c \rangle, \langle \{\emptyset\}, a \rangle, \langle \{\emptyset\}, b \rangle, \langle \{\emptyset\}, c \rangle\},$$

$$ii) \mathbb{Z} \times \{1, 2\} = \{\langle x, 1 \rangle : x \in \mathbb{Z}\} \cup \{\langle x, 2 \rangle : x \in \mathbb{Z}\},$$

$$iii) \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{\langle x, y \rangle : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\},$$

$$iv) \emptyset \times A = A \times \emptyset = \emptyset.$$

Αν έχουμε $A=B$, τότε αντί του $A \times A$ γράφουμε A^2 . Το σύνολο A^2 το λέμε καρτεσιανό τετράγωνο του A .

Μπορούμε να ορίσουμε και καρτεσιανά γινόμενα περισσότερων από δύο συνόλων. Για οποιαδήποτε σύνολα X, Y, Z θετούμε

$$X \times Y \times Z = (X \times Y) \times Z$$

και έχουμε:

$$t \in X \times Y \times Z \leftrightarrow t \in (X \times Y) \times Z \leftrightarrow (\exists a \in X \times Y)(\exists z \in Z)t = \langle a, z \rangle \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\exists x \in X)(\exists y \in Y)(\exists z \in Z)t = \langle \langle x, y \rangle, z \rangle \leftrightarrow (\exists x \in X)(\exists y \in Y)(\exists z \in Z)t = \langle x, y, z \rangle,$$

δηλαδή

$$X \times Y \times Z = \{\langle x, y, z \rangle : x \in X, y \in Y, z \in Z\}.$$

Ομοία ορίζουμε:

$$X \times Y \times Z \times U = (X \times Y \times Z) \times U$$

και έχουμε

$$X \times Y \times Z \times U = \{\langle x, y, z, u \rangle : x \in X, y \in Y, z \in Z, u \in U\}.$$

Ορίζονται επίσης τα σύνολα A^3, A^4 κ.ο.κ. ως $A \times A \times A$, $A \times A \times A \times A$ αντίστοιχα.

2.3 Σχέσεις.

Ορισμός. Διμελής σχέση λέγεται κάθε σύνολο διατεταγμένων ζευγών.

Εξετάζονται επίσης τριμελείς, τετραμελείς κ.ο.κ. σχέσεις που ορίζονται αντίστοιχα ως σύνολα διατεταγμένων τριάδων, τετραδών κ.ο.κ. Εδώ θα ασχοληθούμε μόνο με τις διμελείς σχέσεις και θα τις λέμε απλώς σχέσεις.

Ένα σύνολο είναι λοιπόν σχέση εάν και μόνον εάν κάθε στοιχείο του είναι διατεταγμένο ζεύγος. Λόγω παραδοχής, για το $\langle x, y \rangle \in R$ θα γράφουμε και xRy .

Παραδειγμα 2.

i) Για οποιαδήποτε σύνολα A, B , κάθε υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $A \times B$ είναι σχέση. Ειδικά, τα σύνολα $A \times B$ και $\emptyset$ είναι σχέσεις.

ii) Για οποιοδήποτε σύνολο A , το σύνολο $I_A = \{\langle a, a \rangle : a \in A\}$ είναι μια σχέση. Αποτελείται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη $\langle a, b \rangle$ στοιχείων του A με $a=b$ και ονομάζεται σχέση ισοτιμίας στο σύνολο A . Εχουμε δηλαδή

$$I_A = \{\langle x, y \rangle \in A \times A : x=y\}.$$

iii) Η σχέση διαιρετότητας στους ακέραιους αριθμούς είναι το σύνολο

$$\Delta = \{\langle m, n \rangle : m, n \text{ είναι ακέραιοι και } m \text{ διαιρεί το } n\}.$$

iv) Η ανισότητα και η γνήσια ανισότητα στους πραγματικούς αριθμούς είναι αντίστοιχα τα σύνολα

$$\begin{aligned} \leq_{\mathbb{R}} &= \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : x \text{ είναι μικρότερο ή ίσο } y\}, \\ <_{\mathbb{R}} &= \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : x \text{ είναι μικρότερο από } y\}, \end{aligned}$$

Ξερούμε ότι κάθε υποσύνολο ενός καρτεσιανού γινομένου είναι σχέση. Παρακάτω θα δούμε ότι κάθε σχέση είναι υποσύνολο κάποιου καρτεσιανού γινομένου.

Προταση 2. Εστω R σχέση. Υπάρχουν μοναδικά σύνολα A και B τέτοια ώστε:

$$x \in A \leftrightarrow \exists y \ xRy \quad \text{και} \quad y \in B \leftrightarrow \exists x \ xRy,$$

δηλαδή $A = \{x : \exists y \ xRy\}$ και $B = \{y : \exists x \ xRy\}$.

Αποδείξη: Στο παραδειγμα 2 του κεφαλαίου 1 είδαμε ότι για κάθε σύνολο R υπάρχει το σύνολο των πρώτων συντεταγμένων διατεταγμένων ζευγών που ανήκουν στο R . Ομοια αποδεικνύεται και η ύπαρξη του συνόλου των δευτέρων συντεταγμένων διατεταγμένων ζευγών που είναι στοιχεία του R . ■

Ορισμοί. Εστω R σχέση. Πεδίο ορισμού της σχέσης R λεμε το συνολο

$$\text{dom}(R) = \{x: \exists y \ xRy\}.$$

Πεδίο τιμών της σχέσης R λεμε το συνολο

$$\text{rng}(R) = \{y: \exists x \ xRy\}.$$

Πεδίο της σχέσης R λεμε το συνολο

$$\text{fld}(R) = \text{dom}(R) \cup \text{rng}(R).$$

Παρατήρηση. Για οποιαδήποτε σχέση R τα συνολα $\text{dom}(R)$, $\text{rng}(R)$, $\text{fld}(R)$ είναι μοναδικα. Ισχυει προφανως:

$$R \subseteq \text{dom}(R) \times \text{rng}(R) \subseteq \text{fld}(R) \times \text{fld}(R).$$

Επισης, για οποιαδήποτε υπερσυνολα X, Y των $\text{dom}(R)$ και $\text{rng}(R)$ αντιστοιχα, εχουμε $R \subseteq X \times Y$. Ομοια, $R \subseteq Z^2$, για καθε υπερσυνολο Z του $\text{fld}(R)$.

Ορισμοί. Εστω R σχέση. Αν $R \subseteq A \times B$, τοτε λεμε οτι η R είναι σχέση μεταξύ των στοιχειων των A και B . Αν $R \subseteq A^2$, τοτε λεμε οτι η R είναι σχέση στο συνολο A .

Καθε σχέση είναι προφανως σχέση μεταξύ των στοιχειων του πεδιου ορισμου και πεδιου τιμων της. Είναι επισης σχέση στο πεδιο της.

Θα ορισουμε τωρα μερικες εννοιες που αφορουν στις σχεσεις.

Ορισμος. Εστω R σχέση. Τη σχέση $R^{-1} = \{\langle y, x \rangle : xRy\}$ τη λεμε αντιστροφή σχέσης της R .

Για να δικαιολογησουμε την υπαρξη του συνολου R^{-1} , αρκει να παρατηρησουμε οτι

$$\langle x, y \rangle \in R \rightarrow x \in \text{dom}(R) \wedge y \in \text{rng}(R) \rightarrow \langle y, x \rangle \in \text{rng}(R) \times \text{dom}(R).$$

Υπαρχει λοιπον το ζητουμενο συνολο $\{\langle y, x \rangle : \langle x, y \rangle \in R\}$.

Εχουμε προφανως

$$xRy \leftrightarrow yR^{-1}x.$$

Ευκολα αποδεικνυνονται και οι παρακατω ιδιοτητες.

Προταση 3. Εστω R σχέση.

- i) $\text{dom}(R^{-1}) = \text{rng}(R)$,
- ii) $\text{rng}(R^{-1}) = \text{dom}(R)$,
- iii) $\text{fld}(R^{-1}) = \text{fld}(R)$,
- iv) $(R^{-1})^{-1} = R$.

Παραδειγμα 3.

- i) Για $S = \leq_{\mathbb{R}} = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : "x \text{ είναι μικροτερο ή ισο } y"\}$ εχουμε $S^{-1} = \geq_{\mathbb{R}} = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : "x \text{ είναι μεγαλυτερο ή ισο } y"\}$.

Ομοια, για $\Delta = \{ \langle m, n \rangle : "m, n \text{ είναι ακέραιοι και } m \text{ διαιρεί το } n" \}$ έχουμε

$$\Delta^{-1} = \{ \langle m, n \rangle : "m, n \text{ είναι ακέραιοι και } m \text{ είναι πολλαπλάσιο του } n" \}.$$

ii) Για οποιοδήποτε σύνολο A ισχύει $I_A^{-1} = I_A$, και τούτο διότι

$$x(I_A^{-1})y \leftrightarrow yI_Ax \leftrightarrow y \in A \wedge x \in A \wedge x=y \leftrightarrow xI_Ay.$$

iii) Για οποιαδήποτε σύνολα A, B έχουμε $(A \times B)^{-1} = B \times A$.

iv) Επειδή $\langle x, y \rangle \in \emptyset \leftrightarrow \langle y, x \rangle \in \emptyset$, επεται ότι $\emptyset^{-1} = \emptyset$.

Ορισμος. Εστω R, S σχέσεις. Συνθεση των R, S λεμε τη σχέση

$$R \circ S = \{ \langle x, y \rangle : \exists z (xSz \wedge zRy) \}.$$

Ας παρατηρήσουμε ότι αν το $\langle x, y \rangle$ είναι τέτοιο ώστε για κάποιο z έχουμε xSz και zRy , τότε $\langle x, y \rangle \in \text{dom}(S) \times \text{rng}(R)$. Επεται ότι υπάρχει το σύνολο $R \circ S$, για οποιεσδήποτε σχέσεις R, S .

Ευκολα αποδεικνυονται οι πιο κάτω ιδιότητες.

Προταση 4. Για οποιεσδήποτε σχέσεις R, S :

$$i) \text{ dom}(R \circ S) = \text{dom}(S),$$

$$ii) \text{ rng}(R \circ S) = \text{rng}(R),$$

$$iii) (R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}.$$

$$iv) \text{ Αν } A = \text{fld}(R), \text{ τότε } I_A \circ R = R \text{ και } R \circ I_A = R.$$

Παραδειγμα 4. Εστω $a \neq b$ και $\{a, b\} \cap \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \emptyset$.

$$i) \text{ Εστω } R = \{ \langle \emptyset, a \rangle, \langle \emptyset, b \rangle, \langle \{\emptyset\}, a \rangle \}, S = \{ \langle a, a \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, \{\emptyset\} \rangle \}.$$

$$\text{Τότε } R^{-1} = \{ \langle a, \emptyset \rangle, \langle b, \emptyset \rangle, \langle a, \{\emptyset\} \rangle \}, S \circ R = \{ \langle \emptyset, a \rangle, \langle \emptyset, \{\emptyset\} \rangle, \langle \{\emptyset\}, a \rangle \} \text{ και}$$

$$R \circ S = \{ \langle b, a \rangle \}.$$

Ας σημειώσουμε εδώ ότι $R \circ S \neq S \circ R$.

ii) $\langle \cdot \rangle_R \circ \langle \cdot \rangle_R = \langle \cdot \rangle_R$. Πραγματικά, αν $\langle x, y \rangle \in (\langle \cdot \rangle_R \circ \langle \cdot \rangle_R)$, τότε $x \langle \cdot \rangle_R z$ και $z \langle \cdot \rangle_R y$ για κάποιο $z \in R$. Επεται ότι $x \langle \cdot \rangle_R y$, δηλαδή $\langle x, y \rangle \in \langle \cdot \rangle_R$. Αντιστροφά, εστω ότι $\langle x, y \rangle \in \langle \cdot \rangle_R$. Τότε υπάρχει $z \in R$ (π.χ. $\frac{1}{2}(x+y)$) τέτοιο ώστε $x \langle \cdot \rangle_R z$ και $z \langle \cdot \rangle_R y$. Συνεπώς $x(\langle \cdot \rangle_R \circ \langle \cdot \rangle_R)y$.

$$iii) \emptyset \circ R = R \circ \emptyset = \emptyset, \text{ για οποιαδήποτε σχέση } R.$$

Ορισμος. Εστω R σχέση. Εστω A σύνολο. Περιορισμο της R στο A λεμε το σύνολο

$$R \upharpoonright A = \{ \langle x, y \rangle : x \in A \wedge xRy \}.$$

Είναι φανερό ότι το σύνολο $R \upharpoonright A$ υπάρχει και $R \upharpoonright A \subseteq R$.

Προταση 5. Για οποιαδήποτε σχέση και οποιοδήποτε σύνολο A ισχύει

$$\text{dom}(R \upharpoonright A) = \text{dom}(R) \cap A.$$

Αν λοιπόν $A \subseteq \text{dom}(R)$, τότε $\text{dom}(R \upharpoonright A) = A$.

Ορισμός. Εστω R σχέση. Εστω A, B συνολα. Εικόνα του A μέσω της R λέμε το σύνολο

$$R[A] = \{y : (\exists a \in A) aRy\}.$$

Αντιστροφή εικόνα του B μέσω της R λέμε το σύνολο

$$R^{-1}[B] = \{x : (\exists b \in B) xRb\}.$$

Η υπάρξη των συνολών $R[A]$ και $R^{-1}[B]$ είναι προφανής. Ευκολά βλέπουμε ότι $R[A] \subseteq \text{rng}(R)$ και $R^{-1}[B] \subseteq \text{dom}(R)$. Ας παρατηρήσουμε επίσης ότι

$$R[A] = \{y : \exists a \langle a, y \rangle \in R \upharpoonright A\} = \text{rng}(R \upharpoonright A),$$

$$R^{-1}[B] = \{x : \exists b \langle x, b \rangle \in R \upharpoonright B\} = \text{rng}(R^{-1} \upharpoonright B).$$

2.4 Συναρτήσεις.

Ορισμός. Μια σχέση λέγεται μονοσημαντική αν για οποιαδήποτε x, y, z :

$$xRy \wedge xRz \rightarrow y=z,$$

δηλαδή αν για κάθε x υπάρχει το πολύ ένα y με xRy . Οι μονοσημαντικές σχέσεις λέγονται και συναρτήσεις.

Απο τον ορισμό αμέσως επεται ότι, αν R είναι συναρτησης, τότε για κάθε x του πεδίου ορισμού της R υπάρχει ακριβώς ένα y τέτοιο ώστε $\langle x, y \rangle \in R$. Αυτό το μοναδικό y λέγεται εικόνα του x ή τιμή της R στο x και συμβολίζεται με $R(x)$. Γραφουμε λοιπόν $y=R(x)$ αντι του xRy , όταν η σχέση R είναι συναρτησης. Ετσι εχουμε:

$$(\forall x \in \text{dom}(R)) \langle x, R(x) \rangle \in R$$

και επίσης:

$$\langle x, y \rangle \in R \rightarrow y=R(x).$$

Παραδειγμα 5. Εστω $F = \{\langle \emptyset, a \rangle, \langle \{\emptyset\}, b \rangle, \langle x, c \rangle\}$. Είναι η σχέση συναρτησης;

Αν $x=\emptyset$ και $c \neq a$ ή $x=\{\emptyset\}$ και $c \neq b$, τότε η F δεν είναι μονοσημαντική σχέση.

Αν $x=\emptyset$ και $c=a$ ή $x=\{\emptyset\}$ και $c=b$ ή $x \neq \emptyset$ και $x \neq \{\emptyset\}$, τότε η F είναι μονοσημαντική σχέση, δηλαδή είναι συναρτησης.

Οι γνωστες απο τα Μαθηματικά εννοιες της αντιστροφης συναρτησης, της εικονας και αντιστροφης εικονας συνολου μέσω συναρτησης είναι ειδικες περιπτώσεις των εννοιων που ορισαμε στην παραγραφο 2.3 για τις σχέσεις.

Ορισμός. Αν f είναι συναρτησης με $\text{dom}(f)=A$ και $\text{rng}(f) \subseteq B$, τότε γραφουμε

$$f: A \rightarrow B$$

και λέμε ότι η συναρτησης f απεικονίζει (ή μετασχηματίζει) το σύνολο A

στο σύνολο B.

Ορισμός. Αν $f:A \longrightarrow B$ και $B=\text{rng}(f)$, τότε λέμε ότι η f είναι επί του B και γράφουμε

$$f:A \xrightarrow[\text{επί}]{} B.$$

Παρατήρηση. Έχουμε $f:A \xrightarrow[\text{επί}]{} B$ εάν και μόνον εάν για κάθε στοιχείο y του B υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο x στο A ώστε $y=f(x)$, δηλαδή

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)y=f(x).$$

Το τελευταίο σημαίνει ακριβώς ότι $B=f[A]$, δηλαδή $\text{rng}(f)=B$.

Ορισμός. Λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι 1-1 αν για οποιαδήποτε x_1, x_2 του πεδίου ορισμού της f ισχύει

$$x_1 \neq x_2 \longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Αν $f:A \longrightarrow B$ και η f είναι 1-1, τότε γράφουμε

$$f:A \xrightarrow{1-1} B.$$

Αν $f:A \longrightarrow B$ και η f είναι 1-1 και επί του B, τότε γράφουμε

$$f:A \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} B.$$

Παρατήρηση. Ευκολά βλέπουμε ότι μια συνάρτηση είναι 1-1 εάν και μόνον εάν για κάθε στοιχείο y του πεδίου τιμών $\text{rng}(f)$ υπάρχει ακριβώς ένα στοιχείο x στο πεδίο ορισμού ώστε $y=f(x)$.

Παρατήρηση. Για μια συνάρτηση f , η αντιστροφή σχέση δεν είναι υποχρεωτικά συνάρτηση. Για τη συνάρτηση π.χ. $f=\{\langle \emptyset, \emptyset \rangle, \langle \{\emptyset\}, \emptyset \rangle\}$, η αντιστροφή σχέση $f^{-1}=\{\langle \emptyset, \emptyset \rangle, \langle \emptyset, \{\emptyset\} \rangle\}$ δεν είναι μονοσημαντική σχέση.

Πρόταση 6. Εστω f συνάρτηση. Η f^{-1} είναι συνάρτηση εάν και μόνον εάν η f είναι 1-1.

Απόδειξη: Για το $(\longrightarrow)$ ας υποθέσουμε ότι $x, z \in \text{dom}(f)$ και $x \neq z$. Έχουμε τότε $\langle x, f(x) \rangle \in f$ και $\langle z, f(z) \rangle \in f$, άρα $\langle f(x), x \rangle \in f^{-1}$ και $\langle f(z), z \rangle \in f^{-1}$. Αν ήταν $f(x)=f(z)$, τότε θα είχαμε $x=z$, αφού λόγω της υποθέσεως η f^{-1} είναι συνάρτηση. Πρέπει λοιπόν να είναι $f(x) \neq f(z)$.

Για να αποδείξουμε το $(\longleftarrow)$, ας υποθέσουμε ότι $\langle x, y \rangle \in f^{-1}$ και $\langle x, z \rangle \in f^{-1}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $y=z$. Πραγματικά, έχουμε τότε $\langle y, x \rangle \in f$ και $\langle z, x \rangle \in f$. Επειδή η f είναι 1-1, επεται ότι $y=z$. ■

Παρατήρηση. Ας παρατηρήσουμε ότι για κάθε συνάρτηση f , αν η αντιστροφή σχέση f^{-1} είναι συνάρτηση, τότε είναι 1-1, και τουτο διότι $(f^{-1})^{-1}=f$.

Πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι προφανώς το πεδίο τιμών της f . Έτσι λοιπόν

$$\text{αν } f:A \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} B, \text{ τότε } f^{-1}:B \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} A.$$

Προταση 7. Εστω οτι η συναρτηση f ειναι 1-1. Τότε

i) $(\forall x \in \text{dom}(f)) f^{-1}(f(x)) = x,$

ii) $(\forall y \in \text{rng}(f)) f(f^{-1}(y)) = y.$

Αυτο σημαίνει οτι αν $f: A \xrightarrow{1-1} B$, τότε $f^{-1} \circ f = I_A$ και $f \circ f^{-1} = I_B$.

Παραδειγμα 6. Εστω $F = \{\langle \emptyset, a \rangle, \langle \{\emptyset\}, b \rangle\}$. Η F ειναι συναρτηση με πεδιο ορισμου $\text{dom}(F) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ και πεδιο τιμων $\text{rng}(F) = \{a, b\}$. Η F ειναι 1-1 εαν και μονον εαν $a \neq b$. Για οποιοδηποτε συνολο C με $\{a, b\} \subseteq C$ εχουμε

$$F: \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \longrightarrow C.$$

Η F ειναι επι του C ακριβως οταν $C = \{a, b\}$.

Στα Μαθηματικα δυο συναρτησεις f, g θεωρουνται ισες οταν εχουν το ιδιο πεδιο ορισμου και για καθε στοιχειο x του κοινου πεδιου ορισμου ισχυει $f(x) = g(x)$. Πιο κατω θα δουμε οτι αυτο συμβαινει ακριβως οταν οι συναρτησεις f, g ειναι ισες ως συνολα.

Ορισμος. Αν f, g ειναι συναρτησεις και $f \subseteq g$, τότε η g λεγεται επεκταση της f και η f λεγεται περιορισμος της g .

Παρατηρηση. Αν f ειναι συναρτηση και A συνολο, τότε ο περιορισμος $f \upharpoonright A$ ειναι επισης συναρτηση (και λεγεται περιορισμος της f στο A).

Παρατηρηση. Αν f, g ειναι συναρτησεις και $f \subseteq g$, τότε $\text{dom}(f) \subseteq \text{dom}(g)$. Επισης για καθε $x \in \text{dom}(f)$ εχουμε $f(x) = g(x)$. Πραγματικα, αν $x \in \text{dom}(f)$, τότε $\langle x, f(x) \rangle \in f$ και συνεπως $\langle x, f(x) \rangle \in g$. Επειδη εχουμε και $\langle x, g(x) \rangle \in g$, επεται οτι $f(x) = g(x)$.

Προταση 8. Εστω f, g συναρτησεις. Τότε

$$f = g \Leftrightarrow \text{dom}(f) = \text{dom}(g) \wedge (\forall x \in \text{dom}(f)) f(x) = g(x).$$

Αποδειξη: Αν $f = g$, τότε $f \subseteq g$ και $g \subseteq f$. Απο την τελευταια παρατηρηση επεται οτι $\text{dom}(f) = \text{dom}(g)$ και $f(x) = g(x)$, για καθε $x \in \text{dom}(f)$. Για το αντιστροφο, θα δειξουμε οτι $f \subseteq g$ και $g \subseteq f$. Εστω $t \in f$. Τότε $t = \langle x, f(x) \rangle$, για καποιο $x \in \text{dom}(f)$. Επειδη ομως $\text{dom}(f) = \text{dom}(g)$ και $f(x) = g(x)$, εχουμε οτι $\langle x, g(x) \rangle \in g$. Αρα $t \in g$. Δειξαμε λοιπον οτι $\forall t (t \in f \rightarrow t \in g)$. Ομοια αποδεικνυεται το $g \subseteq f$. ■

Παρομοια ειναι η αποδειξη και της ακολουθης προτασης.

Προταση 9. Αν f, g συναρτησεις και $f \subseteq g$, τότε $f = g \upharpoonright \text{dom}(f)$, δηλαδη η f ειναι περιορισμος της g στο $\text{dom}(f)$.

Παραδειγμα 7. Εστω $f = \{ \langle x, x^2 \rangle : x \in \mathbb{R} \}$ και $g = f \cap \mathbb{R}^+ = \{ \langle x, x^2 \rangle : x \in \mathbb{R}^+ \}$.

Η g είναι περιορισμός της f στο $\mathbb{R}^+$. Εχουμε $g \subset f$, δηλαδή η g είναι γνήσιο υποσύνολο της f . Ειδικά $f \neq g$.

Προταση 10. Εστω A, B σύνολα. Υπάρχει μοναδικό σύνολο που αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις που απεικονίζουν το σύνολο A στο σύνολο B .

Αποδειξη: Αν $f: A \rightarrow B$, τότε $f \subseteq A \times B$ και συνεπώς $f \in \mathcal{P}(A \times B)$. Με βάση το θεωρημα 1 (σελ. 11) υπάρχει το ζητούμενο σύνολο:

$$\{f: f \text{ είναι συνάρτηση με } \text{dom}(f) = A \text{ και } \text{rng}(f) \subseteq B\},$$

που είναι μορφής $\{f: \Phi(f)\}$. Ως $\Phi(f)$ μπορούμε να παρούμε τον παρακάτω τύπο:

$$(\forall z \in f)(\exists x \in A)(\exists y \in B)z = \langle x, y \rangle \wedge (\forall x \in A)(\exists y \in B)\langle x, y \rangle \in f \wedge \\ \wedge (\forall x \in A)(\forall y \in B)(\forall w \in B)(\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle x, w \rangle \in f \rightarrow y = w),$$

που εκφράζει την ιδιότητα "η f είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A και τιμές στο B ". ■

Ορισμός. Εστω A, B σύνολα. Το σύνολο όλων των συναρτήσεων που απεικονίζουν το A στο B το συμβολίζουμε B^A (ή ${}^A B$). Εχουμε δηλαδή

$$B^A = \{f: f: A \rightarrow B\}.$$

Παρατήρηση. Αν $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, τότε υπάρχουν m^k συναρτήσεις f με $f: A \rightarrow B$. Αυτό δικαιολογεί τον συμβολισμό B^A .

Παρατήρηση. Το κενό σύνολο είναι συνάρτηση, αφού είναι μονοσημαντική σχέση. Εχουμε $\text{dom}(\emptyset) = \text{rng}(\emptyset) = \emptyset$. Ας προσεξουμε ότι για οποιοδήποτε σύνολο A ισχύει:

$$A^\emptyset = \{\emptyset\}$$

και για οποιοδήποτε $B \neq \emptyset$ ισχύει:

$$\emptyset^B = \emptyset.$$

Παρατηρούμε εδώ μια αντιστοιχία με τα γνωστά από την αριθμητική:

$$k^0 = 1 \text{ και } 0^m = 0 \text{ (για } m \neq 0\text{)}.$$

2.5 Οικογενείες συνόλων.

Τη λέξη οικογένεια την χρησιμοποιούμε συχνά στα Μαθηματικά ως συνωνύμο της λέξης σύνολο. Έτσι, λέγοντας οικογένεια συνόλων εννοούμε συνηθώς σύνολο συνόλων. Οικογένειες λέμε όμως και συστήματα αντικείμενων που είναι "αριθμημένα" με τη βοήθεια κάποιων δεικτών t οι οποίοι διατρέχουν ένα σύνολο T . Σ' αυτή την περίπτωση ως οικογένεια εννοείται δηλαδή μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο T , της οποίας οι τι-

μες είναι συνολα. Σε κάθε δεικτη $t \in T$ αντιστοιχει ένα συνολο X_t . Η οικογενεια συμβολιζεται τότε

$$\{X_t\}_{t \in T} \quad \text{ή} \quad (X_t: t \in T)$$

Απο την αποψη της θεωριας συνολων, οικογενεια συνολων είναι λοιπον οποιαδηποτε συναρτηση (αφου οι τιμες κάθε συναρτησης είναι συνολα). Ετσι, αν $F: T \rightarrow B$, λεμε το πεδιο ορισμου T της f συνολο δεικτων, τα στοιχεια του T : δεικτες και την ιδια την F : οικογενεια συνολων. Λογω παραδοσης, για κάθε δεικτη $t \in T$ την τιμη $F(t)$ τη συμβολιζουμε F_t και τη λεμε t-στο συνολο της οικογενειας F . Την οικογενεια F τη συμβολιζουμε και ως

$$\langle F_t: t \in T \rangle \quad \text{ή} \quad (F(t))_{t \in T} \quad \text{ή} \quad (F_t)_{t \in T}.$$

Παρατηρηση. Αποφενυχουμε το συμβολισμο $\{F_t: t \in T\}$ και τουτο διοτι το τελευταιο συνολο είναι το συνολο τιμων $\text{rng}(F)$ της οικογενειας F και οχι η ιδια η F .

Παρακατω οριζονται οι πραξεις ενωσης και τομης για μια οικογενεια συνολων. Ας παρατηρηθει οτι τα αποτελεσματα αυτων των πραξεων δεν εξαρτωνται ακριβως απο την οικογενεια αλλα απο το πεδιο τιμων της. Αυτο δεν θα συμβαινει ομως για την πραξη του καρτεσιανου γινομενου που θα γνωρισουμε αργότερα.

Ορισμοι. Εστω $A = (A_t)_{t \in T}$ οικογενεια συνολων.

i) Ενωση της A λεμε το συνολο $\bigcup \text{rng}(A)$, δηλαδη το $\bigcup \{A_t: t \in T\}$, που συμβολιζεται και $\bigcup_{t \in T} A_t$.

ii) Τομη της A λεμε το συνολο $\bigcap \text{rng}(A)$, δηλαδη το $\bigcap \{A_t: t \in T\}$, που συμβολιζεται και $\bigcap_{t \in T} A_t$ (υποθετουμε $T \neq \emptyset$).

Απο τον ορισμο αμεσως επεται οτι x ανηκει στην ενωση της οικογενειας $(A_t)_{t \in T}$ εαν και μονον εαν για τουλαχιστον εναν δεικτη $t \in T$ ισχυει $x \in A_t$. Ομοια βλεπουμε οτι x ανηκει στην τομη της οικογενειας $(A_t)_{t \in T}$ εαν και μονον εαν για κάθε δεικτη $t \in T$ ισχυει $x \in A_t$. Εχουμε λοιπον

$$x \in \bigcup_{t \in T} A_t \leftrightarrow (\exists t \in T) x \in A_t,$$

$$x \in \bigcap_{t \in T} A_t \leftrightarrow (\forall t \in T) x \in A_t.$$

Θα σημειωσουμε μερικες ιδιοτητες των παραπανω πραξεων. Οι αποδειξεις τους είναι απλες ασκησεις.

Προταση 11. Για οποιαδηποτε οικογενεια συνολων $(A_t)_{t \in T}$ και συνολο B :

i) Για κάθε $s \in T$: $A_s \subseteq \bigcup_{t \in T} A_t$, ii) Για κάθε $s \in T$: $\bigcap_{t \in T} A_t \subseteq A_s$ ($T \neq \emptyset$),

iii) $B \cup \bigcup_{t \in T} A_t = \bigcup_{t \in T} (B \cup A_t)$, iv) $B \cap \bigcap_{t \in T} A_t = \bigcap_{t \in T} (B \cap A_t)$ ($T \neq \emptyset$),

$$\begin{aligned} \text{v)} \quad B \cap \bigcup_{t \in T} A_t &= \bigcup_{t \in T} (B \cap A_t), & \text{vi)} \quad B \cup \bigcap_{t \in T} A_t &= \bigcap_{t \in T} (B \cup A_t) \quad (T \neq \emptyset), \\ \text{vii)} \quad B - \bigcup_{t \in T} A_t &= \bigcap_{t \in T} (B - A_t) \quad (T \neq \emptyset), & \text{viii)} \quad B - \bigcap_{t \in T} A_t &= \bigcup_{t \in T} (B - A_t) \quad (T \neq \emptyset). \end{aligned}$$

Παρατήρηση. Αν το σύνολο δεικτών T είναι μορφής $\{1, 2, \dots, k\}$, τότε $\bigcup_{t \in T} A_t = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ και $\bigcap_{t \in T} A_t = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k$.

Συχνά γράφουμε απλούστερα $(A_i)_{i \in I}$ αντί του $(A_i)_{i \in I}$, αν αυτό δεν οδηγεί σε παρεξηγήσεις. Την ένωση και την τομή της οικογένειας τη συμβολίζουμε τότε $\bigcup_i A_i$ και $\bigcap_i A_i$, αντιστοίχα.

Αν το σύνολο δεικτών μιας οικογένειας συνόλων $(C_{\langle i, j \rangle})_{\langle i, j \rangle \in I \times J}$ είναι το καρτεσιανό γινόμενο $I \times J$, τότε γράφουμε την οικογένεια ως $(C_{i, j})_{i \in I, j \in J}$ ή απλούστερα $(C_{i, j})_{i, j}$. Την ένωση τη συμβολίζουμε $\bigcup_{i, j} C_{i, j}$ και την τομή $\bigcap_{i, j} C_{i, j}$ αντιστοίχα.

Αν $(A_i)_{i \in I}$ και $(B_j)_{j \in J}$ είναι οικογένειες συνόλων, τότε υπάρχουν οι οικογένειες $(A_i \cup B_j)_{i, j}$ και $(A_i \cap B_j)_{i, j}$. Ευκολά αποδεικνύονται οι ακόλουθες ιδιότητες.

Προτάση 12. Εστω $(A_i)_{i \in I}, (B_j)_{j \in J}$ οικογένειες συνόλων.

$$\text{i)} \quad \left(\bigcup_i A_i \right) \cap \left(\bigcup_j B_j \right) = \bigcup_{i, j} (A_i \cap B_j),$$

$$\text{ii)} \quad \left(\bigcap_i A_i \right) \cup \left(\bigcap_j B_j \right) = \bigcap_{i, j} (A_i \cup B_j) \quad (I \neq \emptyset, J \neq \emptyset).$$

Προτάση 13. Εστω $(A_i)_{i \in I}, (B_i)_{i \in I}$ οικογένειες συνόλων.

$$\text{i)} \quad \bigcup_i A_i \cup \bigcup_i B_i = \bigcup_i (A_i \cup B_i),$$

$$\text{ii)} \quad \bigcap_i A_i \cap \bigcap_i B_i = \bigcap_i (A_i \cap B_i) \quad (I \neq \emptyset),$$

$$\text{iii)} \quad \bigcup_i (A_i \cap B_i) \subseteq \bigcup_i A_i \cap \bigcup_i B_i,$$

$$\text{iv)} \quad \bigcap_i A_i \cup \bigcap_i B_i \subseteq \bigcap_i (A_i \cup B_i) \quad (I \neq \emptyset).$$

Καρτεσιανό γινόμενο οικογένειας συνόλων.

Ορισμός. Εστω $A = (A_t)_{t \in T}$ οικογένεια συνόλων. Συναρτήση επιλογής για την A λέμε κάθε συναρτήση f με πεδίο ορισμού το T τέτοια ώστε για κάθε $t \in T$ η τιμή $f(t)$ είναι στοιχείο του συνόλου A_t .

Παρατήρηση. Αν f είναι συναρτήση επιλογής για την $(A_t)_{t \in T}$, τότε

$$f: T \longrightarrow \bigcup_{t \in T} A_t.$$

Προτάση 14. Εστω $A = (A_t)_{t \in T}$ οικογένεια συνόλων. Υπάρχει μοναδικό σύνολο που αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις επιλογής για την οικογένεια

νεια $(A_t)_{t \in T}$.

Αποδείξη: Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 1 (σελ. 11). Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν f είναι συνάρτηση επιλογής, τότε $f \in T \times (\bigcup_{t \in T} A_t)$, δηλαδή $f \in \mathcal{P}(T \times \bigcup_{t \in T} A_t)$. ■

Ορισμός. Το σύνολο όλων των συναρτήσεων επιλογής για μια οικογένεια συνολών $(A_t)_{t \in T}$ το λέμε γενικευμένο καρτεσιανό γινόμενο της $(A_t)_{t \in T}$ και το συμβολίζουμε $\prod_{t \in T} A_t$.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα. Το πρώτο απ' αυτά δικαιολογεί τον όρο "γενικευμένο καρτεσιανό γινόμενο".

Παράδειγμα 8.

1) Εστω X, Y σύνολα. Το $\{X, Y\}$ είναι εικόνα μιας οικογένειας συνολών $(A_t)_{t \in T}$, όπου $T = \{1, 2\}$ και $A_1 = X, A_2 = Y$. Το γενικευμένο καρτεσιανό γινόμενο αυτής της οικογένειας αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις μορφής $\{ \langle 1, x \rangle, \langle 2, y \rangle \}$, όπου $x \in X$ και $y \in Y$.

Υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ τέτοιων συναρτήσεων και των ζευγών $\langle x, y \rangle$ με $x \in X$ και $y \in Y$.

ii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θέτουμε $A_x = \{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$. Εχουμε $\bigcup_{x \in \mathbb{R}} A_x = \mathbb{Z}$. Το σύνολο $\prod_{x \in \mathbb{R}} A_x$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ με $f(x) \leq x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ένα στοιχείο του είναι η συνάρτηση E , η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ παίρνει την τιμή $E(x) = [x]$ (το ακέραιο μέρος του x).

iii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θέτουμε $A_x = \mathbb{R}$. Το σύνολο $\prod_{x \in \mathbb{R}} A_x$ είναι ίσο με το σύνολο $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ όλων των πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής.

Παρατήρηση. Αν για κάποιο δείκτη $t \in T$ έχουμε $A_t = \emptyset$, τότε προφανώς δεν υπάρχει καμία συνάρτηση επιλογής για την οικογένεια $(A_t)_{t \in T}$. Επεται ότι τότε $\prod_{t \in T} A_t = \emptyset$. Το ερώτημα αν

$$(\forall t \in T) A_t \neq \emptyset \rightarrow \left(\prod_{t \in T} A_t \neq \emptyset \right)$$

είναι κάθε άλλο παρά απλό. Είναι το λεγόμενο αξίωμα επιλογής που θα γνωρίσουμε στο κεφάλαιο 6. Με βάση τα αξιώματα της θεωρίας συνολών ZF δεν μπορεί να αποδειχθεί ούτε αυτό ούτε η αρνήση του.

Αν παρούμε μια οικογένεια συνολών $(A_t)_{t \in T}$ με $A_t = A$, για κάθε $t \in T$, τότε το $\prod_{t \in T} A_t$ το λέμε καρτεσιανή δύναμη του συνόλου A . Αυτή έχει ως στοιχεία όλες τις συναρτήσεις f με $f: T \rightarrow A$, δηλαδή είναι ίση με το σύνολο A^T .

2.6 Σχέσεις ισοδυναμίας.

Οι σχέσεις ισοδυναμίας είναι πολύ σημαντικές σε διαφόρους κλάδους των Μαθηματικών. Χρησιμοποιούνται για κατασκευές νέων αφηρημένων αντικειμένων από ήδη υπάρχοντα. Έτσι κατασκευάζονται οι ακέραιοι και οι ρητοί αριθμοί. Ο Cantor έδωσε μια περιγραφή των πραγματικών αριθμών ως κλάσεων ισοδυναμίας μιας σχέσης στις ακολουθίες Cauchy ρητών αριθμών. Στην άλγεβρα και την τοπολογία εξετάζονται οι λεγόμενες δομές πηλικά που δίδονται από κάποια σχέση ισοδυναμίας σε μια αρχική δομή.

Ορισμός. Εστω R σχέση και A μη κενό σύνολο. Η R λέγεται σχέση ισοδυναμίας στο A όταν έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

- i) είναι ανακλαστική, δηλαδή $(\forall x \in A) xRx$,
- ii) είναι συμμετρική, δηλαδή $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(xRy \rightarrow yRx)$,
- iii) είναι μεταβατική, δηλαδή $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(\forall z \in A)(xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$.

Μια σχέση λέγεται απλώς σχέση ισοδυναμίας αν είναι σχέση ισοδυναμίας στο πεδίο της.

Παραδειγμα 9. Σχέσεις ισοδυναμίας είναι:

- i) Η σχέση ισοτιμίας I_A , σε οποιοδήποτε σύνολο $A \neq \emptyset$.
- ii) Για έναν σταθερό $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$ η σχέση ισοτιμίας modulo k
 $\equiv_k = \{ \langle m, n \rangle \in \mathbb{Z}^2 : k \text{ διαιρεί } m-n \}$.
- iii) Η ομοιότητα τριγώνων στο επίπεδο.
- iv) Στο σύνολο ακολουθιών Cauchy ρητών αριθμών η σχέση $\sim$ με
 $(\alpha_n) \sim (\beta_n) \leftrightarrow \lim(\alpha_n - \beta_n) = 0$.
- v) Στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ η σχέση $S = \{ \langle \langle x, y \rangle, \langle z, t \rangle \rangle \in \mathbb{R}^2 : x=z \}$.
- vi) Στο διάστημα $[0, 1]$ των πραγματικών αριθμών η σχέση $\approx$ με
 $x \approx y \leftrightarrow x-y \in \mathbb{Q}$,

δηλαδή η $\approx = \{ \langle x, y \rangle : x-y \text{ είναι ρητός αριθμός} \}$.

Παρατήρηση. Αμέσως από τον ορισμό βλέπουμε ότι αν ρ είναι σχέση ισοδυναμίας τότε:

- i) $I_A \subseteq \rho$, ii) $\rho^{-1} = \rho$, iii) $\rho \circ \rho \subseteq \rho$.

Ορισμοί. Εστω R σχέση ισοδυναμίας με $\text{fld}(R) = A$. Για κάθε $a \in A$ θέτουμε: $[a]_R = \{ x : xRa \}$. Το σύνολο $[a]_R$ το λέμε κλάση ισοδυναμίας του a . Κάθε στοιχείο μιας κλάσης ισοδυναμίας λέγεται αντιπροσωπος αυτής της κλάσης. Το σύνολο $\{ [a]_R : a \in A \}$ όλων των κλάσεων ισοδυναμίας των στοιχείων του A το λέμε σύνολο πηλικά του A modulo R και το συμβολίζουμε A/R .

Είναι προφανές ότι για κάθε $a \in \text{fld}(R)$, υπάρχει το σύνολο $[a]_R$. Η

υπαρξη του συνολου πηλικου δικαιολογείται ως εξης. Καθε κλαση $[a]_R$ ει-
ναι υποσυνολο του A. Αρα

$$(\exists a \in A) x = [a]_R \rightarrow x \subseteq A \rightarrow x \in \mathcal{P}A.$$

Εχουμε λοιπον $A/R = \{x \in \mathcal{P}A : (\exists a \in A)(x = [a]_R)\}$.

Για την κλαση $[a]_R$ γραφουμε απλουστερα $[a]$, αν αυτο δεν οδηγει σε
παρεξηγησεις.

Παραδειγμα 10.

i) $A/I_A = \{\{a\} : a \in A\}$. Πραγματικά, για κάθε $a \in A$: $[a] = \{x \in A : x = a\} = \{a\}$.

ii) Για τη σχεση $\equiv_k$ ισοτιμιας modulo k στο $\mathbb{Z}$, εχουμε οτι οι κλασεις
ισοδυναμιας $[0], [1], \dots, [k-1]$ καλυπτουν ολο το $\mathbb{Z}$. Τουτο συμβαινει διοτι
για καθε $n \in \mathbb{Z}$

$$n \equiv_k 0 \quad \dot{\eta} \quad n \equiv_k 1 \quad \dot{\eta} \quad \dots \quad \dot{\eta} \quad n \equiv_k k-1.$$

iii) Η κλαση ισοδυναμιας ενος τριγωνου ABΓ, στη σχεση ομοιοτητας τρι-
γωνων του επιπεδου, αποτελειται απο ολα τα τριγωνα που ειναι ομοια με
το τριγωνο ABΓ.

θα σημειωσουμε τωρα μερικες απλες αλλα σημαντικες ιδιοτητες των
κλασεων ισοδυναμιας.

Προταση 15. Εστω R σχεση ισοδυναμιας και $A = \text{fld}(R)$. Για καθε $a, b \in A$:

$$i) [a]_R = [b]_R \leftrightarrow aRb,$$

$$ii) [a]_R = [b]_R \quad \dot{\eta} \quad [a]_R \cap [b]_R = \emptyset,$$

$$iii) \bigcup \{[a]_R : a \in A\} = A.$$

Η προταση μας λεει οτι το συνολο πηλικο αποτελειται απο ξενα με-
ταξυ τους συνολα που καλυπτουν το πεδιο της σχεσης. Τουτο το γεγονος
ειναι γνωστο ως αρχη αφαιρεσης για τις σχεσεις ισοδυναμιας.

Ορισμος. Εστω $A \neq \emptyset$. Εστω $D \subseteq \mathcal{P}A$. Το D λεγεται διαμεριση του A αν:

$$i) (\forall X \in D) X \neq \emptyset,$$

$$ii) (\forall X \in D) (\forall Y \in D) (X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \emptyset),$$

$$iii) \bigcup D = A.$$

Καθε σχεση ισοδυναμιας οριζει λοιπον μια διαμεριση του πεδιου
της. Πιο κατω θα δειξουμε οτι συμβαινει και το αντιστροφο. Ας δουμε
ομως πρωτα τις διαμερισεις που οριζονται απο τα παραδειγματα που γνω-
ρισαμε.

Παραδειγμα 11.

i) Η ισοτητα I_A χωριζει το συνολο A σε μονοσυνολα, δηλαδη

$$A/I_A = \{\{a\} : a \in A\} \quad (\text{για } A \neq \emptyset).$$

ii) Η σχέση $\equiv_k$ χωρίζει το $\mathbb{Z}$ σε k κλάσεις (που λέγονται κλάσεις υπολοίπων modulo k). Έχουμε $\mathbb{Z}/\equiv_k = \{[0], [1], \dots, [k-1]\}$.

iii) Για τη σχέση S του παραδείγματος 9iv έχουμε

$$[<a, b>] = \{<x, y> \in \mathbb{R}^2 : x=a\} = \{<a, y> \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}.$$

Οι κλάσεις ισοδυναμίας της S είναι λοιπόν οι κάθετες προς τον άξονα OX ευθείες του επιπέδου $\mathbb{R}^2$.

Προταση 16. Εστω D διαμεριση του συνόλου A . Υπάρχει μια σχέση ισοδυναμίας R στο A ώστε $D=A/R$.

Αποδειξη: Θετούμε $xRy \leftrightarrow (\exists B \in D)(x \in B \wedge y \in B)$. Ευκολά ελεγχουμε ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας και ότι το σύνολο πηλικο A/R είναι ίσο με τη δοσμένη διαμεριση D . ■

Ορισμος. Εστω R σχέση ισοδυναμίας με $\text{fld}(R)=A$. Η συνάρτηση $f:A \rightarrow A/R$ με $f(a)=[a]_R$ (για κάθε $a \in A$) λέγεται κανονική συνάρτηση της σχέσης R .

Είναι φανερό ότι αν f είναι κανονική συνάρτηση μιας σχέσης R στο σύνολο A , τότε για οποιαδήποτε a, b του A έχουμε:

$$aRb \leftrightarrow f(a)=f(b).$$

Ευκολά βλέπουμε επίσης ότι $f:A \xrightarrow[\text{επί}]{\quad} A/R$, δηλαδή ότι η κανονική συνάρτηση μιας σχέσης ισοδυναμίας απεικονίζει το πεδίο της σχέσης επί του συνόλου πηλικού.

Πιο κάτω θα δείξουμε ότι οποιαδήποτε συνάρτηση $f \neq \emptyset$ μπορεί ουσιαστικά να θεωρηθεί κανονική συνάρτηση μιας σχέσης ισοδυναμίας.

Προταση 17. Εστω $f:A \xrightarrow[\text{επί}]{\quad} Y$. Θετώντας $\tilde{f}(a)=f^{-1}[\{f(a)\}]$, για κάθε $a \in A$, ορίζουμε μια συνάρτηση $\tilde{f}$ με $\text{dom}(\tilde{f})=A$. Υπάρχει μια σχέση ισοδυναμίας R που η κανονική της συνάρτηση είναι ίση με την $\tilde{f}$.

Αποδειξη: Θεωρούμε τη συλλογή $D=\{f^{-1}[\{y\}]: y \in Y\}$ υποσυνόλων του A . Το D είναι μια διαμεριση του συνόλου A . Από την προηγούμενη προταση επεται ότι $D=A/R$ για μια σχέση ισοδυναμίας R . Για οποιαδήποτε $a, b \in R$ έχουμε:

$$\begin{aligned} aRb &\leftrightarrow (\exists y \in Y)(a \in f^{-1}[\{y\}] \wedge b \in f^{-1}[\{y\}]) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow (\exists y \in Y)(f(a)=y \wedge f(b)=y) \leftrightarrow f(a)=f(b). \end{aligned}$$

Έχουμε δηλαδή $R=\{<a, b> \in A: f(a)=f(b)\}$. Για κάθε $a \in A$ ισχύει:

$$\tilde{f}(a)=f^{-1}[\{f(a)\}]=\{x \in A: f(x) \in \{f(a)\}\}=\{x \in A: f(x)=f(a)\}=[a]_R,$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. ■

Αργότερα θα δούμε κάποιες σημαντικές εφαρμογές των σχέσεων ισοδυναμίας. Στο κεφάλαιο 3, αφού πρώτα γνωρίσουμε τους φυσικούς αριθμούς,

θα περιγράψουμε πως κατασκευάζονται απ' αυτούς οι ακέραιοι αριθμοί. Στη συνέχεια θα δούμε πως από τους ακεραίους κατασκευάζονται οι ρητοί αριθμοί.

2.7 Διαταξεις.

Ως διαταξη ενός συνόλου εννοούμε μια σχέση που μας επιτρέπει να μιλάμε για κάποια "σειρά" των στοιχείων αυτού του συνόλου.

Ορισμοί. Μια σχέση R σ' ένα σύνολο A λέγεται μερική διαταξη (ή απλώς διαταξη) του A , όταν είναι:

- i) ανακλαστική, δηλαδή $(\forall x \in A) xRx$, (ισοδυναμία: $I_A \subseteq R$)
- ii) ασθενώς αντισυμμετρική, δηλαδή $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(xRy \wedge yRx \rightarrow x=y)$,
- iii) μεταβατική, δηλαδή $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(\forall z \in A)(xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$.

Για τις μερικές διαταξεις χρησιμοποιούμε συνήθως τα σύμβολα $\leq, \lessdot$.

Αν $\lessdot$ είναι μερική διαταξη, τότε το $x \lessdot y$ διαβάζεται ως: "x προηγείται του y" ή "x είναι προηγούμενο του y" ή "y επεται του x" ή "y είναι ε-πομενο του x". Αν $\lessdot$ είναι μερική διαταξη του A , τότε το ζευγος $\langle A, \lessdot \rangle$ το λέμε (μερικώς) διατεταχμενο σύνολο.

Παραδειγμα 12.

i) Οι γνωστες από τα Μαθηματικά διαταξεις στα σύνολα αριθμών είναι μερικές διαταξεις. Έτσι π.χ. η σχέση

$$\leq_{\mathbb{R}} = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : "x \text{ είναι μικρότερο ή ίσο } y" \}$$

είναι μια διαταξη του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

ii) Η σχέση διαιρετότητας στους φυσικούς αριθμούς

$$\Delta = \{ \langle m, n \rangle : "m, n \text{ είναι φυσικοί και } m \text{ διαιρεί το } n" \}$$

είναι μια μερική διαταξη.

iii) Ο εγκλεισμός, περιορισμένος στα υποσύνολα ενός συνόλου A , είναι μερική διαταξη του δυναμοσυνόλου $\mathcal{P}A$. Θετούμε

$$\leq_{\mathcal{P}A} = \{ \langle X, Y \rangle \in (\mathcal{P}A)^2 : X \subseteq Y \}$$

και έχουμε $X \subseteq_{\mathcal{P}A} Y \leftrightarrow X \subseteq A \wedge Y \subseteq A \wedge X \subseteq Y$.

Παρατήρηση. Στο τελευταίο παράδειγμα περιορίσαμε τον εγκλεισμό στα στοιχεία ενός συνόλου (του $\mathcal{P}A$), διότι η κλάση K όλων των ζευγών $\langle X, Y \rangle$ με $X \subseteq Y$ δεν αποτελεί σύνολο. Αν η K ήταν σύνολο, τότε το $\text{rng}(K)$ θα ήταν σύνολο όλων των συνόλων. Πραγματικά, για οποιοδήποτε σύνολο X έχουμε $\emptyset \subseteq X$, δηλαδή θα ήταν $\langle \emptyset, X \rangle \in K$, άρα $X \in \text{rng}(K)$.

Παρατήρηση. Η διαταξη $\leq_{\mathbb{R}}$ έχει την ιδιότητα ότι για κάθε x, y ισχύει $x \leq_{\mathbb{R}} y$ είτε $y \leq_{\mathbb{R}} x$. Οποιαδήποτε στοιχεία του $\mathbb{R}$ είναι λοιπόν "συγκρίσιμα".

Τούτο δεν συμβαίνει για τη σχέση διαιρετότητας, αφού υπάρχουν αριθμοί m και n που κανένας δεν διαιρεί τον άλλο. Υπάρχουν δηλαδή μη "συγκρισιμα" στοιχεία. Το ίδιο ισχύει για τη σχέση $\leq_{PA}$, αν το A έχει περισσότερα στοιχεία από ένα.

Ορισμός. Μια διαταξη R ενός συνόλου A λέγεται ολική (ή γραμμική) διαταξη του A , όταν έχει την ιδιότητα:

$$iv) (\forall x \in A)(\forall y \in A)(xRy \vee yRx),$$

δηλαδή όλα τα στοιχεία του A είναι συγκρισιμα μεταξύ τους.

Παραδειγμα 13.

i) Η σχέση $\leq_R$ είναι γραμμική διαταξη του R .

ii) Οι διαταξεις Δ και $\leq_{PA}$ του παραδείγματος 12 δεν είναι γραμμικές.

iii) Η ισότητα I_A είναι μια διαταξη του συνόλου A που δεν είναι ολική, αν το σύνολο A έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία.

iv) Εστω $A = \{a, b, c\}$, όπου a, b, c είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Εστω $R = I_A \cup \{ \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, c \rangle \}$, $S = I_A \cup \{ \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle \}$. Η σχέση R είναι ολική διαταξη του A ενώ η σχέση S δεν είναι ολική διαταξη του A (τα b, c δεν είναι συγκρισιμα).

Πρόταση 18. Εστω ότι $\langle X, \leq \rangle$ είναι διατεταγμένο (γραμμικά διατεταγμένο) σύνολο και $Y \subseteq X$. Τότε το $\langle Y, \leq \cap Y \times Y \rangle$ είναι επίσης διατεταγμένο (γραμμικά διατεταγμένο αντιστοίχα) σύνολο.

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με σχέσεις που είναι γνωστές ως ασθενείς διαταξεις, στις οποίες κάθε στοιχείο βρίσκεται σε σχέση με τον εαυτό του. Στα Μαθηματικά έχουμε και ένα άλλο είδος διαταξεων, τις λεγόμενες γνήσιες διαταξεις.

Ορισμοί. Μια σχέση R σ' ένα σύνολο A λέγεται γνήσια μερική διαταξη (ή απλώς γνήσια διαταξη) του A , όταν είναι:

i') αντιανακλαστική, δηλαδή $(\forall x \in A)(\neg xRx)$, (ισοδυναμία: $I_A \cap R = \emptyset$)

ii') αντισυμμετρική, δηλαδή $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(xRy \rightarrow \neg yRx)$,

iii) μεταβατική, δηλαδή $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(\forall z \in A)(xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$.

Για τις γνήσιες διαταξεις χρησιμοποιούμε συνήθως τα σύμβολα $<, \prec$.

Για το $x \prec y$ διαβάζεται όπως και το $x < y$ (θα δούμε πιο κάτω πως αυτό δεν οδηγεί σε παρεξηγήσεις). Αν $\prec$ είναι γνήσια μερική διαταξη του A , τότε το ζεύγος $\langle A, \prec \rangle$ το λέμε γνήσια διατεταγμένο σύνολο.

Μια γνήσια διαταξη R του συνόλου A λέγεται γνήσια γραμμική (ή ολική) διαταξη του A , όταν έχει τη λεγόμενη τριχοτομική ιδιότητα:

$$iv') (\forall x \in A)(\forall y \in A)(x = y \vee xRy \vee yRx).$$

Παραδειγμα 14.

i) Οι γνωστες γνησιες ανισότητες στα συνολα αριθμων ειναι γνησιες διαταξεις. Εχουμε π.χ. οτι η σχεση

$$<_{\mathbb{R}} = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : "x \text{ ειναι μικροτερο απο } y" \}$$

ειναι γνησια γραμμικη διαταξη του συνολου $\mathbb{R}$ των πραγματικων αριθμων.

ii) Ο γνησιος εγκλεισμος, περιορισμενος στα υποσυνολα ενος συνολου A , ειναι γνησια διαταξη του δυναμοσυνολου $\mathcal{P}A$. Θετουμε

$$c_{\mathcal{P}A} = \{ \langle X, Y \rangle \in (\mathcal{P}A)^2 : X \subset Y \}$$

και εχουμε $X \subset_{\mathcal{P}A} Y \leftrightarrow X \subseteq A \wedge Y \subseteq A \wedge X \subset Y$. Η διαταξη $c_{\mathcal{P}A}$, οπως και η $\subseteq_{\mathcal{P}A}$, δεν ειναι εν γενει γραμμικη.

iii) Εστω $A = \{a, b, c\}$, οπου a, b, c ειναι διαφορετικα μεταξυ τους. Εστω $R = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, c \rangle \}$, $S = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle \}$. Η σχεση R ειναι μια γνησια ολικη διαταξη του A . Η γνησια διαταξη S δεν ειναι ολικη.

Παρατηρηση. Υπαρχει μια αντιστοιχια μεταξυ των (ασθενων) διαταξεων και των γνησιων διαταξεων. Συγκεκριμενα, καθε διαταξη οριζει μια γνησια διαταξη και αντιστροφα. Ευκολα αποδεικνυεται η παρακατω προταση.

Προταση 19.

i) Εστω R διαταξη του συνολου A . Θετουμε $S = R - I_A$, δηλαδη

$$xSy \leftrightarrow xRy \wedge x \neq y.$$

Τοτε η S ειναι γνησια διαταξη του A .

ii) Εστω S ειναι γνησια διαταξη του A . Θετουμε $R = S \cup I_A$, δηλαδη

$$xRy \leftrightarrow xSy \vee x = y.$$

Τοτε η R ειναι διαταξη του A .

Αν επιπλεον η διαταξη R ειναι γραμμικη, τοτε η αντιστοιχη διαταξη S ειναι επισης γραμμικη, και αντιστροφα.

Θα αναφερουμε τωρα μερικους χρησιμους ορισμους σχετικους με τις διαταξεις.

Ορισμος. Εστω $\langle A, \leq \rangle$ διατεταγμενο συνολο. Λεμε οτι ενα $a \in A$ ειναι:

i) ελασσον (minimal), οταν δεν υπαρχει στο A στοιχειο προηγουμενο του a διαφορετικο απ' αυτο, δηλαδη οταν $(\forall x \in A)(x \leq a \rightarrow x = a)$,

ii) μειζον (maximal), οταν δεν υπαρχει στο A στοιχειο επομενο του a διαφορετικο απ' αυτο, δηλαδη οταν $(\forall x \in A)(a \leq x \rightarrow x = a)$,

iii) ελαχιστο (ή το μικροτερο), οταν το a προηγειται ολων των στοιχειων του A , δηλαδη οταν $(\forall x \in A)a \leq x$,

iv) μεγιστο (ή το μεγαλύτερο), όταν το a επεται όλων των στοιχείων του A , δηλαδή όταν $(\forall x \in A) x \leq a$.

Παραρηρηση. Είναι προφανές ότι, αν a είναι ελάχιστο (μεγιστο) στοιχείο τότε είναι ελασσον (μειζον αντιστοιχα). Όπως θα δούμε πιο κάτω, εν γένει δεν ισχύει το αντιστρόφο. Αν όμως η διαταξη είναι γραμμική, τότε κάθε ελασσον στοιχείο είναι ελάχιστο και κάθε μειζον στοιχείο είναι μεγιστο (ασκήση 2.23). Ευκολά βλέπουμε ότι σε κάθε διαταξη υπάρχει το πολύ ένα μεγιστο και το πολύ ένα ελάχιστο στοιχείο (ασκήση 2.22).

Παραδειγμα 15.

i) Η σχέση διαιρετοτητας Δ (παραδειγμα 12ii), περιορισμένη στους θετικούς αριθμούς, έχει ελάχιστο στοιχείο το 1 (για κάθε $m: 1 \Delta m$). Δεν υπάρχει μεγιστο στοιχείο, αφού για κάθε θετικό m έχουμε $m \Delta 2m$.

ii) Η διαταξη $\leq_{PA}$ έχει ελάχιστο στοιχείο το $\emptyset$ και μεγιστο στοιχείο το A .

iii) Στη διαταξη I_A , για $A \neq \emptyset$, κάθε στοιχείο του A είναι ελασσον και μειζον. Αν το σύνολο A έχει τουλάχιστον δυο στοιχεία, τότε δεν υπάρχει ούτε το μικρότερο ούτε το μεγαλύτερο στοιχείο στο A .

iv) Στο παραδειγμα 13iv, η διαταξη R έχει ελάχιστο στοιχείο το a και μεγιστο στοιχείο το c . Η διαταξη S έχει επίσης ελάχιστο στοιχείο το a . Τα b και c είναι maximal στοιχεία. Δεν υπάρχει μεγιστο στοιχείο για αυτή τη διαταξη.

Οι έννοιες που ορίστηκαν παραπάνω, ορίζονται επίσης και για τις γνησιες διαταξεις.

Ορισμος. Εστω $\langle A, < \rangle$ γνησια διατεταχμενο σύνολο. Λέμε ότι ένα $a \in A$ είναι:

i) ελασσον (minimal), όταν δεν υπάρχει στο A στοιχείο προηγούμενο του a , δηλαδή όταν $(\forall x \in A) \neg (x < a)$,

ii) μειζον (maximal), όταν δεν υπάρχει στο A στοιχείο επομένο του a , δηλαδή όταν $(\forall x \in A) \neg (a < x)$,

iii) ελάχιστο (ή το μικρότερο), όταν το a προηγείται όλων των στοιχείων του A που είναι διαφορετικά απ' αυτό, δηλαδή $(\forall x \in A) (a < x \vee a = x)$,

iv) μεγιστο (ή το μεγαλύτερο), όταν το a επεται όλων των στοιχείων του A που είναι διαφορετικά απ' αυτό, δηλαδή όταν $(\forall x \in A) (x < a \vee x = a)$.

Παρατηρηση. Οι παραπάνω έννοιες δεν αλλάζουν αν περασούμε από μια διαταξη στην αντιστοιχη γνησια διάταξη, και αντιστρόφα (ασκήση 2.25).

Ακολουθούν μερικοί ακόμα ορισμοί σχετικοί με τις διαταξεις.

Ορισμοί. Εστω $\langle A, \leq \rangle$ μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Εστω $X \subseteq A$ και $b \in A$. Λέμε ότι το b είναι:

- i) άνω φραγμα του X , αν $(\forall x \in X) x \leq b$,
- ii) κάτω φραγμα του X , αν $(\forall x \in X) b \leq x$,
- iii) άνω περας (supremum) του X , αν είναι το ελαχιστο άνω φραγμα του X , δηλαδή αν για κάθε άνω φραγμα c έχουμε $b \leq c$,
- iv) κάτω περας (infimum) του X , αν είναι το μεγιστο κάτω φραγμα του X , δηλαδή αν για κάθε κάτω φραγμα c έχουμε $c \leq b$.

Ομοιες διαταξεις.

Ορισμός. Εστω $\langle X, \rho \rangle, \langle Y, \sigma \rangle$ μερικώς διατεταγμένα σύνολα. Λέμε ότι τα $\langle X, \rho \rangle, \langle Y, \sigma \rangle$ είναι ομοία και γράφουμε $\langle X, \rho \rangle \approx \langle Y, \sigma \rangle$, όταν υπάρχει μια συνάρτηση $f: X \xrightarrow{1-1} Y$ που διατηρεί τις διαταξεις ρ, σ , δηλαδή τέτοια ώστε $(\forall a \in X)(\forall b \in X)(a \rho b \leftrightarrow f(a) \sigma f(b))$.

Μια τέτοια συνάρτηση f λέγεται ισομορφισμός των διαταξεων ρ και σ . Οι διαταξεις ρ, σ λέγονται ομοίες.

Ο παραπάνω ορισμός χρησιμοποιείται και για τις γνήσιες διαταξεις. Ας παρατηρήσουμε όμως ότι ένα διατεταγμένο σύνολο $\langle A, \leq \rangle$ ($A \neq \emptyset$) δεν μπορεί να είναι ομοίο με ένα γνήσια διατεταγμένο σύνολο $\langle B, \prec \rangle$, διότι για κάθε $a \in A$ έχουμε $a \leq a$ και $\neg(f(a) \prec f(a))$.

Παραδειγμα 16.

i) Εστω $a \neq b$. Η σχέση $\rho = \{ \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle a, b \rangle \}$ είναι διαταξη του συνολου $A = \{a, b\}$. Η ρ είναι ομοία με την διαταξη $\sigma = \{ \langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 0, 1 \rangle \}$ του συνολου $\{0, 1\}$. Πραγματικά, η συνάρτηση $f: \{a, b\} \rightarrow \{0, 1\}$, με $f(a)=0$ και $f(b)=1$, είναι ισομορφισμός των διατεταγμενων συνολου $\langle A, \rho \rangle, \langle \{0, 1\}, \sigma \rangle$. Εχουμε δηλαδή $\langle A, \rho \rangle \approx \langle \{0, 1\}, \sigma \rangle$. Γενικότερα, η διαταξη ρ είναι ομοία με κάθε γραμμική διαταξη ενός συνολου X με δυο διαφορετικά στοιχεία.

ii) Η διαταξη $\leq_{\mathbb{R}}$ των πραγματικων αριθμων, περιορισμενη στο σύνολο A των αριθμων μορφης $-\frac{1}{n}$ (οπου n θετικος φυσικος αριθμος), είναι ομοία με την συνηθη διαταξη των θετικων φυσικων αριθμων.

iii) Καμία απο τις παραπάνω διαταξεις δεν είναι ομοία με την $\leq_{\mathbb{R}}$ περιορισμενη στο σύνολο B των πραγματικων αριθμων μορφης $\frac{1}{n}$ (οπου n θετικος φυσικος αριθμος). Τουτο διότι π.χ. η τελευταία διαταξη έχει μεγιστο στοιχειο (το 1), κατι που δεν συμβαινει για τις άλλες δυο διαταξεις (βλ. ασκηση 2.27).

Ας σημειώσουμε μερικές βασικές ιδιότητες των ισομορφισμών διαταξεων. Οι αποδείξεις τους είναι απλές ασκήσεις (ασκήση 2.26).

Προταση 20.

- i) Κάθε μερικώς διατεταγμένο σύνολο είναι ομοιο με το εαυτο του.
- ii) Αν $\langle A_1, \leq_1 \rangle \approx \langle A_2, \leq_2 \rangle$, τότε $\langle A_2, \leq_2 \rangle \approx \langle A_1, \leq_1 \rangle$.
- iii) Αν $\langle A_1, \leq_1 \rangle \approx \langle A_2, \leq_2 \rangle$ και $\langle A_2, \leq_2 \rangle \approx \langle A_3, \leq_3 \rangle$, τότε $\langle A_1, \leq_1 \rangle \approx \langle A_3, \leq_3 \rangle$.

Δυο ομοιες διαταξεις δεν διαφερουν ουσιαστικά, αφου οι ισομορφισμοι διατηρουν ολες τις ιδιοτητες τους. Μελετώντας τις διαταξεις, ο Cantor χρησιμοποιουσε την εννοια του διατακτικου τυπου. Για κάθε διατεταγμένο σύνολο $\langle A, \leq \rangle$ εισηγαγε ενα νεο αφηρημενο αντικειμενο $\overline{\langle A, \leq \rangle}$ που το ελεγε διατακτικο τυπο του $\langle A, \leq \rangle$, ετσι ωστε δυο διατεταγμενα συνολα εχουν τον ιδιο διατακτικο τυπο εαν και μονον εαν ειναι ομοια. Απαιτησε δηλαδη

$$(*) \quad \overline{\langle X, \rho \rangle} = \overline{\langle Y, \sigma \rangle} \leftrightarrow \langle X, \rho \rangle \approx \langle Y, \sigma \rangle.$$

Το ρολο του διατακτικου τυπου $\overline{\langle A, \leq \rangle}$ ενος διατεταγμενου συνολου $\langle A, \leq \rangle$ μπορεί να παιξει η κλαση ολων των διατεταγμενων συνολου που ειναι ομοια με το $\langle A, \leq \rangle$. Τότε ικανοποιειται η απαιτηση (*). Σοβαρο μειονεκτημα αυτου του ορισμου ειναι ομως το γεγονος οτι οι κλασεις σαν την παραπανω δεν ειναι συνολα. Η συλλογη ολων των διαταξεων που ειναι ομοιες με μια δοσμενη ειναι γνησια κλαση. Με την εννοια αυτη, οι διατακτικοι τυποι δεν ειναι αντικειμενα της θεωριας συνολου.

Οι αφηρημενοι διατακτικοι τυποι του Cantor ενοχλουσαν τους μαθηματικους εκεινης της εποχης. Ευλογο ηταν λοιπον να μπορουν να οριστουν ως συνολα. Ενας τετοιος ορισμος βρεθηκε μερικες δεκαετιες αργοτερα. Η κατανοηση του απαιτει ομως προχωρημενες γνωσεις της θεωριας συνολου και γιαντο ειναι εκτος υλης ενος εισαγωγικου μαθηματος.

Παραδοσιακα διατηρηθηκαν μερικοι συμβολισμοι του Cantor. Οι διατακτικοι τυποι των φυσικων, ρητων και πραγματικων αριθμων (με τις συνηθεις διαταξεις) συμβολιζονται με ω , η και λ αντιστοιχα.

Κλεινουμε το κεφαλαιο με ενα θεωρημα που μας λεει για τη δυνατοτητα παραστασης καθε μιας διαταξης απο τον εγκλεισμο. Ο εγκλεισμος περιορισμενος στα στοιχεια ενος συνολου B , δηλαδη η σχεση

$$\leq_B = \{ \langle X, Y \rangle \in B^2 : X \leq Y \}$$

ειναι μια διαταξη του B .

Θεωρημα. Εστω $\langle A, \leq \rangle$ μερικως διατεταγμενο σύνολο. Υπαρχει ενα σύνολο B τετοιο ωστε

$$\langle A, \preceq \rangle \approx \langle B, \preceq_B \rangle.$$

Αποδείξη: Για κάθε $a \in A$ θεωρούμε $O_{\preceq}(a) = \{x \in A : x \preceq a\}$. Προφανώς $O_{\preceq}(a) \subseteq A$. Υπαρχει λοιπον το συνολο $\{O_{\preceq}(a) : a \in A\}$ και ειναι υποσυνολο του $\mathcal{P}A$. Θετου-
με $B = \{O_{\preceq}(a) : a \in A\}$. Ευκολα ελεγχουμε οτι για οποιαδηποτε $x, y \in A$

$$O_{\preceq}(x) \subseteq O_{\preceq}(y) \leftrightarrow x \in O_{\preceq}(y) \leftrightarrow x \preceq y.$$

Οριζουμε τωρα $f: A \longrightarrow B$ με $f(a) = O_{\preceq}(a)$, για κάθε $a \in A$. Απο το παραπανω
επεται οτι για οποιαδηποτε x, y του A :

$$f(x) \subseteq f(y) \leftrightarrow x \preceq y.$$

Η f ειναι προφανως επι του B . Ειναι και 1-1, διοτι αν $f(x) = f(y)$ (δη-
λαδή $O_{\preceq}(x) = O_{\preceq}(y)$), τοτε $x \preceq y$ και $y \preceq x$ που επεται οτι $x = y$. Η f ειναι
λοιπον ισομορφισμος των $\langle A, \preceq \rangle$ και $\langle B, \subseteq_B \rangle$. ■

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.1 Αποδειξτε ότι για οποιαδήποτε συνολα X, Y, Z, V :

- i) $(X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z)$, ii) $(X - Y) \times Z = (X \times Z) - (Y \times Z)$,
- iii) $(X \cap Y) \times Z = (X \times Z) \cap (Y \times Z)$, iv) $X \times Y = X \times Z \rightarrow Y = Z$ (για $X \neq \emptyset$),
- v) $X \times Y = Z \times V \rightarrow X = Z \wedge Y = V$ (για μη κενά X, Y, Z, V),
- vi) $X \times X = Y \times Y \rightarrow X = Y$,
- vii) $(X \cup Y) \times (Z \cup V) = (X \times Z) \cup (X \times V) \cup (Y \times Z) \cup (Y \times V)$.

2.2 Βρείτε όλες τις σχέσεις R με $\text{dom}(R) \subseteq \{a, b, c\}$ και $\text{rng}(R) \subseteq \{A, B\}$.

Βρείτε όλες τις σχέσεις R με $\text{fld}(R) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

2.3 Αποδειξτε ότι για οποιεσδήποτε σχέσεις R, S, T ισχύει

$$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T.$$

2.4 Εστω R σχέση. Εστω A, B συνολα. Εξετάστε αν ισχύουν:

- i) $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$, iv) $R^{-1}[A \cup B] = R^{-1}[A] \cup R^{-1}[B]$,
- ii) $R[A \cap B] = R[A] \cap R[B]$, v) $R^{-1}[A \cap B] = R^{-1}[A] \cap R^{-1}[B]$,
- iii) $R[A - B] = R[A] - R[B]$, vi) $R^{-1}[A - B] = R^{-1}[A] - R^{-1}[B]$.

2.5 Εστω R, S σχέσεις. Εξετάστε αν ισχύουν:

- i) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$,
- ii) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$,
- iii) $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$.

2.6 Αποδειξτε ότι για οποιεσδήποτε σχέσεις R, S και οποιαδήποτε συνολα A, B ισχύουν:

- i) $(R \circ S)[A] = R[S[A]]$, ii) $(R \circ S)^{-1}[A] = S^{-1}[R^{-1}[A]]$,
- iii) $R[U A] = \bigcup \{R[x] : x \in A\}$, iv) $R[\bigcap A] \subseteq \bigcap \{R[x] : x \in A\}$ ($A \neq \emptyset$),
- v) $R^{-1}[U A] = \bigcup \{R^{-1}[x] : x \in A\}$, vi) $R^{-1}[\bigcap A] \subseteq \bigcap \{R^{-1}[x] : x \in A\}$ ($A \neq \emptyset$).

2.7 Εστω R, S σχέσεις και A συνολο. Αποδειξτε ότι:

- i) $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$,
- ii) $R[A \cap B] = R[A] \cap R[B]$,
- iii) $R[A - B] = R[A] - R[B]$.

2.8 Εστω $R = \{ \langle \emptyset, \{\{\emptyset\}\} \rangle, \langle \{\emptyset\}, \{\emptyset\} \rangle, \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \emptyset \rangle \}$. Βρείτε τα:

$$\begin{aligned} & R(\emptyset), R(\{\emptyset\}), R[\emptyset], R[\{\emptyset\}], R \emptyset, R \{\emptyset\}, \\ & R^{-1}, R^{-1}(\emptyset), R^{-1}[\{\emptyset\}], R^{-1}[\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \emptyset\}], \\ & R \circ R, UR, UR. \end{aligned}$$

2.9 Εστω R σχέση. Δειξτε ότι:

- i) $R[\text{dom}(R)] = \text{rng}(R)$, ii) $R^{-1}[\text{rng}(R)] = \text{dom}(R)$.

2.10 Αποδειξτε ότι η συνθεση $f \circ g$ δυο συναρτησεων f, g είναι συναρτηση. Βρείτε τα συνολα $\text{dom}(f \circ g)$ και $\text{rng}(f \circ g)$. Δειξτε ότι για κάθε $x \in \text{dom}(f \circ g)$ ισχυει $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Αποδειξτε επίσης ότι αν f, g είναι 1-1, τότε η $f \circ g$ επίσης είναι 1-1.

2.11 Εστω $f: X \rightarrow Y$. Εστω $A \subseteq X, B \subseteq Y$. Αποδειξτε ότι:

- i) $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$, ii) $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$.

Βρείτε παραδειγματα στα οποία δεν ισχυουν ισοτητες. Βρείτε ικανες και αναγκαιες συνθήκες για την f ώστε να ισχυουν οι ισοτητες.

2.12 Εστω $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X, h: Y \rightarrow X$. Αποδειξτε ότι αν $f \circ g = I_Y$ και $h \circ f = I_X$, τότε $g = h$.

2.13 Εστω $f: X \xrightarrow{\text{επι}} Y, g: Y \rightarrow Z$. Αποδειξτε ότι αν $g \circ f$ είναι 1-1, τότε και η g είναι 1-1. Δώστε παραδειγμα μιας f που δεν είναι επι του Y τετοιο ώστε η $g \circ f$ είναι 1-1 αλλά η g δεν είναι 1-1.

2.14 Εστω A συνολο συναρτησεων τετοιο ώστε

$$(\forall f \in A)(\forall g \in A)(f \leq g \vee g \leq f).$$

Δειξτε ότι το συνολο $\bigcup A$ είναι συναρτηση και $(\forall f \in A) f \leq \bigcup A$.

2.15 Εστω $f: X \rightarrow Y$. Εστω $(A_t)_{t \in T}$ οικογενεια συνολων ($T \neq \emptyset$). Δειξτε ότι:

- i) $f[\bigcup_{t \in T} A_t] = \bigcup_{t \in T} f[A_t]$, ii) $f[\bigcap_{t \in T} A_t] \subseteq \bigcap_{t \in T} f[A_t]$,
iii) $f^{-1}[\bigcup_{t \in T} A_t] = \bigcup_{t \in T} f^{-1}[A_t]$, iv) $f^{-1}[\bigcap_{t \in T} A_t] = \bigcap_{t \in T} f^{-1}[A_t]$.

2.16 Αποδειξτε ότι για οποιαδήποτε οικογενεια συνολων $(A_{t,s})_{t \in T, s \in S}$ ($S \neq \emptyset$)

$$\bigcup_{t \in T} \bigcap_{s \in S} A_{t,s} \subseteq \bigcap_{s \in S} \bigcup_{t \in T} A_{t,s}$$

και βρείτε παραδειγματα στα οποία δεν εχουμε ισοτητα.

2.17 Εστω $(A_t)_{t \in T}, (B_s)_{s \in S}$ οικογενειες συνολων. Αποδειξτε ότι:

- i) $(\bigcup_t A_t) \times (\bigcup_s B_s) = \bigcup_{t,s} (A_t \times B_s)$,
ii) $(\bigcap_t A_t) \times (\bigcap_s B_s) = \bigcap_{t,s} (A_t \times B_s)$. ($S \neq \emptyset, T \neq \emptyset$)

2.18 Εστω $f: A \rightarrow B$. Θεωρουμε τη σχέση $R = \{ \langle x, y \rangle \in A^2 : f(x) = f(y) \}$.

- i) Αποδειξτε ότι η R είναι σχέση ισοδυναμιας.
ii) Βρείτε τις κλασεις ισοδυναμιας της R .
iii) Αποδειξτε ότι υπαρχει μια συναρτηση $h: A \xrightarrow{\text{επι}} B$ τετοια ώστε για

κάθε $a \in A$: $h([a]_R) = f(a)$.

2.19 Βρείτε, αν υπάρχουν, παραδείγματα σχέσεων R που έχουν:

i) ακριβώς μια από τις παρακάτω ιδιότητες,

ii) ακριβώς δύο από τις παρακάτω ιδιότητες.

(1) Η R είναι ανακλαστική.

(2) Η R είναι συμμετρική.

(3) Η R είναι μεταβατική.

2.20 Αποδείξτε ότι αν R είναι μερική (γραμμική) διαταξη του συνόλου A , τότε η R^{-1} είναι επίσης μερική (αντιστοιχά γραμμική) διαταξη του A .

2.21 Βρείτε όλες τις μη όμοιες διαταξεις του συνόλου $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

2.22 Εστω $\langle X, \leq \rangle$ διατεταγμένο σύνολο. Αποδείξτε ότι στο X υπάρχει το πολύ ένα μέγιστο και το πολύ ένα ελάχιστο στοιχείο.

2.23 Αποδείξτε ότι αν $\leq$ είναι γραμμική διαταξη του συνόλου X , τότε κάθε ελασσόν (μειζόν) στοιχείο είναι ελάχιστο (αντιστοιχά μέγιστο) στοιχείο του X .

2.24 Δώστε παραδείγματα γραμμικών διαταξεών που έχουν τις ιδιότητες:

i) Για κάθε στοιχείο υπάρχει το αμέσως επόμενο και τουλάχιστον ένα στοιχείο δεν έχει αμέσως προηγούμενο.

ii) Υπάρχει το μεγαλύτερο στοιχείο και για κάθε στοιχείο εκτός από αυτό υπάρχει το αμέσως επόμενο.

iii) Υπάρχει το μικρότερο στοιχείο και για κάθε στοιχείο εκτός από αυτό υπάρχει το αμέσως προηγούμενο.

2.25 Εστω $\leq$ μερική διαταξη του συνόλου X . Εστω $<$ η αντιστοιχά γνησια διαταξη (δηλαδή $x < y \leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$). Αποδείξτε ότι αν $a \in X$ είναι ελασσόν (μειζόν, ελάχιστο, μέγιστο) για την $\leq$, τότε είναι επίσης ελασσόν (μειζόν, ελάχιστο, μέγιστο αντιστοιχά) για την $<$.

2.26 Αποδείξτε την πρόταση 20 (σελίδα 38).

2.27 Εστω ότι f είναι ισομορφισμός των διατεταγμένων συνόλων $\langle A, \leq_A \rangle$, $\langle B, \leq_B \rangle$. Εστω $a \in A$. Αποδείξτε ότι, αν a είναι ελασσόν (μειζόν, ελάχιστο, μέγιστο) στο A , τότε το $f(a)$ είναι ελασσόν (αντιστοιχά μειζόν, ελάχιστο, μέγιστο) στοιχείο στο B . Δείξτε επίσης ότι αν η $\leq_A$ είναι γραμμική, τότε και η $\leq_B$ είναι γραμμική.

2.28 Αποδείξτε ότι υπάρχει το σύνολο M όλων των μερικών διαταξεών ενός συνόλου X . Το M είναι μερικώς διατεταγμένο από τη σχέση $\leq_M$. Δείξτε ότι

$T \in M$ είναι μέγιστο στο $\langle M, \leq_M \rangle$ εάν και μόνον εάν T είναι γραμμική διαταγή του X .

2.29 Δώστε παραδειγμα μιας αντισυμμετρικής σχέσης που δεν μπορεί να επεκταθεί σε γραμμική διαταγή.

2.30 Εστω $\langle A, \leq_1 \rangle, \langle B, \leq_2 \rangle$ μερικώς διατεταγμένα σύνολα. Εστω ότι $f: A \rightarrow B$ έχει την ιδιότητα:

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(x \leq_1 y \leftrightarrow f(x) \leq_2 f(y)).$$

Αποδείξτε ότι η f είναι 1-1.

2.31 Εστω $\langle X, \leq \rangle$ μερικώς διατεταγμένο σύνολο ($X \neq \emptyset$). Για $a \in X$ θεωρούμε:

$$O_{\leq}(a) = \{x \in X: x \leq a\}, \quad O_{<}(a) = \{x \in X: x < a\}.$$

Αποδείξτε ότι: i) $\bigcup_{a \in X} O_{\leq}(a) \subseteq X$, ii) $\bigcup_{a \in X} O_{<}(a) = X$

και βρείτε το σύνολο $\bigcap_{a \in X} O_{\leq}(a)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΟΙ ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

3.1 Οι φυσικοί αριθμοί ως συνολα.

Ενας τρόπος να εισαχουμε τους φυσικούς αριθμούς στα Μαθηματικά είναι η αξιωματική μεθοδος. Ασχολήθηκαν μ' αυτήν πρώτα ο Dedekind και αργότερα ο Peano. Το αξιωματικό τους σύστημα έχει δυο αρχικές εννοιες: το "μηδεν" και την έννοια του "επομένου αριθμού". Χρησιμοποιεί και τις συνολοθεωρητικές έννοιες. Αποτελείται από τα παρακάτω πέντε αιτήματα.

- i) Το μηδεν είναι φυσικός αριθμός.
- ii) Κάθε φυσικός αριθμός έχει ακριβώς έναν επομένο.
- iii) Το μηδεν δεν είναι επομένος κανενος φυσικού αριθμού.
- iv) Δυο φυσικοί αριθμοί που έχουν τον ίδιο επομένο είναι ίσοι.
- v) Αν σ' ένα σύνολο φυσικών αριθμών ανήκει το μηδεν και μαζί με κάθε φυσικό αριθμό ανήκει ο επομένος του, τότε αυτό το σύνολο περιέχει όλους τους φυσικούς αριθμούς.

Το τελευταίο αίτημα είναι γνωστό ως Αρχή Επαγωγής. Θα την διατυπώσουμε χρησιμοποιώντας τον παραδοσιακό συμβολισμό. Το μηδεν συμβολίζεται με 0 και ο επομένος του αριθμού x με x' . Το σύνολο των φυσικών αριθμών παραδοσιακά συμβολίζεται με $\mathbb{N}$.

$$A \subseteq \mathbb{N} \wedge 0 \in A \wedge \forall x (x \in A \rightarrow x' \in A) \rightarrow A = \mathbb{N}.$$

Το παραπάνω αξιωματικό σύστημα για τους φυσικούς αριθμούς είναι αρκετά ισχυρό. Αποδεικνύονται σ' αυτό όλα τα κλασικά θεωρήματα της αριθμητικής.

Οι φυσικοί αριθμοί μπορούν να οριστούν στη θεωρία συνολών. Έτσι η αριθμητική γίνεται μέρος της θεωρίας συνολών. Ορίζουμε το μηδεν (ως σύνολο) και την έννοια του επομένου φυσικού αριθμού. Οι φυσικοί αριθμοί ορίζονται συνεπώς ως συνολα και γίνονται αντικείμενα της θεωρίας συνολών. Με την εισαγωγή των φυσικών αριθμών στη θεωρία συνολών ασχολήθηκε πρώτος ο Frege. Πιο κατανοητές είναι όμως οι ιδέες του von Neumann και αυτές θα περιγράψουμε παρακάτω.

Ορισμοί. Το μηδεν ορίζεται ως

$$0 = \emptyset.$$

Για κάθε σύνολο x ορίζουμε το επομένο σύνολο ως

$$x' = x \cup \{x\}.$$

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε έναν έναν όλους τους φυσικούς αριθμούς. Ειδικά έχουμε:

$$1=0'=\emptyset'=\emptyset\cup\{\emptyset\}=\{\emptyset\},$$

$$2=1'=\{\emptyset\}'=\{\emptyset\}\cup\{\{\emptyset\}\}=\{\emptyset, \{\emptyset\}\},$$

$$3=2'=\{\emptyset, \{\emptyset\}\}'=\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\cup\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}=\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Παρατήρηση. Κάθε φυσικός αριθμός ισούται με το σύνολο των προηγούμενων φυσικών αριθμών. Πραγματικά, από τον ορισμό έχουμε $0=\emptyset$, $1=\{0\}$, $2=\{0,1\}$, $3=\{0,1,2\}$ κ.ο.κ. Γενικά, αν $n=\{0,1,\dots,n-1\}$, τότε επειδή $n'=\emptyset\cup\{n\}$, έχουμε $n'=\{0,1,\dots,n-1,n\}$.

3.2 Το σύνολο των φυσικών αριθμών.

Ενώ ορίσαμε όλους τους φυσικούς αριθμούς ως σύνολα, τα αξιώματα που δεχθήκαμε μέχρι τώρα δεν μας εξασφαλίζουν την ύπαρξη του συνόλου όλων των φυσικών αριθμών. Χωρίς ένα νέο αξίωμα δεν είναι δυνατό να δικαιολογήσουμε την ύπαρξη ενός συνόλου με στοιχεία όλους τους φυσικούς αριθμούς που ορίσαμε παραπάνω. Με βάση τα αξιώματα που γνωρίσαμε, μπορούμε να κατασκευάσουμε μόνο σύνολα που διαισθητικά χαρακτηρίζονται ως πεπερασμένα. Το νέο αξίωμα μας λέει για την ύπαρξη ενός συνόλου που δεν είναι πεπερασμένο. Για να το καταλάβουμε καλύτερα θα ορίσουμε πρώτα μια βοηθητική έννοια.

Ορισμός. Ένα σύνολο A λέγεται επαγωγικό αν έχει στοιχείο το $\emptyset$ και για κάθε στοιχείο του A ανήκει στο A και το επομένο σύνολο, δηλαδή

$$\emptyset \in A \wedge \forall x(x \in A \rightarrow x \cup \{x\} \in A).$$

A6. Αξίωμα απείρου.

"Υπάρχει επαγωγικό σύνολο", δηλαδή $\exists A(\emptyset \in A \wedge \forall x(x \in A \rightarrow x \cup \{x\} \in A))$.

Θα αποδείξουμε παρακάτω ότι υπάρχει το μικρότερο επαγωγικό σύνολο, δηλαδή ένα επαγωγικό σύνολο που περιέχεται σε όλα τα επαγωγικά σύνολα, και αυτό θα ορίσουμε ως σύνολο των φυσικών αριθμών.

Ευκολά αποδεικνύεται η παρακάτω πρόταση (ασκήση 3.1).

Πρόταση 1. Εστω B μη κενό σύνολο επαγωγικών συνόλων. Η τομή $\bigcap B$ είναι επίσης επαγωγικό σύνολο.

Πρόταση 2. Υπάρχει μοναδικό επαγωγικό σύνολο που περιέχεται σε όλα τα επαγωγικά σύνολα.

Αποδείξη: Εστω A οποιοδήποτε επαγωγικό σύνολο. Θέτουμε

$$B=\{X \subseteq A: "X \text{ είναι επαγωγικό σύνολο"}\}.$$

Το B προφανώς δεν είναι κενό, αφού $A \in B$. Με βάση την πρόταση 1, το σύνολο $\omega = \bigcap B$ είναι επαγωγικό. Ως τομή, περιέχεται σε κάθε στοιχείο του B , δηλαδή σε κάθε επαγωγικό υποσύνολο του A .

Θα δείξουμε ότι το ω περιέχεται σε κάθε επαγωγικό σύνολο. Εστω ότι το C είναι επαγωγικό σύνολο. Τότε, από την πρόταση 1, η τομή $A \cap C$ είναι επίσης επαγωγικό σύνολο και περιέχεται στο A . Εχουμε λοιπόν ότι $\omega \subseteq A \cap C$, άρα $\omega \subseteq C$.

Το σύνολο ω είναι το μοναδικό επαγωγικό σύνολο που περιέχεται σε όλα τα επαγωγικά σύνολα. Πραγματικά, αν δύο σύνολα α, β είχαν αυτή την ιδιότητα, τότε πρέπει να ισχύει $\alpha \subseteq \beta$ και $\beta \subseteq \alpha$, άρα $\alpha = \beta$. ■

Ορισμός. Το ω , που είναι το μικρότερο επαγωγικό σύνολο, το λέμε σύνολο φυσικών αριθμών. Τα στοιχεία του ω τα λέμε φυσικούς αριθμούς.

Εχουμε προφανώς ότι $0 \in \omega$ και για κάθε $n \in \omega$ ισχύει $n' \in \omega$. Αργότερα θα δείξουμε ότι το σύνολο ω ικανοποιεί και τα υπολοιπα αιτήματα του Peano (σελίδα 44). Τα παρακάτω θεωρήματα εκφράζουν τη θεμελιώδη ιδιότητα των φυσικών αριθμών, τη λεγόμενη Αρχή Επαγωγής.

Θεώρημα 1. Για κάθε υποσύνολο X του ω

$$0 \in X \wedge (\forall n)(n \in X \rightarrow n' \in X) \rightarrow X = \omega,$$

δηλαδή κάθε επαγωγικό υποσύνολο του ω είναι ίσο με ολό το ω .

Η Αρχή Επαγωγής είναι ένα πανίσχυρο μέσο. Χρησιμοποιείται σε αποδείξεις θεωρημάτων και στους λεγόμενους αναδρομικούς ορισμούς.

Είναι γνωστή και μια διαφορετική διατύπωση της Αρχής Επαγωγής.

Θεώρημα 2. Εστω Φ τύπος. Εστω ότι ισχύει $\Phi(0)$ και $(\forall n \in \omega) \Phi(n) \rightarrow \Phi(n')$. Τότε $(\forall n \in \omega) \Phi(n)$.

Απόδειξη: Θετούμε $X = \{n \in \omega : \Phi(n)\}$. Ευκολά ελέγχουμε ότι το X είναι επαγωγικό υποσύνολο του ω . Από το θεώρημα 1 έχουμε $X = \omega$, δηλαδή $(\forall n \in \omega) \Phi(n)$. ■

Θα αποδείξουμε τώρα μερικές ιδιότητες του συνόλου ω .

Πρόταση 3. Τα στοιχεία των φυσικών αριθμών είναι φυσικοί αριθμοί, δηλαδή

$$n \in \omega \wedge x \in n \rightarrow x \in \omega.$$

Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο $X = \{n \in \omega : (\forall y \in n) y \in \omega\}$. Θα αποδείξουμε ότι το X είναι ίσο με το ω . Για το τελευταίο, αρκεί να δείξουμε ότι το X είναι επαγωγικό. Εχουμε ότι $0 \in X$, αφού $(\forall y \in 0) y \in \omega$. Ας υποθέσουμε ότι $n \in X$. Θα αποδείξουμε ότι τότε $n' \in X$. Εστω $y \in n'$, δηλαδή $y \in n \cup \{n\}$. Τότε έχουμε

$y \in n$ ή $y = n$. Αν $y \in n$, τότε λόγω της υποθέσεως ότι $n \in X$, έχουμε $y \in \omega$. Αν $y = n$, τότε προφανώς $y \in \omega$.

Το σύνολο X , ως επαγωγικό υποσύνολο του ω , ισούται με ω . Αποδείξαμε λοιπόν ότι για κάθε φυσικό αριθμό, όλα τα στοιχεία του είναι φυσικοί αριθμοί. ■

Πορίσμα. Κάθε στοιχείο του ω είναι υποσύνολο του, δηλαδή

$$\forall n(n \in \omega \rightarrow n \subseteq \omega).$$

Προτάση 4. Για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς n, m ισχύει:

$$n \in m \rightarrow n \subseteq m.$$

Αποδείξη: Αρκεί να αποδειχθεί ότι το σύνολο $X = \{n \in \omega : \forall m(m \in n \rightarrow m \subseteq n)\}$ είναι επαγωγικό (ασκήση 3.2). ■

Προτάση 5. Για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει: $n \in n$.

Αποδείξη: Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 2. Εστω $\Phi(x)$ ο τύπος $x \in x$. Έχουμε προφανώς $\Phi(0)$. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει $\Phi(x)$, δηλαδή ότι $x \in x$. Θα δείξουμε ότι τότε $x' \in x'$. Αν είχαμε $x' \in x'$, δηλαδή $\chi_{\{x\}} \in \chi_{\{x\}}$, τότε $\chi_{\{x\}} \in x$ ή $\chi_{\{x\}} = x$. Αν ήταν $\chi_{\{x\}} \in x$, τότε από την παραπάνω πρόταση, θα είχαμε ότι $\chi_{\{x\}} \subseteq x$. Από αυτό επεται ότι $x \in x$, που λόγω της υποθέσεως $x \notin x$ είναι αδύνατο. Αν ήταν $\chi_{\{x\}} = x$, τότε επίσης θα είχαμε $x \in x$. Η υποθεση $x' \in x'$ μας οδήγησε σε άτοπο. Πρέπει λοιπόν να ισχύει $x' \notin x'$.

Αποδείξαμε ότι $\Phi(x) \rightarrow \Phi(x')$. Από την Αρχή Επαγωγής επεται λοιπόν ότι $(\forall x \in \omega) x \in x$. ■

Προτάση 6. Για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς n, m ισχύει:

$$n' = m' \rightarrow n = m.$$

Αποδείξη: Εστω ότι $n \cup \{n\} = m \cup \{m\}$. Τότε $n \in m \cup \{m\}$, άρα $n \in m$ ή $n = m$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε $n \subseteq m$. Ομοίως, $m \in n \cup \{n\}$ και συνεπώς $m \subseteq n$. Επεται ότι $n = m$. ■

Η τελευταία πρόταση μας λέει ότι το σύνολο ω ικανοποιεί το αίτημα i_v του Peano. Είναι προφανές ότι ισχύει και το αίτημα iii , αφού το κενό σύνολο δεν είναι επομένο κανενός συνόλου. Βλέπουμε λοιπόν ότι το ω ικανοποιεί όλα τα αίτηματα του Peano.

Προτάση 7. Για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς n, m ισχύει:

$$n \subseteq m \leftrightarrow n \in m \vee n = m.$$

Αποδείξη: Το $(\leftarrow)$ είναι φανερό. Για να αποδείξουμε το $(\rightarrow)$, θεωρούμε τον τύπο $\Phi(m)$: $\forall n(n \subseteq m \rightarrow n \in m \vee n = m)$.

Επειδή για κάθε n έχουμε $n \subseteq \emptyset \rightarrow n = \emptyset$, βλέπουμε ότι ισχύει το $\Phi(0)$.

Υποθετούμε ότι ισχύει το $\Phi(m)$, δηλαδή ότι $\forall n(n \subseteq m \rightarrow n \in m \vee n = m)$. Θα

αποδειξουμε οτι τοτε ισχυει και το $\Phi(m')$. Ας υποθεσουμε οτι $n \leq m \cup \{m\}$.
Εξεταζουμε δυο περιπτωσεις.

Περίπτωση 1: $m \notin n$. Ευκολα ελεγχουμε οτι τοτε ισχυει $n \leq m$. Λογω της υπο-
θεσης $\Phi(m)$, εχουμε $n \in m \cup n = m$. Επεται οτι $n \in m'$.

Περίπτωση 2: $m \in n$. Τοτε $m \leq n$, συνεπως $m \cup \{m\} \leq n$. Επειδη ειχαμε $n \leq m \cup \{m\}$,
προκυπτει οτι $n = m'$.

Αποδειξαμε λοιπον οτι για καθε $n \in \omega$: $n \leq m' \rightarrow n \in m' \cup n = m'$, δηλαδη οτι
ισχυει το $\Phi(m')$.

Απο την Αρχη Επαγωγης συμπεραινουμε οτι για καθε $m \in \omega$ ισχυει $\Phi(m)$,
που αποδεικνυει το ζητουμενο. ■

Πορισμα. Για οποιουσδηποτε φυσικους αριθμους m, n ισχυει:

$$n \leq m \leftrightarrow n \in m.$$

Θα ορισουμε τωρα μια χρησιμη συνολοθεωρητικη εννοια.

Ορισμος. Ενα συνολο A λεγεται μεταβατικο, αν τα στοιχεια των στοιχειων
του A ειναι επισης στοιχεια του A . Το A ειναι δηλαδη μεταβατικο, οταν
για οποιαδηποτε x, y :

$$y \in x \wedge x \in A \rightarrow y \in A.$$

Παραδειγμα 1. Το συνολο ω ειναι μεταβατικο, επειδη τα στοιχεια των φυ-
σικων αριθμων ειναι φυσικοι αριθμοι (προταση 3). Απο την προταση 4 ε-
πεται οτι καθε φυσικος αριθμος ειναι μεταβατικο συνολο.

Η παρακατω προταση εκφραζει μερικους χαρακτηρισμους των μεταβατι-
κων συνολων.

Προταση 8. Εστω X συνολο. Τα ακολουθα ειναι ισοδυναμα:

- i) Το X ειναι μεταβατικο.
- ii) Καθε στοιχειο του X ειναι υποσυνολο του, δηλαδη $\forall z (z \in X \rightarrow z \subseteq X)$.
- iii) $X \subseteq \mathcal{P}X$.
- iv) $\bigcup X \subseteq X$.

3.3 Διαταξη των φυσικων αριθμων.

Οι φυσικοι αριθμοι οριστηκαν ετσι ωστε καθενας ειναι ισος με το
συνολο των προηγουμενων του. Η διαισθητικα γνωστη γνησια ανισοτητα των
φυσικων αριθμων ταυτιζεται δηλαδη με τη σχεση του "ανηκειν". Θα δουμε
στη συνεχεια οτι η σχεση

$$\in_\omega = \{ \langle m, n \rangle : m \in n \}$$

ειναι γνησια γραμμικη διαταξη του συνολου ω των φυσικων αριθμων.

Ορισμός. Για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς m, n θέτουμε:

$$m < n \leftrightarrow m \in n.$$

Το $m < n$ διαβάζεται " m είναι μικρότερο από n ".

Ορίσαμε λοιπόν ότι το m είναι μικρότερο από n εάν και μόνον εάν m είναι στοιχείο του n , δηλαδή εάν και μόνον εάν το ζεύγος $\langle m, n \rangle$ ανήκει στη σχέση $\in_\omega$.

Θεώρημα 3. Η σχέση $\in_\omega$ είναι γνήσια γραμμική διαταξη του συνόλου ω .

Αποδείξη: i) Η σχέση $\in_\omega$ είναι αντιανακλαστική, διότι, λόγω της προτάσης 3, έχουμε $n \notin n$ για κάθε $n \in \omega$.

ii) Η σχέση $\in_\omega$ είναι αντισυμμετρική, δηλαδή για οποιουσδήποτε $m, n \in \omega$ έχουμε $m \in n \rightarrow n \notin m$. Πραγματικά, αν ήταν $m \in n$ και $n \in m$, τότε $m \in n$ και $n \in m$. Θα είχαμε τότε ότι $m = n$ και συνεπώς $m \in m$ που είναι αδύνατο.

iii) Η σχέση $\in_\omega$ είναι μεταβατική. Εστω $k \in m$ και $m \in n$. Τότε, επειδή το σύνολο n είναι μεταβατικό, έχουμε ότι $k \in n$.

iv) Η σχέση $\in_\omega$ ικανοποιεί την τριχοτομική ιδιότητα, δηλαδή για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς ισχύει:

$$m \in n \vee m = n \vee n \in m.$$

Για να το αποδείξουμε, θεωρούμε τα σύνολα $T_m = \{n \in \omega : m \in n \vee n = m\}$, όπου $m \in \omega$. Για το ζητούμενο, αρκεί να δούμε ότι για κάθε $m \in \omega$ έχουμε $T_m = \omega$. Θα το αποδείξουμε με επαγωγή.

Για κάθε n έχουμε $\emptyset \leq n$. Από την πρόταση 7, επεται ότι $\emptyset \in n \vee \emptyset = n$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $n \in \omega$ έχουμε $n \in T_\emptyset$, δηλαδή $T_\emptyset = \omega$.

Ας υποθέσουμε ότι $T_m = \omega$. Για οποιονδήποτε $n \in \omega$, έχουμε $m \in n \vee m = n \vee n \in m$. Αν $n \in m$ ή $m = n$, τότε $n \in T_m$. Αν $m \in n$, τότε $m \cup \{m\} \leq n$, δηλαδή $m' \leq n$. Με βάση την πρόταση 7, έχουμε ότι $m' \in n \vee m' = n$. Σε κάθε περίπτωση ισχύει λοιπόν ότι $m' \in n \vee m' = n \vee n \in m'$. Δείξαμε ότι για κάθε $n \in \omega$ ισχύει $n \in T_m$, δηλαδή $T_m = \omega$.

Από την Αρχή Επαγωγής επεται ότι για κάθε φυσικό αριθμό m έχουμε $T_m = \omega$. Συνεπώς, για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς m, n ισχύει:

$$m \in n \vee m = n \vee n \in m. \blacksquare$$

Παρατήρηση. Για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς m, n , η διαζευξη

$$m < n \vee m = n \vee n < m$$

είναι αποκλειστική, δηλαδή ικανοποιείται ακριβώς ένας από τους όρους $m < n$, $m = n$, $n < m$.

Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 2, για κάθε γνήσια διαταξη ορίζεται μια αντιστοιχία ασθενούς διαταξης. Την ασθενή διαταξη του συνόλου ω των φυσικών αριθμών, που αντιστοιχεί στη διαταξη $<$, τη συμβολίζουμε με $\leq$. Αυτή

ορίζεται ως εξής:

$$m \leq n \leftrightarrow m < n \vee m = n,$$

για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς m, n . Το $m \leq n$ διαβάζεται " m μικρότερος ή ίσος με n ".

Η ακολουθή προτασης, που είναι αναδιατυπωση της προτασης 5, λέει ότι η ασθενής διαταξη των φυσικών αριθμών ταυτίζεται με τη σχέση του εγκλεισμού $\subseteq_\omega$.

Προταση 9. Για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς m, n ισχύει:

$$m \leq n \leftrightarrow m \subseteq n.$$

Ομοια, η γνήσια διαταξη $<$ των φυσικών αριθμών ταυτίζεται με το γνήσιο εγκλεισμο περιορισμένο στο σύνολο ω , δηλαδή τη σχέση

$$\subset_\omega = \{ \langle m, n \rangle \in \omega^2 : m \subset n \}.$$

Το πορίσμα στη σελίδα 48 μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Προταση 10. Για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς m, n ισχύει:

$$m < n \leftrightarrow m \subset n.$$

Απο τα παραπάνω και απο την προταση 19 του κεφαλαίου 2 (σελ. 35), έχουμε αμεσως την ακολουθή προταση.

Προταση 11. Η σχέση $\subseteq_\omega$ είναι γραμμική διαταξη του συνόλου ω .

Παρατηρηση. Στο διατεταγμένο σύνολο των φυσικών αριθμών, το 0 είναι το μικρότερο στοιχείο, αφού για κάθε $n \in \omega$ ισχύει: $0 \leq n$. Δεν υπάρχει μέγιστο στοιχείο, διότι για κάθε $n \in \omega$ έχουμε $n < n^+$.

Θα σημειώσουμε μερικές ακόμα ιδιότητες της διαταξης των φυσικών αριθμών.

Προταση 12. Ο φυσικός αριθμός n^+ είναι ο αμέσως επόμενος του n , δηλαδή δεν υπάρχει φυσικός αριθμός m τέτοιος ώστε $n < m$ και $m < n^+$.

Αποδειξη: Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο $n \in \omega$ υπάρχει x τέτοιο ώστε $n < x$ και $x < n^+$. Τότε $n \leq x$ και $x \in n^+$. Διακρινουμε δυο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: $n \in x$. Τότε $n \in n^+$ και συνεπώς $x = n^+$, που είναι αδύνατο.

Περίπτωση 2: $n \notin x$. Τότε, απο το $x \in n^+$, έχουμε $x \leq n$. Αρα $x = n$. Ατοπο.

Βλέπουμε λοιπόν ότι για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς m, n είναι αδύνατο να ισχύει $n < m$ και $m < n^+$. ■

Ευκολα αποδεικνυονται οι επόμενες προτασεις (ασκήσεις 3.10, 3.11).

Προταση 13. Για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς m, n ισχύει:

$$i) \quad m < n \leftrightarrow m^+ \leq n,$$

$$ii) \quad m < n \leftrightarrow m^+ < n^+,$$

$$\text{iii)} \quad m < n' \leftrightarrow m \leq n,$$

$$\text{iv)} \quad m \leq n' \leftrightarrow m \leq n \vee m = n'.$$

Προταση 14. Καθε φυσικος αριθμος διαφορετικος απο το 0 ειναι επομενος καποιου φυσικου αριθμου.

3.4 Η Αρχη Ελαχιστου.

Θα αποδειξουμε τωρα ενα σημαντικο θεωρημα για τους φυσικους αριθμους που ειναι γνωστο ως Αρχη Ελαχιστου.

Θεωρημα 4. Σε καθε μη κενο υποσυνολο του ω υπαρχει ελαχιστο στοιχειο. Δηλαδη αν $X \subseteq \omega$, $X \neq \emptyset$, τοτε υπαρχει $n \in \omega$ τετοιος ωστε

$$n \in X \wedge \forall m (m < n \rightarrow m \notin X).$$

Αποδειξη: Ας παρατηρησουμε οτι το n ειναι ελαχιστο στοιχειο του συνολου X εαν και μονον εαν $n \in X \wedge n \cap X = \emptyset$. Θα αποδειξουμε οτι αν X ειναι υποσυνολο του ω που δεν εχει ελαχιστο στοιχειο, τοτε το X ειναι κενο. Αυτο ειναι ισοδυναμο με το ζητουμενο.

Θετουμε $Y = \{n \in \omega : n \cap X = \emptyset\}$. Αν το X δεν εχει ελαχιστο στοιχειο, τοτε τα συνολα X, Y ειναι ξενα. Πραγματικα, αν υπηρχε $n \in X \cap Y$, τοτε θα ειχαμε $n \in X$ και $n \cap X = \emptyset$, δηλαδη το n θα ηταν ελαχιστο στοιχειο του συνολου X .

Επειδη $X \cap Y = \emptyset$, για να εχουμε $X = \emptyset$, αρκει να δειξουμε οτι $Y = \omega$. Θα το αποδειξουμε με επαγωγη. Ειναι φανερο οτι $0 \in Y$, αφου $\emptyset \cap X = \emptyset$.

Ας υποθεσουμε οτι $n \in Y$. Τοτε $n \cap X = \emptyset$. Αν ειχαμε $n \in X$, τοτε το n θα ηταν ελαχιστο στοιχειο του X . Πρεπει λοιπον να ισχυει: $n \notin X$. Συνεπως, $(n \cup \{n\}) \cap X = \emptyset$. Αυτο σημαινει οτι $n' \in Y$.

Απο την Αρχη Επαγωγης εχουμε $Y = \omega$ και επομενως $X = \emptyset$. ■

Ορισμος. Αν $X \subseteq \omega$, $X \neq \emptyset$, τοτε ο μικροτερος φυσικος αριθμος που ανηκει στο X συμβολιζεται $\min X$.

Η Αρχη Ελαχιστου διατυπωνεται ισοδυναμα και ως εξης:

Θεωρημα 5. Εστω Φ τυπος. Ας υποθεσουμε οτι ισχυει $(\exists n \in \omega) \Phi(n)$. Τοτε $(\exists n \in \omega) (\Phi(n) \wedge \forall k (k < n \rightarrow \neg \Phi(k)))$.

Αποδειξη: Θετοντας $X = \{m \in \omega : \Phi(m)\}$, λογω της υποθεσης $(\exists n \in \omega) \Phi(n)$, εχουμε $X \neq \emptyset$. Εστω $n = \min X$. Εχουμε οτι $n \in X$ και για καθε $k < n$ ισχυει: $k \notin X$. Αυτο σημαινει ακριβως οτι $\Phi(n) \wedge \forall k (k < n \rightarrow \neg \Phi(k))$. ■

Τα επομενα δυο θεωρηματα εκφραζουν τη λεγομενη ισχυρη μορφη της Αρχης Επαγωγης.

Θεωρημα 6. Εστω $X \subseteq \omega$. Ας υποθεσουμε οτι για καθε $n \in \omega$, απο το γεγονος οτι ολοι οι φυσικοι αριθμοι μικροτεροι απο n ανηκουν στο X , επεται οτι

$n \in X$. Τότε $X = \omega$. Δηλαδή

$$\forall n (n \leq X \rightarrow n \in X) \rightarrow X = \omega.$$

Αποδείξη: Εστω ότι $X \leq \omega$ έχει την ιδιότητα $\forall n (n \leq X \rightarrow n \in X)$. Ας υποθέσουμε ότι $X \neq \omega$. Τότε $\omega - X \neq \emptyset$. Εστω ότι n είναι το ελάχιστο στοιχείο του $\omega - X$. Έχουμε ότι $n \in \omega - X$ και $n \cap (\omega - X) = \emptyset$. Αυτό σημαίνει ότι $n \notin X$ και $n \leq X$, που δεν είναι δυνατό λόγω της υποθέσης του θεωρήματος. ■

Ισοδύναμο με το παραπάνω θεώρημα είναι το ακόλουθο.

Θεώρημα 7. Εστω Φ τυπός. Εστω ότι για κάθε $n \in \omega$ ισχύει:

$$(\forall m \in n) \Phi(m) \rightarrow \Phi(n).$$

Τότε $(\forall n \in \omega) \Phi(n)$.

Αποδείξη: Θετούμε $X = \{n \in \omega : \Phi(n)\}$. Για οποιοδήποτε $n \in \omega$, αν $n \leq X$, έχουμε $(\forall m \in n) \Phi(m)$. Επεται ότι $\Phi(n)$, δηλαδή $n \in X$. Το σύνολο X ικανοποιεί τις υποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος. Πρέπει λοιπόν να ισχύει $X = \omega$. Επομένως $(\forall n \in \omega) \Phi(n)$. ■

3.5 Η Αρχή Αναδρομής.

Ορισμοί. Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών λέγεται απειρή ακολουθία (ή απλώς ακολουθία). Μια συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού έναν φυσικό αριθμό λέγεται πεπερασμένη ακολουθία. Μήκος μιας ακολουθίας (πεπερασμένης ή απείρης) λέμε το πεδίο ορισμού της.

Τα παρακάτω θεωρήματα εκφράζουν τη λεγόμενη Αρχή Αναδρομής. Αυτή η Αρχή μας επιτρέπει να χρησιμοποιούμε επαγωγή στους ορισμούς ακολουθιών. Τετοιού είδους ορισμοί λέγονται αναδρομικοί. Οι ακολουθίες που ορίζονται με βάση την Αρχή Αναδρομής λέγονται αναδρομικές και εμφανίζονται συχνά στα Μαθηματικά.

Θα διατυπώσουμε τρία θεωρήματα. Το πρώτο από αυτά μας επιτρέπει να ορίζουμε αναδρομικές ακολουθίες των οποίων κάθε όρος, εκτός από τον πρώτο, ορίζεται συναρτήσει του προηγούμενου. Το δεύτερο θεώρημα είναι γενικότερο. Επιτρέπει ο n ' όρος να εξαρτάται από τον προηγούμενο και από το n . Πιο ισχυρό είναι το τελευταίο θεώρημα, το οποίο μας επιτρέπει να χρησιμοποιούμε στους αναδρομικούς ορισμούς παραμετρους από ένα προκαθορισμένο σύνολο.

Εφαρμογές της Αρχής Αναδρομής θα γνωρίσουμε στην επόμενη παραγράφo. Θα εφαρμόσουμε εκεί τα θεωρήματα για να ορίσουμε τις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού των φυσικών αριθμών.

Θα αποδείξουμε μόνο το θεώρημα 8. Οι αποδείξεις των άλλων δυο ει-

ναι ομοιες, αν και τεχνικα λιγο δυσκολοτερες.

Θεωρημα 8. Εστω A συνολο. Εστω $a \in A$ και $h: A \rightarrow A$. Υπαρχει ακριβως μια συναρτηση $f: \omega \rightarrow A$ τετοια ωστε:

$$i) f(0)=a,$$

$$ii) (\forall n \in \omega) f(n')=h(f(n)).$$

Θεωρημα 9. Εστω A συνολο. Εστω $a \in A$ και $h: A \times \omega \rightarrow A$. Υπαρχει ακριβως μια συναρτηση $f: \omega \rightarrow A$ τετοια ωστε:

$$i) f(0)=a,$$

$$ii) (\forall n \in \omega) f(n')=h(f(n), n).$$

Θεωρημα 10. Εστω A, P συνολα. Εστω $a: P \rightarrow A$ και $h: A \times \omega \times P \rightarrow A$. Υπαρχει ακριβως μια συναρτηση $f: P \times \omega \rightarrow A$ τετοια ωστε:

$$i) (\forall x \in P) f(x, 0)=a(x),$$

$$ii) (\forall x \in P) (\forall n \in \omega) f(x, n')=h(f(x, n), n, x).$$

Αποδειξη του θεωρηματος 8: Θα αποδειξουμε πρωτα τη μοναδικοτητα. Εστω οτι f_1, f_2 ικανοποιουν το θεωρημα και ειναι διαφορετικες. Τότε για καποιο $k \in \omega$ ισχυει $f_1(k) \neq f_2(k)$. Εστω οτι m ειναι ο ελαχιστος φυσικος με αυτη την ιδιοτητα, δηλαδη $f_1(m) \neq f_2(m)$ και για $k < m$: $f_1(k)=f_2(k)$. Επειδη $f_1(0)=a=f_2(0)$, πρεπει να ειναι $m \neq 0$. Υπαρχει λοιπον n ωστε $m=n'$. Εχουμε $f_1(n)=f_2(n)$, διοτι $n < m$. Επεται οτι $f_1(n')=h(f_1(n))=h(f_2(n))=f_2(n')$, δηλαδη $f_1(m)=f_2(m)$. Ατοπο. Βλεπουμε λοιπον οτι η συναρτηση f που ικανοποιει το θεωρημα, αν υπαρχει, ειναι μοναδικη.

Για να αποδειξουμε την υπαρξη της ζητουμενης συναρτησης, θεωρουμε το συνολο $X=\{g: \Phi(g)\}$, οπου $\Phi(g)$ ειναι ο τυπος:

$$\begin{aligned} & \text{"} g \text{ ειναι πεπερασμενη ακολουθια" } \wedge g \neq \emptyset \wedge \text{rng}(g) \subseteq A \wedge \\ & \wedge g(0)=a \wedge \forall k (k' \in \text{edom}(g) \rightarrow g(k')=h(g(k))) \end{aligned}$$

Το συνολο X δεν ειναι κενο, αφου π.χ. $g_0=\{ \langle 0, a \rangle \}$, $g_1=\{ \langle 0, a \rangle, \langle 1, h(a) \rangle \}$ ειναι στοιχεια του.

Παρατηρουμε οτι, αν $F \in X$, $G \in X$ και $n \in \text{edom}(F)$, $n \in \text{edom}(G)$, τότε ισχυει: $F(n)=G(n)$. Αυτο αποδεικνυεται ακριβως οπως η μοναδικοτητα της f .

Απο το παραπανω επεται οτι αν $F \in X$ και $G \in X$, τότε $F \subseteq G$ η $G \subseteq F$, δηλαδη η G ειναι επεκταση της F ή η F ειναι επεκταση της G . Συνεπως, η ενωση $\bigcup X$ ειναι συναρτηση και μαλιστα ειναι επεκταση καθε ακολουθιας που ανηκει στο συνολο X (ασκηση 2.14).

Θετουμε $f=\bigcup X$ και εχουμε $f=\{ \langle n, s \rangle : (\exists g \in X) g(n)=s \}$. Το πεδιο τιμων της f περιεχεται προφανως στο A . Πεδιο ορισμου της f ειναι η ενωση των

πεδίων ορισμού των στοιχείων του X . Θα δείξουμε ότι $\text{dom}(f)=\omega$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $n \in \omega$, αυτό ανήκει στο πεδίο ορισμού μιας $g \in X$. Θα το αποδείξουμε με επαγωγή. Έχουμε $0 \in \text{dom}(g_0)$, όπου $g_0 = \{ \langle 0, a \rangle \}$. Ας υποθέσουμε ότι για μια ακολουθία $g \in X$, έχουμε $n \in \text{dom}(g)$ και $n' \notin \text{dom}(g)$. Θετούμε $g' = g \cup \{ \langle n, h(g(n)) \rangle \}$. Προφανώς $n' \in \text{dom}(g')$. Ευκολά βλέπουμε ότι $g' \in X$ (είχαμε $\Phi(g)$ και ελεγχουμε ότι ισχύει $\Phi(g')$). Αποδείξαμε λοιπόν ότι $f: \omega \rightarrow A$.

Η απόδειξη του θεωρήματος θα ολοκληρωθεί, αφού ελεγχουμε ότι η f ικανοποιεί τις συνθήκες i και ii. Επειδή η ακολουθία $g_0 = \{ \langle 0, a \rangle \}$ ανήκει στο X και η f είναι επέκταση της, έχουμε $f(0)=a$. Για κάθε $n \in \omega$ υπάρχει $g \in X$ ώστε $n \in \text{dom}(g)$. Επειδή $g(n')=h(g(n))$ και η f είναι επέκταση της g , επεται ότι $f(n')=h(f(n))$. ■

3.6 Αριθμητική στο ω .

Θα ορίσουμε παρακάτω τις πράξεις πρόσθεσης $+$ και πολλαπλασιασμού στους φυσικούς αριθμούς. Οι ορισμοί είναι αναδρομικοί ως προς μια από τις μεταβλητές. Η άλλη μεταβλητή είναι παραμετρος.

Ορισμός. Για φυσικούς αριθμούς m, n ορίζουμε:

- i) $m+0=m$,
- ii) $m+n'=(m+n)'$.

Αποδεικνύεται ότι η πρόσθεση $+$ είναι αντιμεταθετική, προσεταιρι-στική και έχει ουδέτερο στοιχείο το 0 (ασκήσεις 3.17, 3.18).

Προτάση 15. Για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς k, m, n ισχύει:

- i) $m+n=n+m$,
- ii) $(k+m)+n=k+(m+n)$.

Η διατάξη των φυσικών αριθμών μπορεί να οριστεί μέσω της πρόσθε-σης. Ευκολά αποδεικνύεται με επαγωγή η ακολουθία προτάση (ασκήση 3.20).

Προτάση 16. Για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς m, n ισχύει:

- i) $m \leq n \leftrightarrow (\exists k \in \omega) m+k=n$,
- ii) $m \leq n \leftrightarrow (\exists k \in \omega) (k \neq 0 \wedge m+k=n)$.

Παρατήρηση. Ξερούμε ότι αν $m \leq n$, τότε υπάρχει $k \in \omega$ ώστε $m+k=n$. Από το νομο διαγραφής για την πρόσθεση (ασκήση 3.18 ii), επεται ότι, για δο-σμένα $m \leq n$, το k είναι μοναδικό. Αυτό λεγεται διαφορά των n, m και συμ-βολιζεται $n-m$. Έχουμε προφανώς $m+(n-m)=n$, για $m \leq n$.

Ορισμός. Για φυσικούς αριθμούς m, n ορίζουμε:

- i) $m \cdot 0 = 0$,
 ii) $m \cdot n' = (m \cdot n) + m$.

Αντι για το $m \cdot n$, γράφουμε παραδοσιακά mn . Γράφουμε επίσης $k \cdot m + n$ αντι του $(k \cdot m) + n$, δεχομαστε δηλαδή ότι το συμβολο $\cdot$ είναι ισχυροτερο απο το $+$.

Αποδεικνυεται ότι ο πολλαπλασιασμος είναι αντιμεταθετικός, προσ-
 εταιριστικός και έχει ουδετερο στοιχείο το 1. Αυτες και μερικές άλλες
 ιδιοτητες των πράξεων στους φυσικούς αριθμούς εκφραζουν οι ασκήσεις
 3.20, 3.21 και 3.22.

3.7 Κωδικοποίηση ζευγών.

Σ' αυτήν την παραγραφο θα αποδειξουμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση
 που μετασχηματίζει αμφιμονοσημαντα (δηλαδή 1-1 και επί) το ω^2 στο ω .
 Μια τέτοια συνάρτηση μπορεί να θεωρηθεί αρίθμηση (κωδικοποίηση) των
 ζευγών φυσικών αριθμών απο φυσικούς αριθμούς.

Ένα μέρος της αποδείξης περιεχει το παρακατω λήμμα (ασκήση 3.24).

Λήμμα. Ορίζουμε αναδρομικά τη συνάρτηση $T: \omega \rightarrow \omega$ ως εξής:

$T(0) = 0$, $T(n+1) = T(n) + n + 1$. Η T έχει τις παρακατω ιδιοτητες:

- i) Είναι γνησια αυξουσα, δηλαδή $(\forall m \in \omega)(\forall n \in \omega)(m < n \rightarrow T(m) < T(n))$,
 ii) Είναι 1-1,
 iii) $(\forall y \in \omega)(\exists x \in \omega)(T(x) \leq y < T(x+1))$.

Θεωρημα 11. Υπάρχει μια συνάρτηση $J: \omega \times \omega \rightarrow \omega$ $\frac{1-1}{\text{επί}}$ ω .

Αποδειξη: Για φυσικούς αριθμούς m και n θετουμε: $J(m, n) = T(m+n) + n$, όπου
 T είναι η συνάρτηση του λήμματος. Εχουμε $J: \omega^2 \rightarrow \omega$.

Για να δείξουμε ότι η J είναι 1-1, ας υποθεσουμε ότι $\langle m, n \rangle \neq \langle k, l \rangle$.

Περίπτωση 1: $m+n \neq k+l$. Αν ήταν $J(m, n) = J(k, l)$, θα είχαμε ότι $T(m+n) + n = T(k+l) + l$, αρα $n = l$. Επεται ότι $m = k$ και συνεπώς $\langle m, n \rangle = \langle k, l \rangle$, που είναι αδυνατο. Πρέπει λοιπον να είναι $J(m, n) \neq J(k, l)$.

Περίπτωση 2: $m+n \neq k+l$. Μπορούμε να υποθεσουμε ότι $m+n < k+l$ (αν $k+l < m+n$ η αποδειξη είναι ομοια). Τότε $m+n+1 \leq k+l$, συνεπώς $T(m+n+1) \leq T(k+l)$. Επεται ότι $J(m, n) = T(m+n) + n < T(m+n) + (m+n+1) = T(m+n+1) \leq T(k+l) < T(k+l) + l = J(k, l)$. Εχουμε λοιπον $J(m, n) < J(k, l)$, αρα $J(m, n) \neq J(k, l)$.

Θα αποδειξουμε τώρα ότι η J είναι επί του ω . Εστω $y \in \omega$. Ξερούμε απο το λήμμα ότι υπάρχει $x \in \omega$ ώστε $T(x) \leq y < T(x+1)$. Θετουμε $n = y - T(x)$. Ας παρατηρήσουμε ότι $n \leq x$. Διαφορετικά θα είχαμε $x+1 \leq n$ και συνεπώς $T(x+1) = T(x) + x + 1 \leq T(x) + n = y$. Αυτό είναι αδυνατο, διότι έχουμε $y < T(x+1)$. Επειδή

$n \leq x$, μπορούμε να θέσουμε $m = x^2 \cdot n$. Ευκολά ελεγχουμε ότι

$$J(m, n) = T(m+n) + n = T(x) + n = y.$$

Για δοσμένο y , βρήκαμε λοιπόν m, n τέτοια ώστε $J(m, n) = y$. ■

3.8 Οι ακέραιοι, ρητοί και πραγματικοί αριθμοί.

Θα περιγράψουμε χονδρικά πως μπορούν να κατασκευαστούν τα σύνολα των ακεραίων και των ρητών αριθμών. Θα δούμε επίσης πως ορίζονται οι αριθμητικές πράξεις και οι διατάξεις σ' αυτά τα σύνολα.

Κατασκευή του συνόλου των ακεραίων αριθμών.

Για $\langle m, n \rangle, \langle k, l \rangle \in \omega^2$, θέτουμε:

$$\langle m, n \rangle R \langle k, l \rangle \Leftrightarrow m + l = n + k.$$

Ευκολά ελεγχουμε ότι η σχέση $R \subseteq \omega^2 \times \omega^2$ είναι σχέση ισοδυναμίας (ασκήση 3.26). Το σύνολο πηλικο ω^2 / R το συμβολίζουμε $\mathbb{Z}$. Έχουμε δηλαδή

$$\mathbb{Z} = \{ \langle m, n \rangle : m, n \in \omega \}.$$

Τα στοιχεία του $\mathbb{Z}$ τα λέμε ακεραίους αριθμούς.

Συμβολίζουμε $+n = \langle n, 0 \rangle$ και $-n = \langle 0, n \rangle$, για $n \in \omega$. Βλέπουμε ότι

$$\mathbb{Z} = \{ +n : n \in \omega \} \cup \{ -n : n \in \omega \}.$$

Έχουμε $+0 = -0$ και $+n \neq -n$ για $n \neq 0$. Ας παρατηρήσουμε ότι

$$+n = \{ \langle k, l \rangle : k = n + l \} \quad \text{και} \quad -n = \{ \langle k, l \rangle : l = k + n \}.$$

Μπορούμε δηλαδή να θεωρήσουμε το ζεύγος $\langle k, l \rangle$ αντιπροσωπο της "διαφοράς $k - l$ ".

Το σύνολο των φυσικών αριθμών μπορεί να θεωρηθεί υποσύνολο του $\mathbb{Z}$. Πραγματικά, αν θέσουμε για $n \in \omega$: $F(n) = +n$, έχουμε $F: \omega \xrightarrow{1-1} \mathbb{Z}$. Ο φυσικός αριθμός n ταυτίζεται (μέσω της F) με τον ακέραιο αριθμό $+n$. Θα γράφουμε λοιπόν n αντι για $+n$.

Για να εισαγάγουμε τις αριθμητικές πράξεις και τη διατάξη στο $\mathbb{Z}$, ορίζουμε πρώτα στους αντιπροσώπους των κλάσεων ισοδυναμίας δυο συναρτήσεις: $+$, $\cdot$ και μια σχέση $<$. Για ζεύγη $\langle m, n \rangle, \langle k, l \rangle \in \omega^2$ θέτουμε:

$$i) \langle m, n \rangle + \langle k, l \rangle = \langle m + k, n + l \rangle,$$

$$ii) \langle m, n \rangle \cdot \langle k, l \rangle = \langle mk + nl, ml + nk \rangle,$$

$$iii) \langle m, n \rangle < \langle k, l \rangle \Leftrightarrow m + l < n + k.$$

Ελεγχουμε ότι οι συναρτήσεις $+$, $\cdot$ και η σχέση $<$ συμφωνούν με τη σχέση ισοδυναμίας R (ασκήση 3.27). Μπορούμε επομένως να ορίσουμε στις κλάσεις ισοδυναμίας αντίστοιχες συναρτήσεις πρόσθεσης $+$, πολλαπλασιασμού $\cdot$ και τη σχέση $<$. Η χρησιμοποίηση των ιδίων συμβολών δεν οδηγεί σε παρεξηγήσεις, αφού οι παρακάτω ορισμοί είναι ανεξάρτητοι από την επιλογή

των αντιπροσώπων. Θετούμε λοιπόν:

- i) $[<m, n>] + [<k, l>] = [<m+k, n+l>],$
- ii) $[<m, n>] \cdot [<k, l>] = [<mk+nl, ml+nk>],$
- iii) $[<m, n>] < [<k, l>] \Leftrightarrow <m, n> < <k, l> \Leftrightarrow m+l < n+k.$

Τώρα μπορούν να αποδειχθούν όλοι οι γνωστοί από την αριθμητική νομοί για τις πράξεις στους ακέραιους αριθμούς. Οι πράξεις αυτές είναι επεκτασεις των αντιστοιχών πράξεων στους φυσικούς αριθμούς. Αποδεικνύεται επίσης ότι η σχέση $<$ είναι η γνωστή από τα Μαθηματικά γραμμική διατάξη του $\mathbb{Z}$. Μερικές από τις ιδιότητες της διατάξης εκφράζει η άσκηση 3.28.

Στο $\mathbb{Z}$ ορίζεται μια ακόμα αριθμητική πράξη, η διαφορά - (άσκηση 3.29), έτσι ώστε για οποιουσδήποτε ακέραιους x, y, z ισχύει:

$$x-y=z \Leftrightarrow x=y+z.$$

Κατασκευή του συνόλου των ρητών αριθμών.

Στο σύνολο $U = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ ορίζουμε τη σχέση S με:

$$<i, j> S <k, l> \Leftrightarrow il = jk.$$

Η S είναι σχέση ισοδυναμίας στο U . Το σύνολο πηλίκου U/S το συμβολίζουμε με $\mathbb{Q}$. Εχουμε δηλαδή

$$\mathbb{Q} = \{[<i, j>] : i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}.$$

Τα στοιχεία του $\mathbb{Q}$ τα λέμε ρητούς αριθμούς.

Τον ρητό αριθμό $[<i, j>]$ τον συμβολίζουμε παραδοσιακά $\frac{i}{j}$. Εχουμε

$$\frac{i}{j} = \frac{k}{l} \Leftrightarrow [<i, j>] = [<k, l>] \Leftrightarrow <i, j> S <k, l> \Leftrightarrow il = jk.$$

Οι ακέραιοι αριθμοί μπορούν να θεωρηθούν στοιχεία του $\mathbb{Q}$. Πράγματι, αν θέσουμε $G(x) = [<x, 1>]$, για κάθε $x \in \mathbb{Z}$, ορίζουμε μια συνάρτηση G ώστε $G: \mathbb{Z} \xrightarrow{1-1} \mathbb{Q}$. Το σύνολο $\mathbb{Z}$ ταυτίζεται λοιπόν με ένα υποσύνολο του $\mathbb{Q}$. Αντι για $\frac{i}{1}$ θα γράφουμε απλώς i .

Οι πράξεις στους ρητούς αριθμούς, που ορίζουμε παρακάτω, είναι επεκτασεις των αντιστοιχών πράξεων στους ακέραιους αριθμούς. Ομοια και η διατάξη $<$ που θα ορίσουμε στο $\mathbb{Q}$, περιορισμένη στους ακέραιους αριθμούς, συμφωνεί με τη διατάξη του $\mathbb{Z}$. Όπως και για τις πράξεις στους ακέραιους αριθμούς, ορίζουμε πρώτα αντιστοιχες συναρτήσεις στους αντιπροσώπους των κλάσεων ισοδυναμίας και ελέγχουμε ότι οι συναρτήσεις αυτές συμφωνούν με τη σχέση ισοδυναμίας S (άσκηση 3.31).

Για $<i, j>, <k, l> \in U$ ορίζουμε:

$$\text{i) } \frac{i}{j} + \frac{k}{l} = \frac{il+jk}{jl}, \quad \text{ii) } \frac{i}{j} - \frac{k}{l} = \frac{il-jk}{jl}, \quad \text{iii) } \frac{i}{j} \cdot \frac{k}{l} = \frac{ik}{jl}.$$

Στο $\mathbb{Q}$ ορίζεται μια ακόμα πράξη, η διαίρεση $:$, έτσι ώστε:

$$x:y=z \leftrightarrow x=y \cdot z. \quad (\text{για } y \neq 0).$$

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι γνωστοί νομοί της αριθμητικής των ρητών αριθμών.

Για να ορίσουμε τη διατάξη στο $\mathbb{Q}$, παρατηρούμε πρώτα ότι κάθε ρητός αριθμός έχει αντιπροσωπο $\langle i, j \rangle$ με $j > 0$ (ασκήση 3.30). Για $\frac{i}{j}, \frac{k}{l} \in \mathbb{Q}$, $j > 0, l > 0$, θέτουμε:

$$\frac{i}{j} < \frac{k}{l} \leftrightarrow il < jk.$$

Ευκολά ελέγχεται ότι η σχέση $<$ είναι γνήσια γραμμική διατάξη του $\mathbb{Q}$. Η διατάξη αυτή, περιορισμένη σε ακέραιους αριθμούς συμφωνεί με τη διατάξη του συνόλου $\mathbb{Z}$.

Η διατάξη των ρητών αριθμών έχει μια ιδιότητα που δεν την έχουν οι διατάξεις των φυσικών και των ακέραιων αριθμών. Είναι πυκνή, δηλαδή μεταξύ κάθε δυο ρητών αριθμών υπάρχει τρίτος (ασκήση 3.32).

Κλείνουμε το κεφάλαιο με λίγα λόγια για τους πραγματικούς αριθμούς.

Οι πραγματικοί αριθμοί.

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι κατασκευής των πραγματικών αριθμών. Θα αναφέρουμε εδώ την κατασκευή του Cantor. Πιο γνωστός είναι ένας άλλος τρόπος, η λεγόμενη μέθοδος τομών του Dedekind.

Θεωρούμε το σύνολο X όλων των ακολουθιών $(a_n)_{n \in \omega}$ ρητών αριθμών που ικανοποιούν τη παρακάτω συνθήκη (του Cauchy).

"Για κάθε ρητό $\varepsilon > 0$ υπάρχει $k \in \omega$ ώστε για κάθε $m, n \in \omega$, $m > k, n > k$:

$$|a_n - a_m| < \varepsilon."$$

Στο σύνολο X ορίζεται μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ ως εξής:

$$(a_n)_{n \in \omega} \sim (b_n)_{n \in \omega} \leftrightarrow \lim(a_n - b_n) = 0.$$

Το σύνολο πηλικο $X/\sim$ συμβολίζεται $\mathbb{R}$. Τα στοιχεία του $\mathbb{R}$ λέγονται πραγματικοί αριθμοί.

Η κλάση ισοδυναμίας $[(a_n)_{n \in \omega}]$ "παριστάνει" τον πραγματικό αριθμό, στον οποίο συγκλίνουν όλες οι ισοδύναμες με την $(a_n)_{n \in \omega}$ ακολουθίες ρητών αριθμών του συνόλου X .

Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών ταυτίζεται με ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Στο $\mathbb{R}$ ορίζονται καταλλήλα οι τέσσερις αριθμητικές πράξεις, οι οποίες είναι επεκτασεις των πράξεων στο $\mathbb{Q}$. Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι νομοί της αριθμητικής για τους πραγματικούς αριθμούς. Η διατάξη του $\mathbb{Q}$ μπορεί

να επεκταθεί στο $\mathbb{R}$. Η διαταξη του συνόλου των πραγματικών αριθμών έχει μια ιδιότητα που δεν την έχουν οι διαταξεις των συνόλων $\omega, \mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$. Είναι πληρης, δηλαδή:

"Για κάθε μη κενό, ανω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ υπάρχει ανω περας".

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.1 Αποδειξτε ότι η τομή δυο επαγωγικών συνολών είναι επίσης επαγωγικό σύνολο. Αποδειξτε γενικότερα ότι αν B είναι μη κενό σύνολο επαγωγικών συνολών, τότε τομή $\bigcap B$ είναι επίσης επαγωγικό σύνολο.

3.2 Αποδειξτε ότι το σύνολο $X = \{n \in \omega : \forall m (m \in n \rightarrow m \leq n)\}$ είναι επαγωγικό.

3.3 Αποδειξτε ότι για κάθε $n \in \omega$ ισχύει:

- i) $\omega \notin n$, ii) $\omega \notin n$.

3.4 Αποδειξτε τους χαρακτηρισμούς των μεταβατικών συνολών που εκφράζει η πρόταση 8 (σελιδα 48).

3.5 Αποδειξτε ότι η τομή δυο μεταβατικών συνολών είναι μεταβατικό σύνολο. Αποδειξτε γενικότερα ότι αν X είναι ένα μη κενό σύνολο μεταβατικών συνολών, τότε η τομή $\bigcap X$ είναι επίσης μεταβατικό σύνολο.

3.6 Αποδειξτε ότι αν το σύνολο A είναι μεταβατικό, τότε και τα συνολα $\bigcup A$, $\mathcal{P}A$ είναι μεταβατικά.

3.7 Αποδειξτε ότι αν A είναι μεταβατικό σύνολο, τότε το σύνολο $\bigcup \{A\}$ είναι επίσης μεταβατικό και ισχύει $\bigcup (\bigcup \{A\}) = A$.

3.8 Αποδειξτε ότι αν X είναι σύνολο μεταβατικών συνολών, τότε η ένωση $\bigcup X$ είναι μεταβατικό σύνολο.

3.9 Αποδειξτε άμεσα ότι η σχέση $\leq_\omega$ είναι γραμμική διαταξη του ω .

3.10 Αποδειξτε ότι για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς m, n ισχύει:

- i) $m < n \leftrightarrow m' \leq n$, ii) $m < n \leftrightarrow m' < n'$,
iii) $m < n' \leftrightarrow m \leq n$, iv) $m \leq n' \leftrightarrow m < n \vee m = n'$.

3.11 Αποδειξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \neq 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός m τέτοιος ώστε $n = m'$.

3.12 Εστω $A \leq \omega$. Αποδειξτε ότι το $\bigcup A$ είναι μεταβατικό υποσύνολο του ω . Αποδειξτε επίσης ότι αν το σύνολο $\bigcup A$ είναι φραγμένο, τότε είναι φυσικός αριθμός και αν δεν είναι φραγμένο, τότε είναι ίσο με το ω .

3.13 Εστω A μη κενό υποσύνολο του ω . Εστω $n \in \omega$. Αποδειξτε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- i) $\forall k (k < n \rightarrow k \in A)$,
ii) $\forall k (k \in A \rightarrow n \leq k)$,

$$\text{iii)} \quad n \cap A = \emptyset,$$

$$\text{iv)} \quad n \subseteq \bigcap A.$$

3.14 Αποδειξτε ότι οι δυο διατυπώσεις της Αρχής Ελαχιστου (θεώρημα 4 και θεώρημα 5) είναι ισοδυναμικές.

3.15 Εστω A μη κενό υποσυνολό του ω . Αποδειξτε ότι αν το A είναι άνω φραγμένο, τότε έχει μέγιστο στοιχείο.

3.16 Εστω A μη κενό υποσυνολό του ω . Αποδειξτε ότι τότε $\bigcap A \in A$.

3.17 Αποδειξτε ότι για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς m, n ισχύει:

$$\text{i)} \quad m+1=m',$$

$$\text{ii)} \quad 0+n=n,$$

$$\text{iii)} \quad m+n'=m'+n,$$

$$\text{iv)} \quad m+n=n+m.$$

3.18 Αποδειξτε ότι για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς k, m, n ισχύει:

$$\text{i)} \quad (k+m)+n=k+(m+n),$$

$$\text{ii)} \quad k+m=k+n \rightarrow m=n.$$

3.19 Αποδειξτε ότι η διατάξη των φυσικών αριθμών μπορεί να οριστεί με τη βοήθεια της προσθεσης (προτάση 16).

3.20 Αποδειξτε ότι για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς m, n ισχύει:

$$\text{i)} \quad m \cdot 1 = m,$$

$$\text{ii)} \quad m \cdot 2 = m + m,$$

$$\text{iii)} \quad 0 \cdot m = 0,$$

$$\text{iv)} \quad n' \cdot m = n \cdot m + m.$$

$$\text{v)} \quad m \cdot n = n \cdot m.$$

3.21 Αποδειξτε ότι για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς k, m, n ισχύει:

$$\text{i)} \quad k \cdot (m \cdot n) = (k \cdot m) \cdot n,$$

$$\text{ii)} \quad k \cdot (m+n) = k \cdot m + k \cdot n,$$

$$\text{iii)} \quad m < n \rightarrow m+k < n+k,$$

$$\text{iv)} \quad m < n \rightarrow m \cdot k < n \cdot k \quad (\text{για } k \neq 0),$$

$$\text{v)} \quad k \cdot m = k \cdot n \rightarrow m = n \quad (\text{για } k \neq 0).$$

3.22 Αποδειξτε ότι για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς m, n ισχύει:

$$\text{i)} \quad m+n=0 \rightarrow m=0 \wedge n=0,$$

$$\text{iii)} \quad m+n=1 \rightarrow (m=0 \wedge n=1) \vee (n=0 \wedge m=1),$$

$$\text{ii)} \quad m \cdot n=0 \rightarrow m=0 \vee n=0,$$

$$\text{iv)} \quad m \cdot n=1 \rightarrow m=1 \wedge n=1.$$

3.23 Δώστε έναν αναδρομικό ορισμό της εκθετικής συναρτήσεως. Αποδειξτε ότι το σύνολο $\mathbb{N}$ έχει $2^{\mathbb{N}}$ υποσύνολα.

3.24 Αποδειξτε το λήμμα της σελίδας 55.

3.25 Βρείτε συναρτήσεις J_k ($k \in \omega, k \geq 2$), τέτοιες ώστε $J_k : \omega^k \xrightarrow{\frac{1-1}{\varepsilon \pi i}} \omega$.

3.26 Αποδειξτε ότι η σχέση $R \leq \omega^2 \times \omega^2$, όπου $\langle m, n \rangle R \langle k, l \rangle \leftrightarrow m+1=n+k$, είναι σχέση ισοδυναμίας. Αποδειξτε επίσης ότι για κάθε ζεύγος φυσικών αριθ-

μυν $\langle k, l \rangle$ υπάρχει new τέτοιο ώστε $\langle k, l \rangle R \langle n, 0 \rangle$ ή $\langle k, l \rangle R \langle 0, n \rangle$.

3.27 Εστω R η σχέση της προηγούμενης άσκησης. Αποδείξτε ότι αν

$\langle m, n \rangle R \langle m_1, n_1 \rangle$ και $\langle k, l \rangle R \langle k_1, l_1 \rangle$, τότε:

i) $(\langle m, n \rangle + \langle k, l \rangle) R (\langle m_1, n_1 \rangle + \langle k_1, l_1 \rangle)$,

ii) $(\langle m, n \rangle \cdot \langle k, l \rangle) R (\langle m_1, n_1 \rangle \cdot \langle k_1, l_1 \rangle)$,

iii) $\langle m, n \rangle < \langle k, l \rangle \leftrightarrow \langle m_1, n_1 \rangle < \langle k_1, l_1 \rangle$.

3.28 Αποδείξτε ότι η διαταξη του $\mathbb{Z}$ είναι γραμμική και έχει τις παρακατω ιδιοτητες:

i) Για οποιαδήποτε $m, n \in \mathbb{Z}$: $+m < +n \leftrightarrow m < n$, $-m < -n \leftrightarrow n < m$, $-m \leq +n$,

ii) Δεν υπάρχει μέγιστο ούτε ελάχιστο στοιχείο,

iii) Για κάθε στοιχείο υπάρχει το αμέσως επόμενο και το αμέσως προηγούμενο.

3.29 Για κάθε ζευγος φυσικων αριθμων m, n θετουμε: $-[\langle m, n \rangle] = [\langle n, m \rangle]$.

Αποδείξτε ότι για κάθε new ισχυει: $-(+n) = -n$ και $-(-n) = +n$. Για $x, y \in \mathbb{Z}$ γραφουμε $x - y$ αντι του $x + (-y)$. Αποδείξτε ότι για οποιουσδήποτε $x, y, z \in \mathbb{Z}$

$$x - y = z \leftrightarrow x = y + z.$$

Δειξτε επίσης ότι η πράξη $-$ είναι επέκταση της διαφοράς των φυσικων αριθμων. Αποδείξτε δηλαδή ότι για οποιουσδήποτε φυσικους αριθμους m, n : αν $m \leq n$, τότε $n - m = n \dot{-} m$ και αν $n \leq m$, τότε $n - m = -(m \dot{-} n)$.

3.30 Εστω $U = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$. Δειξτε ότι η σχέση $S \subseteq U^2$, που οριζεται απο

$$\langle i, j \rangle S \langle k, m \rangle \leftrightarrow im = jk,$$

είναι σχέση ισοδυναμίας. Δειξτε ότι για κάθε $i, j \in \mathbb{Z}$, $j \neq 0$, υπάρχουν k, m στο $\mathbb{Z}$, $0 < m$ ώστε: $\langle i, j \rangle S \langle k, m \rangle$.

3.31 Για οποιαδήποτε $\langle m, n \rangle, \langle k, l \rangle \in U$ θετουμε:

i) $\langle m, n \rangle + \langle k, l \rangle = \langle m + k, n + l \rangle$,

ii) $\langle m, n \rangle \cdot \langle k, l \rangle = \langle mk, nl \rangle$.

Αποδείξτε ότι αν $\langle m, n \rangle S \langle m_1, n_1 \rangle$ και $\langle k, l \rangle S \langle k_1, l_1 \rangle$, τότε:

i) $(\langle m, n \rangle + \langle k, l \rangle) S (\langle m_1, n_1 \rangle + \langle k_1, l_1 \rangle)$,

ii) $(\langle m, n \rangle \cdot \langle k, l \rangle) S (\langle m_1, n_1 \rangle \cdot \langle k_1, l_1 \rangle)$.

3.32 Αποδείξτε ότι στο $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ δεν υπάρχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο στοιχείο. Αποδείξτε επίσης ότι αν $x, y \in \mathbb{Q}$, $x < y$, τότε υπάρχει $z \in \mathbb{Q}$ ώστε

$$x < z \wedge z < y.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΟΙ ΠΛΗΘΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

4.1 Ισοπληθικά σύνολα.

Ο προσδιορισμός του πλήθους στοιχείων ενός συνόλου είναι ένα από τα πιο σημαντικά προβλήματα της θεωρίας συνόλων. Για τη μελέτη αυτού του προβλήματος θα μας είναι χρήσιμη μια βοηθητική έννοια.

Ορισμός. Λέμε ότι δύο σύνολα X, Y είναι ισοπληθικά (ή πληθικά ισοδυναμικά) όταν υπάρχει συνάρτηση $f: X \xrightarrow{1-1} Y$. Αν τα σύνολα X, Y είναι πληθικά ισοδυναμικά, γράφουμε $X \sim Y$ και αν δεν είναι γράφουμε $X \not\sim Y$.

ΑΣ σημειώσουμε μερικές σημαντικές ιδιότητες της πληθικής ισοδυναμίας συνόλων. Οι αποδείξεις τους είναι απλές (ασκήση 4.1).

Προτάση 1. Για οποιαδήποτε σύνολα A, B, C ισχύουν:

- i) $A \sim A$,
- ii) $A \sim B \longrightarrow B \sim A$,
- iii) $A \sim B \wedge B \sim C \longrightarrow A \sim C$.

Παραδειγμα 1.

i) Για οποιαδήποτε $a \neq b$, έχουμε $\{0, 1\} \sim \{a, b\}$. Ισοπληθικά με το $\{0, 1\}$ είναι τα σύνολα που έχουν ακριβώς δύο στοιχεία.

ii) Κάθε δύο ανοιχτά διαστήματα στο $\mathbb{R}$ είναι ισοπληθικά. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ισχύει: $(0, 1) \sim (a, b)$. Πράγματι, η συνάρτηση $f: (0, 1) \longrightarrow (a, b)$, με $f(x) = (b-a)x + a$ για $x \in (0, 1)$, είναι 1-1 και επί του (a, b) . Εχουμε επίσης ότι $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$, αφού η συνάρτηση f με $f(x) = \tan x$ (για $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$) μετασχηματίζει το παραπάνω διάστημα 1-1 και επί του $\mathbb{R}$. Επεται ότι κάθε ανοιχτό διάστημα είναι πληθικά ισοδυναμικό με όλο το $\mathbb{R}$. Ομοία βλέπουμε ότι κάθε ανοιχτή ημιευθεία στο $\mathbb{R}$ είναι ισοπληθική με όλο το $\mathbb{R}$, αφού η εκθετική συνάρτηση g με $g(x) = e^x$ (για $x \in \mathbb{R}$), είναι 1-1 και επί του $(0, +\infty)$.

iii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \omega \longrightarrow \omega$, με $f(n) = 2n$. Προφανώς έχουμε ότι $f: \omega \xrightarrow{1-1} \{2n: n \in \omega\}$. Το σύνολο των άρτιων φυσικών αριθμών είναι λοιπόν ισοπληθικό με το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών.

iv) Στην παραγραφή 3.7 γνωρίσαμε μια συνάρτηση $J: \omega \times \omega \xrightarrow{1-1} \omega$. Βλέπουμε λοιπόν ότι $\omega \sim \omega^2$.

v) Για οποιοδήποτε σύνολο A , το καρτεσιανό του τετραγωνό $A \times A$ και το σύνολο $A^{\{0, 1\}}$ των ακολουθιών μήκους 2 με τιμές στο A , είναι ισοπληθικά

Πραγματικά, θέτοντας $F(\langle a, b \rangle) = \{\langle 0, a \rangle, \langle 1, b \rangle\}$ για $a, b \in A$, ορίζουμε μια συνάρτηση $F: A \times A \xrightarrow[επλ]{1-1} A^{\{0,1\}}$. Αυτό είναι μια δικαιολόγηση της διπλής σημασίας του συμβολισμού A^2 .

vi) Το κενό σύνολο δεν είναι ισοπληθικό με κανένα άλλο. Αν $\emptyset \sim X$, τότε $X = \emptyset$.

Παρατήρηση. Ας παρατηρήσουμε ότι υπάρχουν σύνολα που είναι ισοπληθικά με κάποια γνήσια υποσύνολα τους.

4.2 Η ιδέα του πληθικού αριθμού.

Ο Cantor, για να εκφράσει τα πληθή στοιχείων των συνόλων, εισήγαγε τους λεγόμενους πληθικούς αριθμούς. Με κάθε σύνολο X συνδέεται ένα νέο αντικείμενο, που λέγεται πληθικός του αριθμός (ή πληθαριθμός) και συμβολίζεται με $\text{card}(X)$ ή $\bar{X}$. Απαιτείται οι πληθικοί αριθμοί να ικανοποιούν την ακόλουθη συνθήκη:

(*) "Δύο σύνολα έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό εάν και μόνον εάν είναι ισοπληθικά", δηλαδή για οποιαδήποτε σύνολα X, Y :

$$\text{card}(X) = \text{card}(Y) \iff X \sim Y.$$

Για τα πεπερασμένα σύνολα, που θα μελετήσουμε στην επομένη παράγραφο, το πλήθος στοιχείων εκφράζεται από έναν φυσικό αριθμό. Θα ήταν όμως λάθος να δεχθούμε ότι όλα τα μη πεπερασμένα σύνολα έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό. Και τούτο διότι υπάρχουν απείρα σύνολα που δεν είναι πληθικά ισόδυναμα. Θα έχουμε λοιπόν διαφορετικούς πληθικούς αριθμούς για μη ισοπληθικά απείρα σύνολα.

Εχουμε εδώ μια κατάσταση παρομοια μ' εκείνη των διατακτικών τυπών. Οι μαθηματικοί είχαν επιφυλάξεις για την υπαρκτή των αφηρημένων πληθικών αριθμών του Cantor (βλ. σελίδα 38). Σε κάποια συστήματα για τη θεωρία συνόλων οι πληθικοί αριθμοί εισαχονται αξιωματικά. Υπάρχουν δηλαδή ειδικά αξιώματα που εξασφαλίζουν την υπαρκτή των πληθικών αριθμών. Ένας άλλος τρόπος είναι να θεωρήσουμε ως πληθικό αριθμό ενός συνόλου X την κλάση όλων των ισοπληθικών με το X συνόλων. Τότε, από την πρόταση 1, βλέπουμε ότι ικανοποιείται το αίτημα (*) του Cantor. Αυτός ο ορισμός έχει όμως το εξής μειονεκτήμα. Οι κλάσεις που αναφεραμε δεν είναι σύνολα. Έτσι π.χ. η κλάση όλων των μονοσυνόλων είναι γνήσια κλάση. Ευλόγο θα ήταν λοιπόν να μπορούν οι πληθικοί αριθμοί να οριστούν ως σύνολα. Υπάρχουν τέτοιοι ορισμοί. Εάν απ' αυτούς θα δώσουμε στο κεφάλαιο 6, αφού πρώτα γνωρίσουμε το αξίωμα επιλογής. Η θεωρία ZF δίνει και έναν άλλον ορισμό που δεν κάνει χρήση του αξιώματος επιλογής. Εί-

ναι όμως εκτός υλής ενός εισαγωγικού μαθηματος, διότι η κατανόηση του απαιτεί προχωρημένες γνώσεις της θεωρίας συνόλων.

Θα προχωρήσουμε τώρα στην μελέτη των πληθικών αριθμών των συνόλων υποθέτοντας ότι αυτοί έχουν εισαχθεί με κάποιον από τους παραπάνω τρόπους. Η χρήση των πληθικών αριθμών στη θεωρία συνόλων δεν είναι απόλυτως απαραίτητη και μπορεί να αποφευχθεί τελείως. Τα σχετικά θεωρήματα μπορούν να διατυπωθούν με τη βοήθεια της έννοιας της πληθικής ισοδυναμίας συνόλων. Χρησιμοποιώντας όμως τους πληθικούς αριθμούς, κάνουμε τα θεωρήματα πιο ευαναγνώστα.

4.3 Πεπερασμένα σύνολα.

Ορισμοί. Ένα σύνολο λέγεται πεπερασμένο αν είναι ισοπληθικό με κάποιο φυσικό αριθμό. Τα μη πεπερασμένα σύνολα λέγονται απειρά.

Παραδειγμα 2.

- i) Το κενό σύνολο είναι πεπερασμένο, αφού $\emptyset = 0$.
- ii) Κάθε μονοσύνολο $\{a\}$ είναι πεπερασμένο, διότι είναι ισοπληθικό με τον φυσικό αριθμό 1.
- iii) Κάθε μη διατεταγμένο ζεύγος $\{a, b\}$ με $a \neq b$ είναι ισοπληθικό με τον φυσικό αριθμό 2 ($2 = \{0, 1\}$), άρα είναι πεπερασμένο.

Παρατήρηση. Κάθε φυσικός αριθμός είναι ίσος με το σύνολο των μικρότερων απ' αυτών φυσικών αριθμών. Έχουμε δηλαδή $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Το σύνολο n , και κάθε ισοπληθικό μ' αυτό σύνολο, έχει " n στοιχεία".

Οι φυσικοί αριθμοί εκφράζουν λοιπόν τα πλήη στοιχείων για τα πεπερασμένα σύνολα. Θα δικαιολογήσουμε παρακάτω ότι μπορούν να θεωρηθούν πληθικοί αριθμοί των πεπερασμένων συνόλων. Πριν όμως ορίσουμε τον πληθικό αριθμό $\text{card}(X)$ ενός πεπερασμένου συνόλου X ως εκείνο το $n \in \mathbb{N}$ για το οποίο $X \sim n$, πρέπει να ξέρουμε ότι ένα τέτοιο n είναι μοναδικό. Τότε θα έχουμε ότι για τα πεπερασμένα σύνολα ικανοποιείται το αίτημα (*) του Cantor.

Θα δικαιολογήσουμε τα παραπάνω, στηριζόμενη στη λεγόμενη Αρχή του Περιστερών του Dirichlet. Ένα μέρος της αποδείξης της περιέχεται στο ακόλουθο λήμμα (ασκήση 4.3).

Λήμμα. Εστω $n \in \mathbb{N}$. Εστω $f: n \xrightarrow{1-1} n$. Τότε $f: n \xrightarrow{\text{επί}} n$.

Θεώρημα 1. Κανένας φυσικός αριθμός δεν είναι ισοπληθικός με γνήσιο υποσύνολο του.

Απόδειξη: Εστω $n \in \mathbb{N}$ και $X \subset n$. Ας υποθέσουμε ότι $X \sim n$. Τότε υπάρχει συν-

άρτηση $f: n \xrightarrow[επι]{1-1} X$. Έχουμε $f: n \xrightarrow{1-1} n$, και σύμφωνα με το λήμμα $f: n \xrightarrow[επι]{} n$.
Αρα $X=n$. ■

Πορίσμα 1. Αν $n, m \in \omega$ και $n \sim m$, τότε $n=m$.

Πορίσμα 2. Αν $X \sim n$ και $X \sim m$ για $n, m \in \omega$, τότε $n=m$.

Πορίσμα 3. Αν το σύνολο X είναι πεπερασμένο και $Y \subset X$, τότε $X \not\sim Y$.

Πορίσμα 4. Το σύνολο ω των φυσικών αριθμών είναι άπειρο.

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε τους πληθικούς αριθμούς για τα πεπερασμένα σύνολα.

Ορισμός. Αν το σύνολο X είναι πεπερασμένο και $X \sim n$, τότε θέτουμε $\text{card}(X)=n$.

Ευκολά ελεγχονται τα ακόλουθα.

Προτάση 2.

- i) $\text{card}(\emptyset)=0$,
- ii) $(\forall n \in \omega) \text{card}(n)=n$,
- iii) Για οποιαδήποτε πεπερασμένα σύνολα X, Y ισχύει:
$$\text{card}(X)=\text{card}(Y) \leftrightarrow X \sim Y.$$

Σημειώνουμε μερικές ακόμα ιδιότητες των πεπερασμένων συνόλων.

Προτάση 3. Τα υποσύνολα των πεπερασμένων συνόλων είναι πεπερασμένα σύνολα.

Αποδείξη: Άσκηση 4.4. ■

Προτάση 4. Η ένωση δυο πεπερασμένων συνόλων είναι πεπερασμένη.

Αποδείξη: Εστω ότι $f: X \xrightarrow[επι]{1-1} n$, $g: Y \xrightarrow[επι]{1-1} m$, όπου $n, m \in \omega$.

Θα αποδείξουμε ότι η ένωση $X \cup Y$ είναι πεπερασμένη πρώτα στην ειδική περίπτωση ξένων συνόλων X, Y . Τότε μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση $h: X \cup Y \rightarrow n+m$ ως εξής:

$$h(z)=f(z) \quad \text{για } z \in X,$$

$$h(z)=n+g(z) \quad \text{για } z \in Y.$$

Για να αποδείξουμε ότι η h είναι 1-1, ας υποθέσουμε ότι $a, b \in X \cup Y$ και $h(a)=h(b)$. Αρκεί να εξετάσουμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

Αν $a, b \in X$, τότε $h(a)=f(a)$ και $h(b)=f(b)$. Αρα $f(a)=f(b)$ και συνεπώς $a=b$.

Αν $a, b \in Y$, τότε $h(a)=n+g(a)$, $h(b)=n+g(b)$. Αρα $g(a)=g(b)$. Συνεπώς $a=b$.

Αν $a \in X$, $b \in Y$, τότε $h(a) < n$ και $h(b)=n+g(b) \geq n$. Σ' αυτή την περίπτωση το $h(a)=h(b)$ είναι αδύνατο.

Το ότι η συνάρτηση h απεικονίζει την ένωση $X \cup Y$ επί του $n+m$ μπορεί να αποδειχθεί άμεσα. Θα έχουμε τότε $h: X \cup Y \xrightarrow{1-1} n+m$ και επομένως το $X \cup Y$ είναι πεπερασμένο. Μπορούμε όμως να δικαιολογήσουμε το ζητούμενο και ως εξής. Το σύνολο $X \cup Y$ είναι πληθικά ισοδύναμο με την εικόνα του μέσω της h , διότι έχουμε $h: X \cup Y \xrightarrow{1-1} \text{rng}(h)$. Επειδή το $\text{rng}(h)$ είναι υποσύνολο του πεπερασμένου συνόλου $n+m$, είναι πεπερασμένο. Άρα και το ισοπληθικό μ' αυτό σύνολο $X \cup Y$ είναι πεπερασμένο.

Αποδείξαμε το ζητούμενο στην περίπτωση που $X \cap Y = \emptyset$. Για την γενική περίπτωση αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $X \cup Y = (X - Y) \cup Y$. Τα σύνολα $X - Y$ και Y είναι ξένα μεταξύ τους και πεπερασμένα, αφού $X - Y \subseteq X$. Απο τα παραπάνω έπεται ότι η ένωση τους, που είναι ίση με $X \cup Y$, είναι πεπερασμένη. ■

Πορίσμα. Αν A είναι πεπερασμένο σύνολο πεπερασμένων συνόλων, τότε η ένωση $\bigcup A$ είναι πεπερασμένη (ασκήση 4.5).

Προταση 5. Το καρτεσιανό γινόμενο δύο πεπερασμένων συνόλων είναι πεπερασμένο.

Αποδείξη: Εστω ότι $f: X \xrightarrow{1-1} n$, $g: Y \xrightarrow{1-1} m$, όπου $n, m \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε μια συνάρτηση $h: X \times Y \rightarrow n \times m$ ως εξής. Για $x \in X$, $y \in Y$ θέτουμε:

$$h(x, y) = \langle f(x), g(y) \rangle.$$

Ευκολά ελέγχεται ότι η h είναι 1-1 και επί του $n \times m$. Επειδή όμως έχουμε $n \times m \sim n \cdot m$ (ασκήση 4.6), έπεται ότι

$$\text{card}(X \times Y) = \text{card}(n \times m) = n \cdot m.$$

Το καρτεσιανό γινόμενο $X \times Y$ είναι λοιπόν πεπερασμένο και ο πληθικός του αριθμός είναι ίσος με το γινόμενο των πληθικών αριθμών των X, Y . ■

Θα κλείσουμε τη μελέτη των πεπερασμένων συνόλων αναφέροντας έναν διαφορετικό ορισμό της έννοιας του πεπερασμένου συνόλου.

Ορισμός. Ένα σύνολο λέγεται κατά Dedekind πεπερασμένο όταν δεν είναι ισοπληθικό με κανένα γνήσιο υποσύνολο του. Τα σύνολα που δεν είναι κατά Dedekind πεπερασμένα λέγονται κατά Dedekind απείρα.

Απο το πορίσμα 3 της Αρχής του Περιστέρωνα (σελίδα 66) βλέπουμε άμεσα τα παρακάτω.

Προταση 6. Κάθε πεπερασμένο σύνολο είναι κατά Dedekind πεπερασμένο. Κάθε κατά Dedekind απείρο σύνολο είναι απείρο.

Η αντιστροφή προταση, που λέει ότι τα κατά Dedekind πεπερασμένα σύνολα είναι πεπερασμένα, δεν μπορεί να αποδειχθεί με βάση τα αξιώματα

της θεωρίας συνολων που γνωρισαμε μεχρι τωρα. Θα επανελθουμε σ' αυτην αργοτερα.

4.4 Αριθμησιμα συνολα.

Μεταξυ των απειρων συνολων ξεχωριζουμε εκεινα, των οποιων τα στοι-
χεια μπορουν να "αριθμηθουν" με τη βοηθεια των φυσικων αριθμων. Τα
στοιχεια τετοιων συνολων μπορουν να μπου σε μια "σειρα" οπως οι φυσικοι
αριθμοι.

Ορισμοι. Ενα συνολο λεγεται απειρο αριθμησιμο (ή απλως αριθμησιμο) αν
ειναι ισοπληθικο με το συνολο ω των φυσικων αριθμων. Ενα συνολο λεγε-
ται το πολυ αριθμησιμο οταν ειναι πεπερασμενο ή απειρο αριθμησιμο. Τα
απειρα συνολα που δεν ειναι αριθμησιμα λεγονται μη αριθμησιμα ή υπερ-
αριθμησιμα.

Αμεσως απο τον ορισμο βλεπουμε οτι ενα συνολο X ειναι αριθμησιμο
εαν και μονον εαν ειναι πεδιο τιμων μιας αμφιμονοσημαντης ακολουθιας
μηκους ω . Πραγματικα, αν $f: \omega \xrightarrow{1-1} X$, τοτε $X = \text{rng}(f) = \{f(n) : n \in \omega\}$.

Παραδειγμα 3. Το συνολο ω ειναι προφανως αριθμησιμο. Αριθμησιμα ειναι
τα υποσυνολα του $\{2n : n \in \omega\}$, $\{3n : n \in \omega\}$. Επειδη $\omega^2 \sim \omega$ (παραδειγμα 1 iv),
εχουμε οτι το καρτεσιανο τετραγωνο του ω ειναι αριθμησιμο συνολο. Ο-
μοια αποδεικνυεται οτι οι καρτεσιανες δυναμεις ω^3 , ω^4 κ.ο.κ. ειναι α-
ριθμησιμα συνολα.

Περισσοτερα παραδειγματα αριθμησιμων συνολων θα εχουμε, αφου απο-
δειξουμε οτι τα υποσυνολα των αριθμησιμων συνολων ειναι το πολυ αριθ-
μησιμα.

Προταση 7. Καθε υποσυνολο του ω ειναι πεπερασμενο η αριθμησιμο.

Αποδειξη: Εστω $X \subseteq \omega$. Εξεταζουμε δυο περιπτωσεις.

Περιπτωση 1: Το X ειναι φραγμενο, δηλαδη $(\exists k \in \omega)(\forall y \in X)y \leq k$.

Τοτε $X \subseteq k+1$ και, ως υποσυνολο πεπερασμενου συνολου, ειναι πεπερασμενο.

Περιπτωση 2: Το X δεν ειναι φραγμενο, δηλαδη $(\forall k \in \omega)(\exists y \in X)k < y$.

Τοτε για καθε $k \in \omega$ οριζεται το $\min(X - (k+1))$, αφου η διαφορα $X - (k+1)$ δεν
ειναι κενη. Οριζουμε επαγωγικα μια συναρτηση $f: \omega \rightarrow X$.

$f(0)$ = το μικροτερο στοιχειο του $X = \min X$.

$f(n+1)$ = το μικροτερο στοιχειο του X που ειναι μεγαλυτερο απο το $f(n)$ =
 $= \min(X - (f(n)+1))$.

Για καθε $n \in \omega$ εχουμε προφανως $f(n) < f(n+1)$. Η f ειναι λοιπον γνησια αυ-

ξουσα, άρα είναι 1-1.

Θα αποδειξουμε ότι η f είναι επί του X , δηλαδή ότι $\text{rng}(f)=X$. Ας υποθέσουμε ότι $\text{rng}(f) \neq X$. Τότε $\text{rng}(f) \subset X$, άρα $X - \text{rng}(f) \neq \emptyset$. Εστω ότι m είναι το μικρότερο του στοιχείο. Έχουμε $m \in X$, $m \notin \text{rng}(f)$ και για κάθε $j < m$:

$$j \in X \leftrightarrow j \in \text{rng}(f).$$

Επειδή $f(0) \in \text{rng}(f)$, πρέπει να είναι $f(0) < m$. Θεωρούμε το σύνολο $X' = X \cap m = X \cap \text{rng}(f)$. Το X' είναι πεπερασμένο και μη κενό ($f(0) \in X'$), άρα υπάρχει σ' αυτό το μεγαλύτερο στοιχείο (βλ. άσκηση 3.15). Αυτό είναι μορφής $f(n)$ για κάποιο $n \in \omega$. Λόγω του $f(n) \in X \cap m$, έχουμε $f(n) < m$. Το m είναι λοιπόν στοιχείο του X μεγαλύτερο από το $f(n)$. Είναι το μικρότερο δυνατό τέτοιο στοιχείο. Πραγματικά, αν $j < m$ και $j \in X$, τότε $j \in \text{rng}(f)$. Άρα $j \in X'$ και συνεπώς $j \leq f(n)$. Βλέπουμε λοιπόν ότι:

$m =$ το μικρότερο στοιχείο του X που είναι μεγαλύτερο από το $f(n)$. Έπεται ότι $m = f(n+1)$. Άρα $m \in \text{rng}(f)$, που είναι άδυνατο λόγω της επιλογής του m . Σε άτοκο μας όδηγησε η υπόθεση $\text{rng}(f) \neq X$. Πρέπει λοιπόν να ισχύει $\text{rng}(f) = X$, που σημαίνει ότι η f είναι επί του X .

Αποδείξαμε ότι, στην περίπτωση που το X δεν είναι φραγμένο, υπάρχει $f: \omega \xrightarrow{1-1} X$. Το σύνολο X είναι τότε αριθμησιμο. ■

Πορίσμα 1. Ένα σύνολο X είναι το πολύ αριθμησιμο εάν και μόνον εάν υπάρχει συνάρτηση $f: X \xrightarrow{1-1} \omega$.

Απόδειξη: Το $(\rightarrow)$ είναι προφανές. Για το $(\leftarrow)$ ας παρατηρήσουμε ότι αν $f: X \xrightarrow{1-1} \omega$, τότε $f: X \xrightarrow{1-1} f[X]$. Από την παραπάνω πρόταση έχουμε ότι το σύνολο $f[X]$ είναι το πολύ αριθμησιμο. Το σύνολο X , ως ισοπληθικό με το $f[X]$, είναι επίσης το πολύ αριθμησιμο. ■

Πορίσμα 2. Αν το σύνολο A είναι το πολύ αριθμησιμο και $B \subseteq A$, τότε το B είναι επίσης το πολύ αριθμησιμο.

Η επομένη πρόταση μας δίνει έναν χρήσιμο χαρακτηρισμό των μη κενών το πολύ αριθμησιμών συνόλων. Αυτά (και μόνον αυτά) είναι πεδία τιμών ακολουθιών μήκους ω , δηλαδή δεχονται μια, όχι υποχρεωτικά αμφιμοноσημαντή, "αριθμηση" με τη βοήθεια των φυσικών αριθμών.

Πρόταση 8. Εστω $X \neq \emptyset$. Το X είναι το πολύ αριθμησιμο εάν και μόνον εάν υπάρχει $f: \omega \xrightarrow{\text{επί}} X$.

Απόδειξη: Το $(\rightarrow)$ είναι προφανές όταν το X είναι άπειρο (τότε $X \sim \omega$). Αν το X είναι πεπερασμένο, τότε $X \sim n$, για κάποιο $n \in \omega$, $n \neq 0$ (διότι $X \neq \emptyset$). Εστω $g: n \xrightarrow{1-1} X$. Ορίζουμε μια επέκταση της g σε όλο το ω . Θετούμε:

$$f(k)=g(k) \quad \text{για } k < n$$

$$f(k)=g(0) \quad \text{για } k \geq n$$

και εχουμε προφανως $f: \omega \xrightarrow{\text{επι}} X$.

Για να αποδειξουμε το ($\Leftarrow$), ας υποθεσουμε οτι $f: \omega \xrightarrow{\text{επι}} X$.

Για καθε $a \in X$ θετουμε $S_a = \{k \in \omega : f(k) = a\} = f^{-1}[\{a\}]$. Επειδη η f ειναι επι του X , επεται οτι για καθε $a \in X$ εχουμε $S_a \neq \emptyset$. Οριζουμε $h(a) = \min S_a$. Επειδη για $a \in X$, $b \in X$, $a \neq b$ εχουμε $S_a \neq S_b$, επεται οτι τοτε $h(a) \neq h(b)$. Αρα $h: X \xrightarrow{1-1} \omega$

και συνεπως το συνολο X ειναι το πολυ αριθμησιμο. ■

Πορισμα. Εστω X απειρο συνολο. Τα ακολουθα ειναι ισοδυναμα:

i) Το X ειναι αριθμησιμο.

ii) $\exists f(f: X \xrightarrow{1-1} \omega)$.

iii) $\exists f(f: \omega \xrightarrow{\text{επι}} X)$.

Παρατηρηση. Για να αποδειξουμε οτι ενα απειρο συνολο X ειναι αριθμησιμο, δεν ειναι απαραιτητο να δειξουμε αμεσα οτι ειναι ισοπληθικο με το ω . Αρκει να βρουμε μια συναρτηση $f: X \xrightarrow{1-1} \omega$ (δηλαδη μια "εμφυτευση" του X στο ω) η μια συναρτηση $f: \omega \xrightarrow{\text{επι}} X$ (δηλαδη μια, οχι υποχρεωτικα αμφιμονοσημαντη, "αριθμηση" του X).

Στα παραπανω, το ω μπορει να αντικατασταθει απο ενα οποιοδηποτε αριθμησιμο συνολο (ασκηση 4.8). Ετσι π.χ. αν το συνολο X ειναι εικονα ενος αριθμησιμου συνολου A , δηλαδη $f: A \xrightarrow{\text{επι}} X$ για καποια συναρτηση f , τοτε το X ειναι το πολυ αριθμησιμο. Αν επιπλεον ξερουμε οτι το X ειναι απειρο, τοτε ειναι αριθμησιμο.

Προταση 9. Το συνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραιων αριθμων ειναι αριθμησιμο.

Αποδειξη: Το $\mathbb{Z}$ ειναι προφανως απειρο, αφου $\{+n: n \in \omega\} \subseteq \mathbb{Z}$. Για $n, m \in \omega$ θετουμε $f(n, m) = n - m$. Οριζουμε ετσι μια συναρτηση $f: \omega^2 \xrightarrow{\text{επι}} \mathbb{Z}$. Ως εικονα αριθμησιμου συνολου, το $\mathbb{Z}$ ειναι αριθμησιμο. ■

Προταση 10. Το καρτεσιανο γινομενο $A \times B$ δυο το πολυ αριθμησιμων συνολου A, B ειναι το πολυ αριθμησιμο.

Αποδειξη: Αν $A = \emptyset$ η $B = \emptyset$, τοτε $A \times B = \emptyset$, αρα ισχυει το ζητουμενο. Εστω οτι $A \neq \emptyset$ και $B \neq \emptyset$. Τοτε υπαρχουν $f: \omega \xrightarrow{\text{επι}} A$, $g: \omega \xrightarrow{\text{επι}} B$. Οριζουμε μια συναρτηση $h: \omega^2 \rightarrow A \times B$ ως εξης:

$$h(n, m) = \langle f(n), g(m) \rangle$$

και ευκολα βλεπουμε οτι αυτη απεικονιζει το ω^2 επι του $A \times B$. Αρα το $A \times B$ ειναι το πολυ αριθμησιμο. ■

Προταση 11. Το συνολο $\mathbb{Q}$ των ρητων αριθμων ειναι αριθμησιμο.

Αποδειξη: Το συνολο $U = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ ειναι αριθμησιμο. Θετοντας $F(k, m) = \frac{k}{m}$ για $k, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$, οριζουμε μια συναρτηση $F: U \xrightarrow[\text{επι}]{} \mathbb{Q}$. Το $\mathbb{Q}$ ειναι προφανως απειρο, αρα ειναι αριθμησιμο. ■

Υπαρχουν απειρα συνολα που δεν ειναι αριθμησιμα. Τα στοιχεια τους ειναι τοσο πολλα που οι φυσικοι αριθμοι δεν ειναι αρκετοι για να τα "αριθμησουν". Στη συνεχεια, στηριζομενοι στο λεγομενο Διαγωνιο Λημμα του Cantor, θα δειξουμε οτι δεν ειναι αριθμησιμο το συνολο $\mathcal{P}\omega$ ουτε το συνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικων αριθμων.

Θεωρημα 2 (Διαγωνιο Λημμα του Cantor).

Κανενα συνολο δεν ειναι ισοπληθικο με το δυναμοσυνολο του.

Αποδειξη: Αρκει να αποδειξουμε οτι οποιαδηποτε συναρτηση $f: A \rightarrow \mathcal{P}A$ δεν μπορεί να ειναι επι του $\mathcal{P}A$. Θεworουμε το συνολο $D = \{x \in A: x \notin f(x)\}$. Αν για καποιο $a \in A$ ηταν $D = f(a)$, τοτε θα ειχαμε

$$a \in D \leftrightarrow a \notin f(a) \leftrightarrow a \notin D.$$

Δεν μπορεί λοιπον το D να ανηκει στο πεδιο τιμων της f . Αρα η f δεν ειναι επι του $\mathcal{P}A$. ■

Πορισμα. Το συνολο $\{0, 1\}^\omega$ των απειρων ακολουθιων με τιμες στο $\{0, 1\}$ ειναι μη αριθμησιμο.

Αποδειξη: Το συνολο $\{0, 1\}^\omega$ ειναι ισοπληθικο με το $\mathcal{P}\omega$ (ασκηση 4.2), το οποιο ειναι απειρο και, με συμφωνα με το παραπανω θεωρημα, δεν ειναι αριθμησιμο. ■

Προταση 12. Το συνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικων αριθμων ειναι μη αριθμησιμο.

Αποδειξη: Οριζουμε μια συναρτηση $F: \{0, 1\}^\omega \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$ ως εξης. Για καθε ακολουθια $a = (a_n)_{n \in \omega}$ θετουμε

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n / 3^{n+1}$$

Αφου ελεγχουμε οτι η F ειναι 1-1 (ασκηση 4.10), βλεπουμε οτι το $\text{rng}(F)$ ειναι ενα μη αριθμησιμο υποσυνολο του $\mathbb{R}$. Αρα και το $\mathbb{R}$ δεν ειναι αριθμησιμο. ■

Παρατηρηση. Τα ανοιχτα διαστηματα στο $\mathbb{R}$ δεν ειναι αριθμησιμα, αφου ειναι ισοπληθικα με το $\mathbb{R}$. Επειδη τα διαστηματα $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$ ειναι υπερσυνολα του ανοιχτου διαστηματος (a, b) , βλεπουμε οτι και αυτα ειναι μη αριθμησιμα. Αργοτερα θα δουμε οτι ολα ειναι ισοπληθικα με το $\mathbb{R}$.

Θα αποδείξουμε μερικές ακόμα ιδιότητες των αριθμησιμων συνολων.

Προταση 13. Η ενωση δυο το πολυ αριθμησιμων συνολων ειναι το πολυ αριθμησιμο συνολο.

Αποδειξη: Αν ενα απο τα συνολα ειναι κενο το ζητουμενο ειναι φανερο.

Εστω οτι A, B ειναι μη κενα, το πολυ αριθμησιμα συνολα. Τότε υπαρχουν

$f: \omega \xrightarrow[\text{επι}]{} A$ και $g: \omega \xrightarrow[\text{επι}]{} B$. Θετουτας για καθε $n \in \omega$:

$$h(n, 0) = f(n) \text{ και } h(n, 1) = g(n),$$

οριζουμε μια συναρτηση

$$h: \omega \times \{0, 1\} \xrightarrow[\text{επι}]{} A \cup B.$$

Η ενωση $A \cup B$, ως εικονα του αριθμησιμου συνολου $\omega \times \{0, 1\}$, ειναι το πολυ αριθμησιμο συνολο. ■

Πορισμα 1. Η ενωση δυο αριθμησιμων συνολων ειναι αριθμησιμη.

Πορισμα 2. Το συνολο $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ των αρρητων πραγματικων αριθμων ειναι μη αριθμησιμο.

Ισχυει μια γενικευση της προηγουμενης προτασης.

Προταση 14. Αν $(A_n)_{n \in \omega}$ ειναι μια ακολουθια συνολων και $(f_n)_{n \in \omega}$ μια ακολουθια συναρτησεων τετοιες ωστε για καθε $n \in \omega$:

$$f_n: \omega \xrightarrow[\text{επι}]{} A_n,$$

τοτε υπαρχει συναρτηση

$$F: \omega \xrightarrow[\text{επι}]{} \bigcup_{n \in \omega} A_n.$$

Αποδειξη: Για το ζητουμενο, αρκει να αποδειξουμε οτι η ενωση $\bigcup_{n \in \omega} A_n$ ειναι εικονα ενος αριθμησιμου συνολου. Για $n, m \in \omega$ θετουμε:

$$g(n, m) = f_n(m).$$

Ετσι ορισαμε μια συναρτηση $g: \omega^2 \xrightarrow[\text{επι}]{} \bigcup_{n \in \omega} A_n$. Δειξαμε λοιπον οτι η ενωση $\bigcup_{n \in \omega} A_n$ ειναι το πολυ αριθμησιμο συνολο. Μια συναρτηση F που απεικονιζει το ω επι της ενωσης $\bigcup_{n \in \omega} A_n$ ειναι π.χ. η συνθεση $g \circ J^{-1}$, οπου J ειναι οποιαδηποτε συναρτηση τετοια ωστε: $J: \omega^2 \xrightarrow[\text{επι}]{} \omega$. ■

Πορισμα. Το συνολο των αλγεβρικων πραγματικων αριθμων ειναι αριθμησιμο. Το συνολο των υπερβατικων πραγματικων αριθμων ειναι μη αριθμησιμο.

Αποδειξη: Ασκηση 4.13. ■

Κλεινουμε την παραγραφο, αναφεροντας τους συμβολισμους που χρησιμοποιουσε ο Cantor για τους πληθικους αριθμους του συνολου των φυσικων αριθμων και του συνολου των πραγματικων αριθμων. Αυτοι οι συμβολισμοι παραδοσιακα διατηρουνται και στη συγχρονη θεωρια συνολων.

Ο πληθικός αριθμός του συνόλου ω των φυσικών αριθμών συμβολίζεται παραδοσιακά με $\aleph_0$ (αλεφ μηδεν). Το $\aleph_0$ είναι λοιπόν πληθικός αριθμός κάθε απείρου αριθμήσιμου συνόλου. Θα γράφουμε

$$\text{card}(X) = \aleph_0$$

εάν και μόνον εάν το X είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Επειδή το σύνολο ω είναι απείρο, έχουμε ότι για κάθε $n \in \omega$:

$$\aleph_0 \neq n.$$

Ο πληθικός αριθμός του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών συμβολίζεται c (continuum, συνεχές). Θα γράφουμε λοιπόν

$$\text{card}(X) = c,$$

και θα λέμε ότι το σύνολο X έχει τον πληθικό αριθμό του συνεχούς, εάν και μόνον εάν το X είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$.

Η πρόταση 12, που εκφράζει την μη αριθμήσιμότητα του συνόλου των πραγματικών αριθμών μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$\aleph_0 \neq c.$$

4.5 Πραξεις με πληθικούς αριθμούς.

Διατηρώντας τους συμβολισμούς του Cantor, θα χρησιμοποιούμε για τους πληθικούς αριθμούς γράμματα m, n, p του γοτθικού αλφαβήτου. Παρακάτω θα ορίσουμε τις πράξεις πρόσθεσης, πολλαπλασιασμού και δύναμης των πληθικών αριθμών. Οι πράξεις αυτές είναι γενικεύσεις των αντιστοιχών πράξεων στους φυσικούς αριθμούς, οι οποίοι είναι πληθικοί αριθμοί των πεπερασμένων συνόλων.

Πρόσθεση πληθικών αριθμών.

Το άθροισμα δύο πληθικών αριθμών m, n θα το ορίσουμε ως τον πληθικό αριθμό της ένωσης $A \cup B$ δύο ξένων συνόλων A, B με πληθικούς αριθμούς m και n , αντιστοίχα. Για να είναι σωστός ένας τέτοιος ορισμός πρέπει να δικαιολογήσουμε ότι είναι ανεξάρτητος από την επιλογή των συνόλων A, B .

Πρόταση 15. Εστω ότι $A_1 \cap B_1 = \emptyset$ και $A_2 \cap B_2 = \emptyset$. Τότε

$$A_1 \sim A_2 \wedge B_1 \sim B_2 \rightarrow A_1 \cup B_1 \sim A_2 \cup B_2.$$

Απόδειξη: Άσκηση 4.17. ■

Ορισμός. Εστω m, n πληθικοί αριθμοί. Εστω ότι A, B είναι ξένα σύνολα με $\text{card}(A) = m$ και $\text{card}(B) = n$, αντιστοίχα. Το άθροισμα $m+n$ ορίζεται ως ο πληθικός αριθμός $\text{card}(A \cup B)$ της ένωσης $A \cup B$. Εχουμε δηλαδή

$$\text{card}(A) + \text{card}(B) = \text{card}(A \cup B), \quad \text{αν } A \cap B = \emptyset.$$

Παρατήρηση. Για οποιουσδήποτε πληθικούς αριθμούς m, n μπορούμε πάντα να βρούμε δυο ξένα μεταξύ τους σύνολα A και B με $\text{card}(A) = m$ και $\text{card}(B) = n$, αντιστοίχα. Πραγματικά, αν έχουμε $\text{card}(A) = m$ και $\text{card}(B) = n$, τότε θέτουμε $A_1 = A \times \{0\}$ και $B_1 = B \times \{1\}$, βλέπουμε ότι $A_1 \cap B_1 = \emptyset$. Είναι επίσης προφανές ότι $\text{card}(A_1) = \text{card}(A) = m$ και $\text{card}(B_1) = \text{card}(B) = n$.

Παρατήρηση. Για να βρούμε το άθροισμα $m+n$ δυο πληθικών αριθμών m και n μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε ξένα σύνολα A, B με $\text{card}(A) = m$ και $\text{card}(B) = n$ αντιστοίχα. Επιλέγουμε λοιπόν τα σύνολα A και B έτσι ώστε ο πληθικός αριθμός της ένωσης $A \cup B$ να βρίσκεται ευκολά. Με βάση την πρόταση 15, θα ξέρουμε ότι για κάθε X και Y με $\text{card}(X) = m$ και $\text{card}(Y) = n$ ξένα μεταξύ τους, η ένωση $X \cup Y$ έχει τον πληθικό αριθμό που βρήκαμε.

Ευκολά αποδεικνύονται οι παρακάτω νομοί για την προσθήκη πληθικών αριθμών.

Πρόταση 16. Για οποιουσδήποτε πληθικούς αριθμούς m, n, p :

- i) $m+0=m$,
- ii) $m+n=n+m$,
- iii) $(m+n)+p=m+(n+p)$.

Παρατήρηση. Η προσθήκη πληθικών αριθμών γενικεύει την προσθήκη φυσικών αριθμών. Ισχύει δηλαδή $\text{card}(m) + \text{card}(n) = m+n$, για $m, n \in \omega$. Πραγματικά, αν παρούμε το σύνολο $A = \{m+k : k < n\}$, έχουμε $\text{card}(A) = n$, $m \cap A = \emptyset$ και $m \cup A = m+n$. Βλέπουμε λοιπόν ότι η χρησιμοποίηση του συμβόλου $+$ για την προσθήκη φυσικών αριθμών ως πληθικών αριθμών, δεν οδηγεί σε παρεξηγήσεις.

Απο την πρόταση 13 έχουμε αμέσως τα ακόλουθα.

Πρόταση 17.

- i) Για κάθε $n \in \omega$: $\aleph_0 + n = \aleph_0$.
- ii) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

Η παρακάτω πρόταση μπορεί ευκολά να δικαιολογηθεί με βάση την ασκήση 4.16. Αργότερα θα γνωρίσουμε και άλλες, απλούστερες αποδείξεις.

Πρόταση 18.

- i) Για κάθε $n \in \omega$: $c+n=c$.
- ii) $c+\aleph_0=c$.
- iii) $c+c=c$.

Πολλαπλασιασμος πληθικων αριθμων.

Το γινομενο δυο πληθικων αριθμων m και n θα οριστεί ως ο πληθικος αριθμος του καρτεσιανου γινομενου $A \times B$ δυο συνολων A, B με πληθικους αριθμους m και n αντιστοιχα. Οπως και στην περιπτωση της προσθεσης, για να ειναι σωστος αυτος ο ορισμος, πρεπει πρωτα να δειξουμε οτι ειναι ανεξαρτητος απο την επιλογη των συνολων A και B . Το γεγονος αυτο εκφραζεται απο την ασκηση 4.18.

Ορισμος. Εστω m, n πληθικοι αριθμοι. Εστω A, B συνολα με $\text{card}(A)=m$ και $\text{card}(B)=n$, αντιστοιχα. Το γινομενο $m \cdot n$ οριζεται ως ο πληθικος αριθμος $\text{card}(A \times B)$ του καρτεσιανου γινομενου $A \times B$. Εχουμε δηλαδη

$$\text{card}(A) \cdot \text{card}(B) = \text{card}(A \times B).$$

Παρατηρηση. Οπως και στην περιπτωση της προσθεσης, για την ευρεση του γινομενου $m \cdot n$ δυο πληθικων αριθμων, μπορουμε να επιλεξουμε τα συνολα A, B με $\text{card}(A)=m$ και $\text{card}(B)=n$ ετσι ωστε να υπολογιζεται ευκολα ο πληθικος αριθμος του καρτεσιανου γινομενου $A \times B$. Τότε θα ξερουμε οτι για καθε X και Y με $\text{card}(X)=m$ και $\text{card}(Y)=n$ το καρτεσιανο γινομενο $X \times Y$ εχει τον πληθικο αριθμο που βρηκαμε.

Οι παρακατω προτασεις εκφραζουν τους βασικους νομους για τον πολλαπλασιασμο πληθικων αριθμων.

Προταση 19. Για οποιουσδηποτε πληθικους αριθμους m, n, p :

- i) $m \cdot 0 = m$,
- ii) $m \cdot 1 = m$,
- iii) $m \cdot n = n \cdot m$,
- iv) $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$.

Αποδειξη: Ασκηση 4.20. ■

Προταση 20. Για οποιουσδηποτε πληθικους αριθμους m, n, p :

$$m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p.$$

Αποδειξη: Εστω A, B, C οποιαδηποτε συνολα με πληθικους αριθμους m, n, p , αντιστοιχα και τετοια ωστε $B \cap C = \emptyset$. Τότε $\text{card}(A \times (B \cup C)) = m \cdot (n + p)$. Εχουμε

$$A \times (B \cup C) = A \times B \cup A \times C.$$

Προφανως $\text{card}(A \times (B \cup C)) = \text{card}(A \times B \cup A \times C)$. Παρατηρουμε οτι τα συνολα $A \times B$ και $A \times C$ ειναι ξενα μεταξυ τους. Συνεπως εχουμε

$$\text{card}(A \times B \cup A \times C) = \text{card}(A \times B) + \text{card}(A \times C) = m \cdot n + m \cdot p.$$

Επεται λοιπον οτι $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$. ■

Πορίσμα. Εφαρμόζοντας την τελευταία πρόταση με $n=1$ και $p=1$, έχουμε ότι

$$m \cdot 2 = m + m,$$

για κάθε πληθικό αριθμό m . Με επαγωγή μπορούμε να αποδείξουμε ότι γενικά, για κάθε πληθικό αριθμό m και κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει (σκέψη 4.21):

$$m \cdot n = m + m + \dots + m \quad (n \text{ φορές}).$$

Παρατήρηση. Ο πολλαπλασιασμός των πληθικών αριθμών γενικεύει την αντιστοιχία πράξης στους φυσικούς αριθμούς. Ο πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών ως πληθικών αριθμών συμφωνεί δηλαδή με τη γνωστή πράξη πολλαπλασιασμού στους φυσικούς αριθμούς. Πραγματικά, για $m, n \in \mathbb{N}$ ισχύει (σκέψη 4.6)

$$\text{card}(m) \cdot \text{card}(n) = \text{card}(m \times n) = m \cdot n.$$

Οι παρακάτω προτάσεις εκφράζουν μερικές ιδιότητες του πολλαπλασιασμού με τους απείρους πληθικούς αριθμούς $\aleph_0$ και c . Από την πρόταση 10 της προηγούμενης παραγράφου έχουμε αμέσως τα ακόλουθα.

Πρόταση 21.

i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ ισχύει: $n \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

ii) $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

Οι επόμενες ιδιότητες μπορούν να δικαιολογηθούν π.χ. με βάση την σκέψη 4.25. Αργότερα θα γνωρίσουμε και άλλες αποδείξεις τους.

Πρόταση 22.

i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ ισχύει: $n \cdot c = c$.

ii) $\aleph_0 \cdot c = c$.

Δύναμη πληθικών αριθμών.

Η δύναμη m^n δύο πληθικών αριθμών θα οριστεί ως ο πληθικός αριθμός του συνόλου A^B των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το B και τιμές στο A , όπου τα σύνολα A, B έχουν πληθικούς αριθμούς m και n , αντιστοίχα. Όπως και για τις προηγούμενες πράξεις με πληθικούς αριθμούς, ελέγχουμε πρώτα ότι το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των συνόλων A και B (σκέψη 4.19).

Ορισμός. Εστω m, n πληθικοί αριθμοί. Εστω A, B σύνολα με $\text{card}(A)=m$ και $\text{card}(B)=n$, αντιστοίχα. Η δύναμη m^n με βάση m και εκθέτη n ορίζεται ως ο πληθικός αριθμός $\text{card}(A^B)$ του συνόλου A^B όλων των συναρτήσεων που μετασχηματίζουν το σύνολο B στο σύνολο A . Έχουμε δηλαδή:

$$\text{card}(A)^{\text{card}(B)} = \text{card}(A^B).$$

Ισχύουν οι παρακατω νομοι για τις δυναμεις των πληθικων αριθμων. Οι αποδειξεις τους περιεχονται στις ασκησεις 4.23 και 4.24.

Προταση 23. Για οποιουσδηποτε πληθικους αριθμους m, n, p :

$$i) m^{n+p} = m^n \cdot m^p,$$

$$ii) (m \cdot n)^p = m^p \cdot n^p,$$

$$iii) p^{m \cdot n} = (p^m)^n.$$

Ευκολα αποδεικνυνται και οι παρακατω ιδιοτητες (ασκηση 4.22).

Προταση 24. Για καθε πληθικο αριθμο m ισχυει:

$$i) m^0 = 1,$$

$$ii) m^1 = m,$$

$$iii) m^2 = m \cdot m,$$

$$iv) 1^m = 1.$$

$$v) 0^m = 0 \quad \text{για } m \neq 0.$$

Μια γενικευση των ιδιοτητων ii και iii, εκφραζει η ασκηση 4.26.

Παρατηρησεις. i) Οπως και για τις προηγουμενες πραξεις, για να βρουμε τη δυναμη m^n , μπορουμε να επιλεξουμε τα συνολα A, B με $\text{card}(A)=m$ και $\text{card}(B)=n$, ωστε να υπολογιζεται ευκολα ο πληθικος αριθμος του συνολου A^B . Τότε θα ξερουμε οτι για καθε X και Y με $\text{card}(X)=m$ και $\text{card}(Y)=n$, το συνολο X^Y εχει τον πληθικο αριθμο που βρηκαμε.

ii) Για φυσικους αριθμους m, n εχουμε $\text{card}(m^n)=m^n$. Επεται οτι η πραξη της δυναμης των πληθικων αριθμων ειναι γενικευση της δυναμης στους φυσικους αριθμους.

Ειδικο νοημα μπορει να αποδοθει στις δυναμεις με βαση 2. Επειδη για καθε συνολο A ισχυει: $\mathcal{P}A \sim \{0, 1\}^A$ (ασκηση 4.2), εχουμε

$$\text{card}(\mathcal{P}A) = 2^{\text{card}(A)}.$$

Το Διαγωνιο Λημμα του Cantor μπορει να διατυπωθει και ως νομος για τους πληθικους αριθμους.

Προταση 25. Για καθε πληθικο αριθμο m ισχυει: $m \neq 2^m$.

$$\text{Ειδικα εχουμε } \aleph_0 \neq 2^{\aleph_0}, \quad 2^{\aleph_0} \neq 2^{2^{\aleph_0}}, \quad 2^{2^{\aleph_0}} \neq 2^{2^{2^{\aleph_0}}}, \quad \text{κ.ο.κ.}$$

4.6 Συγκριση πληθικων αριθμων.

Ορισμος. Εστω A, B συνολα. Λεμε οτι το A εχει το πολυ τοσα στοιχεια οσα το B , και γραφουμε $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$, οταν υπαρχει συναρτηση $f: A \xrightarrow{1-1} B$.

Παρατηρηση. Εχουμε $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ εαν και μονον εαν το συνολο A ειναι ισοπληθικο με καποιο υποσυνολο του B . Πραγματικα, αν $f: A \xrightarrow{1-1} B$, τότε

$f: A \xrightarrow{1-1} f[A]$. Συνεπώς $A \sim f[A]$ και $f[A] \subseteq B$.

Ορισμός. Εστω m, n πληθικοί αριθμοί. Εστω A, B συνολα με $\text{card}(A)=m$ και $\text{card}(B)=n$, αντιστοίχα. Λέμε ότι ο m είναι το πολύ n (ή ότι ο m είναι μικρότερος ή ίσος n), και γράφουμε $m \leq n$, όταν το A είναι ισοπληθικό με κάποιο υποσύνολο του B (δηλαδή όταν $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$).

Παρατηρήσεις. i) Ο παραπάνω ορισμός είναι σωστός, διότι αν έχουμε $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ και $A \sim A_1$, $B \sim B_1$, τότε $\text{card}(A_1) \leq \text{card}(B_1)$ (ασκήση 4.27)

ii) Η σύγκριση των φυσικών αριθμών ως πληθικών αριθμών συμφωνεί με τη διατάξη τους. Πραγματικά, για οποιαδήποτε m, n έχουμε:

$$\text{card}(m) \leq \text{card}(n) \leftrightarrow m \leq n \leftrightarrow m \leq n.$$

iii) Αποδεικνύοντας ότι $m \leq n$, επιλεγούμε συνολα A, B έτσι ώστε να είναι εύκολο να δικαιολογήσουμε ότι το A είναι ισοπληθικό με κάποιο υποσύνολο του B . Αν είναι δυνατό, παίρνουμε τα A, B ώστε $A \subseteq B$. Τότε θα ξέρουμε ότι για κάθε X και Y με $\text{card}(X)=m$ και $\text{card}(Y)=n$, το X είναι ισοπληθικό με κάποιο υποσύνολο του Y .

Ευκολά αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες.

Πρόταση 26. Για οποιουσδήποτε πληθικούς αριθμούς m, n, p :

i) $m \leq m$,

ii) $m \leq n \wedge n \leq p \rightarrow m \leq p$.

Παρατηρήσεις. Ξέρουμε ότι ένα σύνολο X είναι το πολύ αριθμησιμο εάν και μόνον εάν είναι ισοπληθικό με κάποιο υποσύνολο του ω (πορίσμα 1, σελίδα 69). Έχουμε λοιπόν ότι:

$$\text{card}(X) \leq \aleph_0 \leftrightarrow X \text{ είναι το πολύ αριθμησιμο.}$$

Συμφωνά με την άσκηση 4.14, έχουμε ότι ένα σύνολο X περιέχει αριθμησιμο υποσύνολο εάν και μόνον εάν είναι ισοπληθικό με κάποιο γνήσιο υποσύνολο του. Αυτό σημαίνει ότι:

$$\aleph_0 \leq \text{card}(X) \leftrightarrow X \text{ είναι κατά Dedekind απείρο.}$$

Παραδείγμα 4.

i) Για κάθε $n \in \omega$: $n \leq \aleph_0$.

ii) $\aleph_0 \leq c$ (διότι π.χ. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$).

iii) Για κάθε πληθικό αριθμό m ισχύει: $m \leq 2^m$. Και τούτο διότι για κάθε σύνολο A , η συναρτησιμότητα $f: A \rightarrow \mathcal{P}A$ με $f(x) = \{x\}$ (για $x \in A$) είναι 1-1. Ειδικά έχουμε

$$\aleph_0 \leq 2^{\aleph_0} \leq 2^{2^{\aleph_0}} \leq 2^{2^{2^{\aleph_0}}} \dots \text{ κ.ο.κ.}$$

Θα δειξουμε πιο κατω οτι ολοι αυτοι οι πληθικοι αριθμοι ειναι διαφορετικοι μεταξυ τους.

Για τις πραξεις με πληθικους αριθμους ισχυουν και οι παρακατω νομοι.

Προταση 27. Για οποιουσδηποτε πληθικους αριθμους m, n, p :

- i) $m \leq n \rightarrow p + m \leq p + n$,
- ii) $m \leq n \rightarrow p \cdot m \leq p \cdot n$,
- iii) $m \leq n \rightarrow m^p \leq n^p$,
- iv) $m \leq n \rightarrow p^m \leq p^n$ (για $p \neq 0$).

Αποδειξη: Ασκηση 4.28. ■

Ορισμος. Εστω m, n πληθικοι αριθμοι. Λεμε οτι ο m ειναι (γνησια) μικροτερος απο τον n , και γραφουμε $m < n$, οταν $m \leq n$ και $m \neq n$.

Παραδειγμα 5.

- i) Για καθε $n \in \omega$: $n < \aleph_0$.
- ii) $\aleph_0 < c$ (διοτι $\omega \neq \mathbb{R}$).
- iii) Για καθε πληθικο αριθμο m ισχυει: $m < 2^m$. Πραγματικα, για καθε m εχουμε $m \leq 2^m$ και $m \neq 2^m$ (απο το Διαγωνιο Λημμα του Cantor).

Ειδικα εχουμε $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$, $2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}}$, $2^{2^{\aleph_0}} < 2^{2^{2^{\aleph_0}}}$, κ.ο.κ.

Παρατηρηση. Ας προσεξουμε οτι δεν αληθευουν νομοι αντιστοιχοι αυτων που εκφραζει η προταση 27 (ασκηση 4.29). Εχουμε π.χ. $0 < 1$, αλλα $0 + \aleph_0 = 1 + \aleph_0$.

Θα αποδειξουμε τωρα το σημαντικότερο θεωρημα για τη συγκριση των πληθικων αριθμων. Αυτο το θεωρημα εχει παρα πολλες εφαρμογες. Μας επιτρεπει να αποδεικνουμε την πληθικη ισοδυναμια συνολων, χωρις να βρισκουμε αμεσα συναρτηση που ειναι 1-1 και επι.

Θεωρημα 3 (Cantor, Schröder, Bernstein).

Εστω A, B συνολα. Αν το A ειναι πληθικα ισοδυναμο με καποιο υποσυνολο του B και το B ειναι πληθικα ισοδυναμο με καποιο υποσυνολο του A , τοτε τα συνολα A και B ειναι πληθικα ισοδυναμα. Δηλαδη

$$\text{card}(A) \leq \text{card}(B) \wedge \text{card}(B) \leq \text{card}(A) \rightarrow \text{card}(A) = \text{card}(B).$$

Αποδειξη: Εστω οτι $f: A \xrightarrow{1-1} B$ και $g: B \xrightarrow{1-1} A$. Το ζητουμενο θα αποδειχθει αν ορισουμε μια συναρτηση $h: A \xrightarrow[επι]{1-1} B$.

Οριζουμε αναδρομικα μια ακολουθια $(S_n)_{n \in \omega}$ υποσυνολων του A .

$$S_0 = A - g[B],$$

$$S_{n+1} = g[f[S_n]].$$

Εστω $S = \bigcup_{n \in \omega} S_n$. Θετώντας

$$h(x) = f(x) \quad \text{για } x \in S,$$

$$h(x) = g^{-1}(x) \quad \text{για } x \in A - S,$$

ορίζουμε μια συνάρτηση $h: A \rightarrow B$. Θα αποδείξουμε ότι η h είναι 1-1 και επί του B .

Για να αποδείξουμε ότι η h είναι 1-1, ας υποθέσουμε ότι για $x, y \in A$ έχουμε $h(x) = h(y)$. Επειδή οι συναρτήσεις f και g^{-1} είναι 1-1, ευκολα βλέπουμε ότι αν $x \in S$ και $y \in S$ ή $x \in A - S$ και $y \in A - S$, τότε πρέπει να έχουμε $x = y$. Θα δούμε ότι αποκλείεται η περίπτωση: $x \in S$, $y \in A - S$ (και ομοια η περίπτωση $x \in A - S$, $y \in S$). Ας υποθέσουμε ότι $x \in S$ και $y \in A - S$. Εστω ότι $x \in S_n$. Επειδή $h(x) = f(x)$ και $h(y) = g^{-1}(y)$, έπεται ότι $f(x) = g^{-1}(y)$. Αρα έχουμε $y = g(g^{-1}(y)) = g(f(x))$, και συνεπώς $y \in S_{n+1}$. Αποπο, αφού $y \notin S$.

Δείξαμε λοιπόν ότι για οποιαδήποτε $x, y \in A$: αν $h(x) = h(y)$, τότε $x = y$.

Θα αποδείξουμε ότι η h είναι επί του B . Εστω $b \in B$. Θετούμε $a = g(b)$. Εξετάζουμε δυο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1. $a \notin S$. Τότε $h(a) = g^{-1}(a) = g^{-1}(g(b)) = b$.

Περίπτωση 2. $a \in S$. Τότε, για κάποιο $n \in \omega$, $a \in S_n$. Επειδή $a \in g[B]$, έχουμε $a \notin S_0$ και επομένως $n \neq 0$. Επειδή για $n \neq 0$ έχουμε $S_n = g[f[S_{n-1}]]$, έπεται ότι $a = g(f(c))$, για κάποιο $c \in S_{n-1}$. Τότε $b = g^{-1}(a) = g^{-1}(g(f(c))) = f(c)$. Επειδή $c \in S$, $h(c) = f(c) = b$.

Σε κάθε περίπτωση υπάρχει λοιπόν $x \in A$ τέτοιο ώστε $b = h(x)$. ■

Πορίσμα. Αν $A \subseteq B \subseteq C$ και $A \sim C$, τότε $A \sim B$ και $B \sim C$.

Το θεώρημα των Cantor, Schröder και Bernstein μπορεί να διατυπωθεί και ως νομος για τους πληθικούς αριθμούς.

Προταση 28. Για οποιουσδήποτε πληθικούς αριθμούς m, n :

$$m \leq n \wedge n \leq m \rightarrow m = n.$$

Με βάση το θεώρημα των Cantor, Schröder και Bernstein, ευκολα αποδεικνύονται οι ακόλουθες ιδιότητες των πληθικών αριθμών (ασκήση 4.30).

Προταση 29. Για οποιουσδήποτε πληθικούς αριθμούς m, n, p :

- i) $\neg(m < m)$,
- ii) $m < n \rightarrow \neg(n < m)$,
- iii) $m < n \wedge n < p \rightarrow m < p$.

Παρατήρηση. Οι πληθικοί αριθμοί $\aleph_0$, $2^{\aleph_0}$, $2^{2^{\aleph_0}}$, $2^{2^{2^{\aleph_0}}}$, κ.ο.κ. είναι όλοι διαφορετικοί μεταξύ τους. Πραγματικά, έχουμε

$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < 2^{2^{2^{\aleph_0}}}$ κ.ο.κ. Για οποιουσδήποτε m, n απ' αυτούς, έχουμε $m < n$ άρα αποκλείεται το $m=n$. Βλέπουμε ότι υπάρχουν πολλοί απείροι πληθικοί αριθμοί. Υπάρχουν δηλαδή πολλά απείρα σύνολα που δεν είναι ισοπληθικά μεταξύ τους.

Θα δούμε τώρα μερικές εφαρμογές του θεωρήματος των Cantor, Schröder και Bernstein.

Θα δόσουμε πρώτα απλές λύσεις των ασκήσεων 4.16 i, iii, iv, στις οποίες βασίζεται η πρόταση 18.

Πρόταση 30. Κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που περιέχει ένα ανοιχτό διάστημα έχει τον πληθικό αριθμό του συνεχούς.

Αποδείξη: Εστω $(a, b) \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$ και $a < b$. Επειδή $(a, b) \sim \mathbb{R}$, από το παραπάνω πορίσμα, έπεται ότι $X \sim \mathbb{R}$. Άρα $\text{card}(X) = c$. ■

Πορίσμα. Τα διαστήματα και οι ημιευθείες στο $\mathbb{R}$ έχουν τον πληθικό αριθμό του συνεχούς.

Πολλές από τις ιδιότητες των πληθικών αριθμών $\aleph_0$ και c , που γνωρίσαμε στην προηγούμενη παραγραφο, αποδεικνύονται χωρίς την εξέταση ειδικών συνόλων. Με βάση την πρόταση 28, για να δικαιολογήσουμε μια ισοτιμία $m=n$, αρκεί να δείξουμε τα: $m \leq n$ και $n \leq m$. Έτσι π.χ. χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ (ισχύει λόγω του $\omega^2 \sim \omega$), μπορούμε να δόσουμε νέες αποδείξεις των προτάσεων 17 και 21.

Για κάθε $n \in \omega$ έχουμε:

$$\aleph_0 \leq n + \aleph_0 \leq \aleph_0 + \aleph_0 = 2 \cdot \aleph_0 \leq \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$

και συνεπώς: $n + \aleph_0 = \aleph_0$ και $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

Επίσης, για $n \in \omega$, $n \neq 0$ έχουμε:

$$\aleph_0 \leq n \cdot \aleph_0 \leq \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0,$$

άρα: $n \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

Ομοία, στηριζόμενοι στην ισοτιμία $\aleph_0 \cdot c = c$, μπορούμε να αποδείξουμε τις υπολοίπες ισοτιμίες των προτάσεων 18 και 22.

Για κάθε $n \in \omega$ έχουμε:

$$c \leq n + c \leq \aleph_0 + c \leq c + c = 2 \cdot c \leq \aleph_0 \cdot c = c,$$

επομένως: $n + c = c$, $\aleph_0 + c = c$ και $c + c = c$.

Επίσης, για $n \in \omega$, $n \neq 0$ έχουμε:

$$c \leq n \cdot c \leq \aleph_0 \cdot c = c,$$

αρα: $n \cdot c = c$ και $\aleph_0 \cdot c = c$.

Θα εφαρμόσουμε τώρα το θεώρημα των Cantor, Schröder και Bernstein για να βρούμε τον πληθικό αριθμό του συνόλου ω^ω των απείρων ακολουθιών με τιμές φυσικούς αριθμούς.

Εχουμε $\text{card}(\omega^\omega) = \text{card}(\omega)^{\text{card}(\omega)} = \aleph_0^{\aleph_0}$. Όμως

$$2^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0},$$

αρα $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

Ως εφαρμογή του θεωρήματος των Cantor, Schröder και Bernstein θα αποδείξουμε μια σημαντική ισοτιμία μεταξύ πληθικών αριθμών.

Θεώρημα 4. $2^{\aleph_0} = c$.

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε ότι $c \leq 2^{\aleph_0}$ και $2^{\aleph_0} \leq c$.

Για κάθε πραγματικό αριθμό x , θέτουμε $T(x) = \{r \in \mathbb{Q} : r < x\}$. Ευκολά βλέπουμε ότι, λόγω πυκνότητας του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$,

$$x \neq y \rightarrow T(x) \neq T(y).$$

Επεται ότι η συνάρτηση $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}\mathbb{Q}$, είναι 1-1. Εχουμε λοιπόν

$$c = \text{card}(\mathbb{R}) \leq \text{card}(\mathcal{P}\mathbb{Q}) = 2^{\text{card}(\mathbb{Q})} = 2^{\aleph_0}.$$

Το $c \leq 2^{\aleph_0}$ μπορούμε να αποδείξουμε και διαφορετικά, χρησιμοποιώντας τα δυαδικά αναπτύγματα των πραγματικών αριθμών. Για κάθε $x \in (0, 1)$, το κλασματικό μέρος ενός δυαδικού αναπτύγματος του x είναι μια απείρη ακολουθία με τιμές στο $\{0, 1\}$. Κάθε $x \in (0, 1)$ έχει ακριβώς ένα αναπτύγμα, στο οποίο απείρες φορές εμφανίζεται το ψηφίο 0 (δηλαδή τετοιο που δεν έχει σχεδόν όλα τα ψηφία ίσα με 1). Αν για κάθε $x \in (0, 1)$, παρούμε ως $A(x)$ ένα τετοιο δυαδικό αναπτύγμα, ορίζουμε μια συνάρτηση

$$A: (0, 1) \xrightarrow{1-1} \{0, 1\}^\omega.$$

Επεται ότι

$$c = \text{card}((0, 1)) \leq \text{card}(\{0, 1\}^\omega) = 2^{\aleph_0}.$$

Στην απόδειξη της προτάσης 12 (σελίδα 71) ορίσαμε μια συνάρτηση $F: \{0, 1\}^\omega \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$. Εχουμε λοιπόν και $2^{\aleph_0} \leq c$. Άλλη μια απόδειξη του $2^{\aleph_0} \leq c$ περιέχει η άσκηση 4.31. ■

Παρατήρηση. Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να αποδειχθεί και ως εξής. Ξερούμε (άσκηση 4.16), ότι το σύνολο $N = (0, 1) - \mathbb{Q}$, των αρρητών αριθμών του διαστήματος $(0, 1)$, έχει τον πληθικό αριθμό του συνεχούς. Τα λεγόμενα συνεχή κλάσματα ορίζουν μια συνάρτηση $K: (\omega - \{0\})^\omega \xrightarrow{1-1} N$. Επεται λοιπόν

οτι $c = \text{card}(N) = \text{card}((\omega - \{0\})^\omega) = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 4, μπορούμε ευκολα να αποδείξουμε με -
ρικές σημαντικές αριθμητικές ιδιοτητες του πληθικού αριθμού c .

Προταση 31. $c \cdot c = c$.

Αποδειξη: $c \leq c \cdot c = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$. ■

Όμοια αποδεικνυονται και τα ακολουθα (ασκηση 4.32).

Προταση 32.

- i) Για καθε $n \in \omega$, $n \neq 0$: $c^n = c$.
- ii) Για καθε $n \in \omega$, $n \geq 2$: $n^{\aleph_0} = c$.
- iii) $c^{\aleph_0} = c$.
- iv) $c^c = \aleph_0^c = 2^c$.

Πορισματα. Οι Ευκλειδειαοι χωροι $\mathbb{R}^n$ ($n \in \omega$, $n \neq 0$) εχουν τον πληθικο αριθμο του συνεχους. Είναι λοιπον πληθικα ισοδυναμοι με το συνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικων αριθμων. Το συνολο $\mathbb{R}^\omega$, των απειρων ακολουθιων με πραγματικες τιμες, επισης εχει τον πληθικο αριθμο του συνεχους. Το συνολο $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, των πραγματικων συναρτησεων πραγματικης μεταβλητης, εχει πληθικο αριθμο 2^c και συνεπως δεν είναι ισοπληθικο με το $\mathbb{R}$ (εχουμε $c < 2^c$).

Θα επανελθουμε στους πληθικους αριθμους στο τελευταιο κεφαλαιο. Εκει, χρησιμοποιώντας το Αξιωμα Επιλογης, θα δοσουμε εναν ορισμο των πληθικων αριθμων και θα αποδειξουμε μια σημαντικη ιδιοτητα τους:

"Για οποιουσδηποτε πληθικους αριθμους m, n : $m \leq n \vee n \leq m$."

Αυτο σημαινει οτι για οποιαδηποτε συνολα A, B , οι πληθικοι τους αριθμοι $\text{card}(A)$ και $\text{card}(B)$ συγκρινονται.

Θα κλεισουμε το κεφαλαιο, αναφεροντας ενα απο τα σημαντικότερα προβληματα της θεωρίας συνολων.

Ολα τα γνωστα απειρα υποσυνολα του $\mathbb{R}$ που δεν είναι αριθμησιμα, είναι ισοπληθικα με ολο το $\mathbb{R}$. Αυτη η παρατηρηση οδηγησε τον Cantor σε μια υποθεση, που είναι γνωστη ως Εικασια του Συνεχους, η οποια λεει:

"Καθε υποσυνολο του $\mathbb{R}$ η είναι το πολυ αριθμησιμο η εχει τον πληθικο αριθμο του συνεχους", δηλαδη

$$(\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{R})) (\text{card}(X) \leq \aleph_0 \vee \text{card}(X) = c).$$

Μια συνεπεια της Εικασιας του Συνεχους είναι το γεγονος οτι δεν υπαρχουν πληθικοι αριθμοι μεταξυ του $\aleph_0$ και του c (ασκηση 4.36). Εχουμε δηλαδη οτι για καθε πληθικο αριθμο m :

$$\aleph_0 \leq m \leq c \rightarrow m = \aleph_0 \vee m = c$$

ή ισοδυναμία ότι δεν υπάρχει πληθικός αριθμός m τέτοιος ώστε: $\aleph_0 < m < c$.

Κανείς δεν μπορεί ούτε να αποδείξει την Εικασία του Συνεχούς ούτε να βρει για αυτήν αντιπαραδείγμα. Όταν ο Hilbert το 1900 ανακοινώσει την περιφημή λίστα των σπουδαιότερων μαθηματικών προβλημάτων, τοποθέτησε την Εικασία του Συνεχούς στη πρώτη θέση. Το 1940 ο K.Gödel έδειξε ότι στη θεωρία συνόλων ZFC δεν μπορεί να αποδειχθεί η αρνηση της Εικασίας του Συνεχούς. Αργότερα, το 1966, ο P.Cohen έδειξε ότι δεν αποκινύεται και η Εικασία του Συνεχούς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.1 Αποδείξτε τις ιδιότητες της πληθικής ισοδυναμίας συνολων που εκφράζει η πρόταση 1 (σελιδα 63).

4.2 Εστω A συνολο. Για κάθε $B \subseteq A$ ορίζουμε τη συνάρτηση $\chi_B: A \rightarrow \{0,1\}$ (χαρακτηριστική συνάρτηση του B) ως εξής:

$$\chi_B(y)=1, \text{ αν } y \in B \text{ και } \chi_B(y)=0, \text{ αν } y \notin B.$$

Αποδείξτε ότι:

i) Αν $B \subseteq A$, $C \subseteq A$, $B \neq C$, τότε $\chi_B \neq \chi_C$.

ii) Για κάθε $f: A \rightarrow \{0,1\}$, υπάρχει $B \subseteq A$ ώστε $f = \chi_B$.

Με βάση τα παραπάνω δείξτε ότι για κάθε συνολο A ισχύει: $\mathcal{P}A \sim \{0,1\}^A$.

4.3 Εστω $n \in \omega$ και $f: n \rightarrow n$. Αποδείξτε ότι αν η f είναι 1-1, τότε είναι επί του n . Αποδείξτε και το αντιστρόφιο, δηλαδή ότι αν η f είναι επί του n , τότε είναι 1-1.

4.4 Αποδείξτε ότι αν $n \in \omega$ και $X \subseteq n$, τότε υπάρχει $m \in \omega$, $m \leq n$ ώστε: $X \sim m$.

Δείξτε επιπλέον ότι αν $X \subset n$, τότε υπάρχει $m \in \omega$, $m < n$ ώστε: $X \sim m$.

4.5 Αποδείξτε ότι η ένωση πεπερασμένου συνολού πεπερασμένων συνολων είναι πεπερασμένη.

4.6 Αποδείξτε ότι για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς n, m : $n \times m \sim n \cdot m$.

4.7 Αποδείξτε ότι το καρτεσιανό γινόμενο μιας πεπερασμένης οικογένειας πεπερασμένων συνολων είναι πεπερασμένο.

4.8 Εστω A αριθμησιμο συνολο. Εστω $X \neq \emptyset$. Αποδείξτε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

i) Το X είναι το πολύ αριθμησιμο.

ii) $\exists f(f: X \xrightarrow{1-1} A)$.

iii) $\exists f(f: A \xrightarrow{\text{επί}} X)$.

4.9 Αποδείξτε την παρακάτω γενίκευση του Διαγωνίου Λήμματος:

"Το δυναμοσυνολο $\mathcal{P}A$ δεν είναι ισοπληθικό με κανένα υποσυνολο του A ".

Με βάση το παραπάνω, δείξτε ότι δεν υπάρχει συνολο όλων των συνολων.

4.10 Συμπληρώστε την αποδείξη της πρότασης 12 (σελιδα 71) ελεγχοντας ότι η συνάρτηση F είναι 1-1.

4.11 Αποδείξτε ότι η ένωση μιας πεπερασμένης οικογένειας το πολύ αριθμησιμων συνολων είναι το πολύ αριθμησιμο συνολο.

4.12 Εστω A σύνολο. Δειξτε ότι υπάρχει η ακολουθία $({}^n A)_{n \in \omega}$, όπου ${}^n A$ είναι το σύνολο των πεπερασμένων ακολουθιών μήκους n με τιμές στο A . Αποδειξτε ότι υπάρχει το σύνολο $\text{Seq}(A)$ όλων των πεπερασμένων ακολουθιών με τιμές στο A . Αποδειξτε ότι αν το σύνολο $A \neq \emptyset$ είναι το πολύ αριθμησιμο, τότε για κάθε $n \in \omega$ τα σύνολα ${}^n A$ είναι το πολύ αριθμησιμα. Αποδειξτε επίσης ότι τότε το σύνολο $\text{Seq}(A)$ είναι αριθμησιμο.

4.13 Δειξτε ότι υπάρχει μια αριθμηση $(P_n)_{n \in \omega}$ του συνόλου των πολυωνυμικών συναρτησεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$ με ακέραιους συντελεστες. Αποδειξτε ότι το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών πραγματικών αριθμών είναι αριθμησιμο.

4.14 Αποδειξτε ότι ένα σύνολο είναι ισοπληθικό με κάποιο γνήσιο υποσύνολο του εάν και μόνον εάν περιέχει αριθμησιμο υποσύνολο.

4.15 Εστω ότι το σύνολο X περιέχει ένα αριθμησιμο υποσύνολο. Εστω $b \notin X$. Αποδειξτε ότι τότε $X \sim X \cup \{b\}$. Αποδειξτε γενικότερα ότι αν B είναι ένα το πολύ αριθμησιμο σύνολο, ξένο με το X , τότε $X \sim X \cup B$.

4.16 Χρησιμοποιώντας τη προηγούμενη άσκηση, αποδειξτε ότι καθένα από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}$ έχει τον πλήθος αριθμό του συνεχούς.

- i) $(a, b), (a, b], [a, b), [a, b]$ (όπου $a, b \in \mathbb{R}$ και $a < b$),
- ii) $(-\infty, a), (-\infty, a], (a, +\infty), [a, +\infty)$ (όπου $a \in \mathbb{R}$),
- iii) $(0, 1) \cup \{0, 1, \dots, n\}$ (όπου $n \in \omega$, $n \neq 0$),
- iv) $(0, 1) \cup (\mathbb{Q} \cap (1, 2))$,
- v) $(0, 1) - \mathbb{Q}$, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

4.17 Εστω $A_1 \cap B_1 = \emptyset$ και $A_2 \cap B_2 = \emptyset$. Αποδειξτε ότι

$$A_1 \sim A_2 \wedge B_1 \sim B_2 \rightarrow A_1 \cup B_1 \sim A_2 \cup B_2.$$

4.18 Αποδειξτε ότι για οποιαδήποτε σύνολα A_1, A_2, B_1, B_2 :

$$A_1 \sim A_2 \wedge B_1 \sim B_2 \rightarrow A_1 \times B_1 \sim A_2 \times B_2.$$

4.19 Αποδειξτε ότι για οποιαδήποτε σύνολα A_1, A_2, B_1, B_2 :

$$A_1 \sim A_2 \wedge B_1 \sim B_2 \rightarrow A_1^{B_1} \sim A_2^{B_2}.$$

4.20 Αποδειξτε ότι για οποιαδήποτε σύνολα A, B, C ισχύει:

- i) $A \times \emptyset \sim \emptyset$,
- ii) $A \times \{\emptyset\} \sim A$,
- iii) $A \times B \sim B \times A$,
- iv) $(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C)$.

4.21 Αποδείξτε ότι για οποιονδήποτε πληθικό αριθμό m και $n \neq 0$:

$$m \cdot n = m + m + \dots + m \quad (n \text{ φορές}).$$

4.22 Αποδείξτε ότι για κάθε σύνολο A ισχύει:

- i) $A^{\emptyset} \sim \{\emptyset\}$, ii) $A^{\{\emptyset\}} \sim A$,
- iii) $A^{\{0,1\}} \sim A \times A$, iv) $\{\emptyset\}^A \sim \{\emptyset\}$,
- v) $\emptyset^A \sim \emptyset$ (για $A \neq \emptyset$).

4.23 Εστω ότι A, B είναι ξένα σύνολα. Αποδείξτε ότι για κάθε σύνολο C :

$$C^{A \cup B} \sim C^A \times C^B.$$

4.24 Αποδείξτε ότι για οποιαδήποτε σύνολα A, B, C ισχύει:

- i) $(A \times B)^C \sim A^C \times B^C$,
- ii) $A^{B \times C} \sim (A^B)^C$.

4.25 Αποδείξτε ότι για κάθε $n \neq 0$ έχουμε $n \times [0, 1) \sim [0, n)$. Αποδείξτε επίσης ότι $\omega \times [0, 1) \sim [0, +\infty)$.

4.26 Αποδείξτε ότι για οποιονδήποτε πληθικό αριθμό m και $n \neq 0$:

$$m^n = m \cdot m \cdot \dots \cdot m \quad (n \text{ φορές}).$$

4.27 Εστω $A \sim A_1$ και $B \sim B_1$. Αποδείξτε ότι αν υπάρχει $f: A \xrightarrow{1-1} B$, τότε υπάρχει $g: A_1 \xrightarrow{1-1} B_1$.

4.28 Εστω $A \subseteq B$. Αποδείξτε ότι για κάθε σύνολο C υπάρχουν συναρτήσεις:

- i) $f: A \times C \xrightarrow{1-1} B \times C$,
- ii) $g: A^C \xrightarrow{1-1} B^C$,
- iii) $h: C^A \xrightarrow{1-1} C^B$ (για $C \neq \emptyset$).

4.29 Βρείτε παραδείγματα πληθικών αριθμών m, n, p για τους οποίους δεν ικανοποιούνται τα παρακάτω:

- i) $m < n \rightarrow p + m < p + n$,
- ii) $m < n \rightarrow p \cdot m < p \cdot n$,
- iii) $m < n \rightarrow m^p < n^p$,
- iv) $m < n \rightarrow p^m < p^n$ (για $p \neq 0$).

4.30 Αποδείξτε τους νόμους για τους πληθικούς αριθμούς που εκφράζει η πρόταση 29 (σελίδα 80).

4.31 Εστω ότι $B \subseteq \{0, 1\}^\omega$ αποτελείται από εκείνες τις ακολουθίες που είναι τελικά 1. Εστω $X = \{0, 1\}^\omega - B$. Αποδείξτε ότι το B είναι αριθμησιμο και, με βάση την άσκηση 4.15, δείξτε ότι $\text{card}(X) = 2^{\aleph_0}$.

Για κάθε ακολουθία $a=(a_n)_{n \in \omega}$, $a \in X$ θέτουμε:

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n / 2^n.$$

Αποδειξτε ότι $f: X \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$, και συνεπώς ότι $2^{\aleph_0} \leq c$.

4.32 Αποδειξτε τις αριθμητικές ιδιότητες του c , που εκφράζει η προτα-
ση 32.

4.33 Αποδειξτε ότι για κάθε πληθικό αριθμό $m \neq 1$ ισχύει: $m < m^m$.

4.34 Βρείτε τους πληθικούς αριθμούς του συνόλου των:

i) Ακολουθιών με τιμές στο $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

ii) Συναρτησεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{Q}$.

4.35 Βρείτε τον πληθικό αριθμό του συνόλου $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ των συνεχών πραγμα-
τικών συναρτησεων πραγματικής μεταβλητής και δείξτε ότι το $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ δεν
είναι πληθικά ισοδυναμο με το σύνολο $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ όλων των πραγματικών συναρτη-
σεων πραγματικής μεταβλητής.

4.36 Αποδειξτε ότι οι προτάσεις:

i) Για κάθε πληθικό αριθμό m : $\aleph_0 \leq m \leq c \rightarrow m = \aleph_0 \vee m = c$.

ii) Δεν υπάρχει πληθικός αριθμός m τέτοιος ώστε: $\aleph_0 < m < c$.

είναι ισοδυναμες και ότι είναι συνεπειες της Εικασίας του Συνεχούς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΟΙ ΔΙΑΤΑΚΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

5.1 Καλές διαταξεις.

Ορισμοί. Μια (γνησία) γραμμική διαταξη R ενός συνόλου A λέγεται καλή διαταξη του, όταν σε κάθε μη κενό υποσύνολο B του A υπάρχει ελάχιστο (ως προς την διαταξη R) στοιχείο, δηλαδή

$$B \subseteq A \wedge B \neq \emptyset \rightarrow (\exists x \in B)(\forall y \in B)(y \neq x \rightarrow xRy).$$

Το ελάχιστο στοιχείο ενός $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$ (που είναι μοναδικό) συμβολίζεται $\min_R B$ (ή απλώς $\min B$, αν δεν υπάρχει κίνδυνος παρεξήγησης). Εχουμε προφανώς: $a = \min_R B \leftrightarrow a \in B \wedge \forall y (yRa \rightarrow y \in B)$.

Το ζεύγος $\langle A, R \rangle$ λέγεται καλά διατεταγμένο σύνολο, αν η σχέση R είναι καλή διαταξη του A και $R \subseteq A \times A$.

Παραδειγμα 1. i) Η Αρχή Ελαχιστου για τους φυσικούς αριθμούς μας λέει ότι η διαταξη $<$ του συνόλου ω είναι μια καλή διαταξη του. Ευκολά βλέπουμε ότι για κάθε $X \subseteq \omega$, το X είναι καλά διατεταγμένο από τη σχέση $< \cap X^2$ (ασκήση 5.1). Ειδικά λοιπόν, για κάθε φυσικό αριθμό n , η διαταξη $<$ στο n (δηλαδή η $< \cap n \times n$) είναι καλή διαταξη του n .

ii) Οι γνωστές διαταξεις των $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$ δεν είναι καλές.

Παρατήρηση. Εστω $\langle A, < \rangle$ καλά διατεταγμένο σύνολο. Αν $A \neq \emptyset$, τότε υπάρχει το ελάχιστο του στοιχείο. Εστω $a_0 = \min A$. Το a_0 είναι το μικρότερο στοιχείο του A . Αν $A - \{a_0\} \neq \emptyset$, τότε υπάρχει το $\min(A - \{a_0\}) = a_1$. Εχουμε $a_0 < a_1$ και το a_1 είναι αμέσως επόμενο του a_0 (ασκήση 5.2). Αν $A - \{a_0, a_1\} \neq \emptyset$, τότε υπάρχει το $\min(A - \{a_0, a_1\}) = a_2$. Εχουμε $a_0 < a_1 < a_2$ και το a_2 είναι αμέσως επόμενο του a_1 . Την παραπάνω διαδικασία μπορούμε να την συνεχίσουμε όσο υπάρχουν στοιχεία στο A . Εστω ότι έχουμε $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ και εστω $A - \{a_0, a_1, \dots, a_n\} \neq \emptyset$. Θετούμε $a_{n+1} = \min(A - \{a_0, a_1, \dots, a_n\})$. Τότε έχουμε $a_0 < a_1 < \dots < a_n < a_{n+1}$ και το a_{n+1} είναι αμέσως επόμενο του a_n . Αν το A δεν είναι πεπερασμένο, τότε ορίζεται μια απείρη ακολουθία $(a_n)_{n \in \omega}$, διαδοχικών ως προς τη διαταξη $<$, στοιχείων του A , τέτοια ώστε για κάθε $n \in \omega$: $a_n < a_{n+1}$. Οι όροι της ακολουθίας αποτελούν "αρχικό τμήμα" του διατεταγμένου συνόλου $\langle A, < \rangle$. Αν $A = \{a_n : n \in \omega\}$, τότε η διαταξη $<$ στο A είναι ομοία με τη διαταξη των φυσικών αριθμών. Αν όμως $A - \{a_n : n \in \omega\} \neq \emptyset$, μπορούμε να συνεχίσουμε τη διαδικασία. Εστω $a_\omega = \min(A - \{a_n : n \in \omega\})$. Για κάθε $n \in \omega$ έχουμε: $a_n < a_\omega$ (το a_ω είναι μεγαλύτερο από όλους τους όρους της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \omega}$) και το a_ω είναι το μικρότερο στοιχείο του A μ' αυτή την ιδιο-

τητα. Ας προσεξουμε οτι το a_ω δεν εχει αμεσως προηγουμενο στοιχειο. Αν το a_ω δεν ειναι το μεγαλυτερο στοιχειο του A , τοτε η παραπανω διαδικασια μπορει να συνεχιστει.

Παραδειγμα 2. Εστω $B = \{\frac{n}{n+1} : n \in \omega\} \cup \{1\}$. Το B ειναι καλα διατεταγμενο απο τη διαταξη $<$ του συνολου $\mathbb{R}$ των πραγματικων αριθμων. Η διαταξη $<$, περιορισμενη στο $B - \{1\}$ ειναι ομοια με τη διαταξη του ω . Η διαδικασια που περιγραψαμε παραπανω δινει $a_{\frac{n}{n+1}}$ για $n \in \omega$ και $a_\omega = 1$.

Ορισμοι. Εστω $\langle A, < \rangle$ καλα διατεταγμενο συνολο. Ενα υποσυνολο B του A λεγεται αρχικο τμημα του $\langle A, < \rangle$, αν για οποιαδηποτε x, y :

$$x \in B \wedge y < x \rightarrow y \in B,$$

δηλαδη μαζι με καθε στοιχειο του B , ανηκουν στο B ολα τα προηγουμενα του. Ενα αρχικο τμημα B λεγεται γνησιο αν $B \neq A$. Για καθε $a \in A$, το συνολο

$$O_<(a) = \{x \in A : x < a\}$$

το λεμε αρχικο τμημα που οριζεται απο το a . Συχνα, αντι για $O_<(a)$ γραφουμε απλως $O(a)$, αν αυτο δεν οδηγει σε παρεξηγησεις.

Παρατηρηση. Εστω $\langle A, < \rangle$ καλα διατεταγμενο συνολο. Ευκολα βλεπουμε οτι για καθε $a \in A$ το συνολο $O_<(a)$ ειναι γνησιο αρχικο τμημα του $\langle A, < \rangle$. Ισχυει και το αντιστροφο. Καθε γνησιο αρχικο τμημα B οριζεται απο ενα στοιχειο του A , δηλαδη υπαρχει $a \in A$ τετοιο ωστε $B = O_<(a)$ (ασκηση 5.5).

Θα αποδειξουμε μερικες ιδιοτητες των καλα διατεταγμενων συνολων.

Προταση 1. Εστω $\langle A, < \rangle$ καλα διατεταγμενο συνολο. Δεν υπαρχει ακολουθια $(x_n)_{n \in \omega}$ στοιχειων του A τετοια ωστε για καθε $n \in \omega$: $x_{n+1} < x_n$. Δεν υπαρχει δηλαδη απειρη $<$ -φθινουσα ακολουθια.

Αποδειξη: Ας υποθεσουμε οτι $(x_n)_{n \in \omega}$ ειναι μια ακολουθια στοιχειων του A , τετοια ωστε:

$$\dots < x_{n+1} < x_n < \dots < x_1 < x_0.$$

Τοτε το συνολο $\{x_n : n \in \omega\}$ τιμων της ακολουθιας δεν εχει ελαχιστο στοιχειο. Ατοπο. ■

Προταση 2. Εστω $\langle A, < \rangle$ καλα διατεταγμενο συνολο. Εστω οτι $f: A \rightarrow A$ ειναι γνησια αυξουσα, δηλαδη για καθε x, y του A :

$$x < y \rightarrow f(x) < f(y).$$

Τοτε για καθε $x \in A$ ισχυει: $x \leq f(x)$ (δηλαδη $x < f(x)$ ή $x = f(x)$).

Αποδειξη: Αρκει να αποδειξουμε οτι συνολο $B = \{x \in A : f(x) < x\}$ ειναι κενο.

Εστω οτι $B \neq \emptyset$ και $a = \min B$. Τοτε $f(a) < a$ και για καθε $x < a$ εχουμε: $x \leq f(x)$.

Λογω του $f(a) < a$, πρεπει να ειναι: $f(a) \leq f(f(a))$. Επειδη ομως η f ειναι

γνησια αυξουσα, απο το $f(a) <_A a$, επεται οτι $f(f(a)) <_B f(a)$. Αποπο. ■

Προταση 3. Αν δυο καλα διατεταχμενα συνολα $\langle A, <_A \rangle$, $\langle B, <_B \rangle$ ειναι ομοια, τοτε ο ισομορφισμος τους ειναι μοναδικος. Υπαρχει δηλαδη ακριβως μια συναρτηση $f: A \xrightarrow[επι]{1-1} B$ τετοια ωστε για καθε $x, y \in A$: $x <_A y \leftrightarrow f(x) <_B f(y)$.

Αποδειξη: Ας υποθεσουμε οτι $f: A \xrightarrow[επι]{1-1} B$ και $g: A \xrightarrow[επι]{1-1} B$ ειναι ισομορφισμοι των διατεταχμενων συνολων $\langle A, <_A \rangle$, $\langle B, <_B \rangle$. Για καθε $x, y \in A$ εχουμε τοτε:

$$x <_A y \leftrightarrow f(x) <_B f(y) \quad \text{και} \quad x <_A y \leftrightarrow g(x) <_B g(y).$$

Επεται οτι για καθε $x, y \in A$ εχουμε:

$$x <_A y \rightarrow f(x) <_B f(y) \rightarrow g^{-1}(f(x)) <_A g^{-1}(f(y)),$$

που σημαινει οτι η συνθεση $g^{-1} \circ f: A \rightarrow A$ ειναι γνησια αυξουσα. Απο την προταση 2, επεται οτι για καθε $x \in A$: $x \leq_A g^{-1}(f(x))$, αρα $g(x) \leq_B f(x)$.

Ομοια αποδεικνυεται οτι η συναρτηση $f^{-1} \circ g: A \rightarrow A$ ειναι γνησια αυξουσα. Επομενως για καθε $x \in A$ εχουμε: $x \leq_A f^{-1}(g(x))$, αρα $f(x) \leq_B g(x)$.

Απο τα παραπανω βλεπουμε λοιπον οτι για καθε $x \in A$ πρεπει να ειναι $f(x) = g(x)$. Αυτο σημαινει οτι οι ισομορφισμοι f και g ταυτιζονται. ■

Προταση 4. Ενα καλα διατεταχμενο συνολο δεν ειναι ομοιο με κανενα γνησιο αρχικο του τμημα.

Αποδειξη: Εστω οτι B ειναι γνησιο αρχικο τμημα του καλα διατεταχμενου συνολου $\langle A, < \rangle$. Τοτε $B = O(a)$ για καποιο $a \in A$. Ας υποθεσουμε οτι υπαρχει ισομορφισμος $f: A \xrightarrow[επι]{1-1} O(a)$. Τοτε η $f: A \rightarrow A$ ειναι γνησια αυξουσα και συνεπως (απο την προταση 2) πρεπει να ισχυει $a \leq f(a)$. Αυτο ειναι αδυνατο, διοτι $f(a) \in O(a)$. ■

Πορισμα. Εστω $\langle A, < \rangle$ καλα διατεταχμενο συνολο. Εστω $x, y \in A$, $x \neq y$. Τοτε τα αρχικα τμηματα $O(x)$ και $O(y)$ δεν ειναι ομοια.

Αποδειξη: Λογω του $x \neq y$, εχουμε $x < y$ ή $y < x$. Αν $x < y$, τοτε το $O(x)$ ειναι γνησιο αρχικο τμημα του $O(y)$, αρα τα $O(x)$ και $O(y)$ δεν ειναι ισομορφικα. Ομοια στην περιπτωση $y < x$. ■

5.2 Η Αρχη Υπερπεπερασμενης Επαγωγης.

Το παρακατω θεωρημα ειναι γενικευση της Αρχης Επαγωγης για τους φυσικους αριθμους. Μας επιτρεπει να κανουμε επαγωγικες αποδειξεις ως προς καλες διαταξεις, καθως και, οπως θα δουμε αργοτερα, επαγωγικους ορισμους πανω σε καλα διατεταχμενα συνολα.

Θεωρημα 1. (Αρχη Υπερπεπερασμενης Επαγωγης).

Εστω $\langle A, < \rangle$ καλα διατεταχμενο συνολο και $X \subseteq A$. Ας υποθεσουμε πως για καθε $a \in A$, απο το γεγονος οτι ανηκουν στο X ανηκουν ολα τα προηγουμενα

του a στοιχεία, επεται οτι και το a ανηκει στο X , δηλαδή

$$(\forall a \in A)(O_{\prec}(a) \subseteq X \rightarrow a \in X).$$

Τότε $X=A$.

Αποδειξη: Αν ήταν $X \subset A$, τότε παίρνοντας $a = \min(A-X)$, θα είχαμε οτι $a \notin X$ και $O_{\prec}(a) \subseteq X$. Αποπο. ■

Η Αρχή Υπερπεπερασμενης Επαγωγης διατυπωνεται ισοδυναμα ως εξης.

Θεωρημα 2. Εστω $\langle A, \prec \rangle$ καλά διατεταγμενο συνολο. Εστω Φ τυπος. Ας υποθεσουμε οτι για κάθε $a \in A$ ισχυει:

$$((\forall x \in O_{\prec}(a)) \Phi(x)) \rightarrow \Phi(a).$$

Τότε $(\forall a \in A) \Phi(a)$.

Αποδειξη: Θετουμε $X = \{x \in A : \Phi(x)\}$ και εχουμε οτι για κάθε $a \in A$:

$$O_{\prec}(a) \subseteq X \rightarrow a \in X.$$

Απο το θεωρημα 1, επεται οτι $X=A$, που σημαίνει οτι $(\forall a \in A) \Phi(a)$. ■

Πιο κατω θα γνωρισουμε αρκετες εφαρμογες της Αρχης Υπερπεπερασμενης Επαγωγης.

5.3 Συγκριση καλων διαταξεων.

Ορισμος. Εστω $\langle A, R \rangle, \langle B, S \rangle$ καλά διατεταγμενα συνολα. Λεμε οτι η διαταξη R είναι μικροτερη απο την S , και γραφουμε $\langle A, R \rangle \prec \langle B, S \rangle$, οταν το $\langle A, R \rangle$ είναι ομοιο με καποιο γνησιο αρχικο τμημα του $\langle B, S \rangle$.

Η προταση 4 και οι ασκησεις 5.14, 5.15 μπορούν να διατυπωθουν ως εξης.

Προταση 5. Εστω $\langle A, R \rangle, \langle B, S \rangle, \langle C, T \rangle$ καλά διατεταγμενα συνολα.

- i) $\neg(\langle A, R \rangle \prec \langle A, R \rangle)$.
- ii) $\langle A, R \rangle \prec \langle B, S \rangle \rightarrow \neg(\langle B, S \rangle \prec \langle A, R \rangle)$.
- iii) $\langle A, R \rangle \prec \langle B, S \rangle \wedge \langle B, S \rangle \prec \langle C, T \rangle \rightarrow \langle A, R \rangle \prec \langle C, T \rangle$.

Το επομενο θεωρημα είναι γνωστο ως Νομος Τριχοτομιας του Cantor για τις καλες διαταξεις.

Θεωρημα 3. Για οποιαδηποτε καλά διατεταγμενα $\langle A, R \rangle, \langle B, S \rangle$ ισχυει:

$$\langle A, R \rangle \prec \langle B, S \rangle \text{ ή } \langle A, R \rangle \approx \langle B, S \rangle \text{ ή } \langle B, S \rangle \prec \langle A, R \rangle.$$

Αποδειξη: Θεωρουμε τη σχεση

$$F = \{ \langle x, y \rangle \in A \times B : O_R(x) \approx O_S(y) \},$$

οπου το $O_R(x) \approx O_S(y)$ σημαίνει οτι αρχικο τμημα $O_R(x)$ του $\langle A, R \rangle$ είναι ομοιο με το αρχικο τμημα $O_S(y)$ του $\langle B, S \rangle$.

Απο το πορισμα στη σελιδα 91 εχουμε οτι για οποιοδηποτε x, y, z :

$$\langle x, y \rangle \in F \wedge \langle x, z \rangle \in F \rightarrow y = z,$$

δηλαδή η F είναι συναρτησιμότητα. Ομοίως αποδεικνύεται ότι η F είναι 1-1, δηλαδή ότι και η F^{-1} είναι συναρτησιμότητα.

Παρατηρούμε ότι το πεδίο ορισμού $\text{dom}(F)$ της F είναι αρχικό τμήμα του $\langle A, R \rangle$. Πραγματικά, εστω $a \in \text{dom}(F)$ και xRa . Τότε $O_R(a) \approx O_S(b)$ για κάποιο $b \in B$. Το $O_R(x)$ είναι αρχικό τμήμα του $O_R(a)$, άρα (ασκήση 5.7) είναι ομοίο με ένα αρχικό τμήμα του $O_S(b)$. Υπάρχει λοιπόν $y \in B$ τέτοιο ώστε $O_R(x) \approx O_S(y)$. Άρα $\langle x, y \rangle \in F$ και συνεπώς $x \in \text{dom}(F)$.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι το $\text{rng}(F) = \text{dom}(F^{-1})$ είναι αρχικό τμήμα του $\langle B, S \rangle$. Έχουμε λοιπόν $F: \text{dom}(F) \xrightarrow{1-1} \text{rng}(F)$.

Θα αποδείξουμε ότι η F είναι ισομορφισμός. Αρκεί να ελεγχουμε ότι διατηρεί τις διαταξεις R, S , δηλαδή ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \text{dom}(F)$:

$$x_1 R x_2 \rightarrow F(x_1) S F(x_2).$$

Εστω $x_1, x_2 \in \text{dom}(F)$, $F(x_1) = y_1$, $F(x_2) = y_2$. Τότε $O_R(x_1) \approx O_S(y_1)$, $O_R(x_2) \approx O_S(y_2)$ και $O_R(x_1) \subset O_R(x_2)$. Επειδή τα $O_R(x_2)$, $O_S(y_2)$ είναι ομοία και το $O_R(x_1)$ είναι γνήσιο αρχικό τμήμα του $O_R(x_2)$, έπεται ότι το $O_R(x_1)$ είναι ομοίο με ένα γνήσιο αρχικό τμήμα $O_S(z)$ του $O_S(y_2)$. Συνεπώς, για κάποιο $z \in B$, $z S y_2$, έχουμε $O_S(z) \approx O_R(x_1)$. Αφού $O_R(x_1) \approx O_S(y_1)$, έχουμε $O_S(y_1) \approx O_S(z)$. Από το πορίσμα στη σελίδα 91, έπεται ότι $z = y_1$. Άρα $y_1 S y_2$, που σημαίνει ότι $F(x_1) S F(x_2)$.

Οι διαταξεις R στο $\text{dom}(F)$ και S στο $\text{rng}(F)$ είναι λοιπόν ομοίες. Αν $\text{dom}(F) = A$ και $\text{rng}(F) = B$, τότε έχουμε $\langle A, R \rangle \approx \langle B, S \rangle$. Αν $\text{dom}(F) = A$ και το $\text{rng}(F)$ είναι γνήσιο αρχικό τμήμα του $\langle B, S \rangle$, τότε $\langle A, R \rangle \prec \langle B, S \rangle$. Αν το $\text{dom}(F)$ είναι γνήσιο αρχικό τμήμα του $\langle A, R \rangle$ και $\text{rng}(F) = B$, τότε έχουμε $\langle B, S \rangle \prec \langle A, R \rangle$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι αποκλείεται η περίπτωση να είναι και το $\text{dom}(F)$ και το $\text{rng}(F)$ γνήσια αρχικά τμήματα. Πραγματικά, ας υποθέσουμε ότι $\text{dom}(F) = O_R(a)$ και $\text{rng}(F) = O_S(b)$ για κάποια $a \in A$, $b \in B$. Τότε θα είχαμε

$$F: O_R(a) \xrightarrow{1-1} O_S(b),$$

και επειδή η F είναι ισομορφισμός, θα ήταν $O_R(a) \approx O_S(b)$. Επομένως, από τον ορισμό της F , $\langle a, b \rangle \in F$. Τότε όμως θα είχαμε $a \in \text{dom}(F)$, που δεν είναι δυνατό, διότι $\text{dom}(F) = O_R(a)$. ■

Παρατήρηση. Η διαζευξη στο παραπάνω θεώρημα είναι αποκλειστική. Λόγω της προτάσης 4, δεν είναι δυνατό να ισχύουν συγχρονως δύο από τις συνθήκες: $\langle A, R \rangle \prec \langle B, S \rangle$, $\langle A, R \rangle \approx \langle B, S \rangle$, και $\langle B, S \rangle \prec \langle A, R \rangle$.

Πορίσμα. Αν δύο σύνολα X, Y δεχονται καλές διαταξεις, τότε το X είναι

ισοπληθικό με κάποιο υποσύνολο του Y είτε το Y είναι ισοπληθικό με κάποιο υποσύνολο του X . Εχουμε δηλαδή

$$\text{card}(X) \leq \text{card}(Y) \vee \text{card}(Y) \leq \text{card}(X),$$

που σημαίνει ότι οι πληθικοί αριθμοί των συνολών X, Y συγκρίνονται.

5.4 Διατακτικοί αριθμοί.

Ο Cantor όρισε τους διατακτικούς αριθμούς ως διατακτικούς τύπους των καλά διατεταγμένων συνολών, δηλαδή ως αφηρημένους αντιπροσώπους για τις κλάσεις όμοιων καλών διαταξεών. Αναπτύξε μια πλούσια θεωρία των διατακτικών αριθμών. Η υπερπεπερασμένη επαγωγή πάνω στους διατακτικούς αριθμούς χρησιμοποιείται μέχρι σήμερα στις μαθηματικές αποδείξεις και κατασκευές συνολών.

Οι μαθηματικοί σταμάτησαν να έχουν επιφυλάξεις για αυτούς τους αφηρημένους "αριθμούς", όταν ο J. von Neumann (το 1929) έδωσε έναν κομψό ορισμό των διατακτικών αριθμών. Έδειξε ότι για κάθε καλά διατεταγμένο σύνολο $\langle A, R \rangle$ υπάρχει ακριβώς ένα μεταβατικό σύνολο T τέτοιο ώστε το $\langle A, R \rangle$ είναι όμοιο με το $\langle T, \in_T \rangle$. Έτσι κάθε καλή διαταξη είναι λοιπόν όμοια με τη σχέση του "ανηκειν" περιορισμένη σε ένα μεταβατικό σύνολο T , το οποίο μάλιστα βρίσκουμε με έναν ομοιομορφο, κατασκευαστικό τρόπο. Θα ορίσουμε ως διατακτικό τύπο $\overline{\langle A, R \rangle}$, του καλά διατεταγμένου συνόλου $\langle A, R \rangle$, το μοναδικό αυτό σύνολο T και θα δούμε ότι ικανοποιείται το αίτημα του Cantor:

$$\overline{\langle A, R \rangle} = \overline{\langle B, S \rangle} \iff \langle A, R \rangle \approx \langle B, S \rangle.$$

Παρακάτω θα ορίσουμε τους διατακτικούς αριθμούς ως σύνολα με τη μέθοδο του von Neumann. Ας δούμε πρώτα ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 3. Εστω $A = \{\frac{n}{n+1} : n \in \omega\}$, $\prec = \cap_{\mathbb{R}}(A \times A)$. Το $\langle A, \prec \rangle$ είναι όμοιο με το $\langle \omega, \in \rangle$. Για τον (μοναδικό) ισομορφισμό $f: A \xrightarrow[επι]{1-1} \omega$, έχουμε $f(0) = \emptyset$, $f(\frac{1}{2}) = \{\emptyset\}$, $f(\frac{2}{3}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ και γενικά

$$f(\frac{n}{n+1}) = n = \{0, 1, \dots, n-1\} = \{f(0), f(\frac{1}{2}), \dots, f(\frac{n-1}{n})\}.$$

Ισχύει δηλαδή $f(x) = \{f(y) : y \prec x\}$, για κάθε $x \in A$ (ασκήση 5.16).

Ορισμός. Εστω $\langle A, R \rangle$ καλά διατεταγμένο σύνολο. Ένα μεταβατικό σύνολο T λέγεται ε-εικόνα του $\langle A, R \rangle$, όταν $\langle A, R \rangle \approx \langle T, \in_T \rangle$. Ο μοναδικός ισομορφισμός $f: A \xrightarrow[επι]{1-1} T$, λέγεται ε-ισομορφισμός του $\langle A, R \rangle$.

Προτάση 6. Εστω T ε-εικόνα του $\langle A, \prec \rangle$. Ο ε-ισομορφισμός $f: A \xrightarrow[επι]{1-1} T$ έχει την ιδιότητα:

$$(\forall a \in A) f(a) = \{f(x) : x \prec a\}.$$

Αποδειξη: Εστω $a \in A$. Η f διατηρεί τις διαταξεις $<$ και $\in_T$, άρα για κάθε $x \in A$: $x < a \rightarrow f(x) \in f(a)$. Επομένως $\{f(x): x < a\} \subseteq f(a)$.

Ας υποθέσουμε ότι $t \in f(a)$. Λόγω μεταβατικότητας του T , έχουμε $t \in T$. Υπάρχει λοιπόν $x \in A$ (η f είναι επί του T) ώστε $t = f(x)$ και $f(x) \in_T f(a)$. Επεται ότι $x < a$ και συνεπώς $t \in \{f(x): x < a\}$. Άρα $f(a) \subseteq \{f(x): x < a\}$.

Αποδείξαμε ότι για κάθε $a \in A$ ισχύει: $f(a) = \{f(x): x < a\}$, που είναι το ζητούμενο. ■

Παρατήρηση. Αν T είναι ϵ -εικόνα του $\langle A, R \rangle$, τότε ο ϵ -ισομορφισμός του $\langle A, R \rangle$ δίδεται από

$$f(a) = f[O_R(a)] = \text{rng}(f \upharpoonright O_R(a)).$$

Παραδειγμα 4. Εστω $B = \{\frac{n}{n+1}: n \in \omega\} \cup \{1\}$. Θα βρούμε την ϵ -εικόνα του καλά διατεταγμένου συνόλου $\langle B, < \rangle$, όπου $< = <_{\mathbb{R}} \cap (B \times B)$. Ας υποθέσουμε ότι η f είναι ισομορφισμός των $\langle B, < \rangle$ και $\langle T, \in_T \rangle$. Τότε για κάθε $n \in \omega$ πρέπει να ισχύει (από την πρόταση 6): $f(\frac{n}{n+1}) = \{f(x): x < \frac{n}{n+1}\}$. Άρα $f(0) = \emptyset$. Ευκολά ελεγχουμε με επαγωγή ότι για κάθε $n \in \omega$: $f(\frac{n}{n+1}) = n$. Εχουμε ακόμα $f(1) = \omega$, αφού $f(1) = \{f(x): x < 1\} = \{f(\frac{n}{n+1}): n \in \omega\} = \{n: n \in \omega\} = \omega$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι αν T είναι ϵ -εικόνα του $\langle B, < \rangle$, πρέπει να ισχύει $T = \omega \cup \{\omega\}$. Η συνάρτηση f με $f(a) = \{f(x): x < a\}$ για $a \in B$, είναι ϵ -ισομορφισμός των $\langle B, < \rangle$ και $\langle \omega \cup \{\omega\}, \in_{\omega \cup \{\omega\}} \rangle$.

Αργότερα θα δούμε ότι για κάθε καλά διατεταγμένο σύνολο υπάρχει μια ϵ -εικόνα του. Τώρα θα αποδείξουμε την μοναδικότητα.

Πρόταση 7. Εστω $\langle A, < \rangle$ καλά διατεταγμένο σύνολο. Υπάρχει το πολύ μια ϵ -εικόνα του $\langle A, < \rangle$.

Αποδειξη: Εστω T, S μεταβατικά σύνολα. Ας υποθέσουμε ότι $f: A \xrightarrow{1-1} T$ και $g: A \xrightarrow{1-1} S$ είναι ϵ -ισομορφισμοί του $\langle A, < \rangle$. Θα αποδείξουμε ότι $f = g$ και συνεπώς $T = S$.

θεωρούμε το σύνολο $C = \{x \in A: f(x) = g(x)\}$. Χρησιμοποιώντας την Αρχή Υπερπεπερασμένης Επαγωγής, θα δείξουμε ότι $C = A$. Εστω $a \in A$ και $O(a) \subseteq C$. Τότε έχουμε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x < a$. Επεται ότι (πρόταση 6)

$$f(a) = \{f(x): x < a\} = \{g(x): x < a\} = g(a),$$

που σημαίνει ότι $a \in C$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι για κάθε $a \in A$: $O(a) \subseteq C \rightarrow a \in C$. Άρα $C = A$. Αυτό σημαίνει ότι $f = g$ και επομένως $T = S$. ■

Πορίσμα. Εστω ότι $\langle A, R \rangle, \langle B, S \rangle$ είναι καλά διατεταγμένα σύνολα με ϵ -είκο-
νες α και β , αντιστοιχα. Από την παραπάνω πρόταση επεται ότι:

$$\langle A, R \rangle \approx \langle B, S \rangle \leftrightarrow \alpha = \beta.$$

Ορισμός. Κάθε μεταβατικό σύνολο T που είναι καλά διατεταγμένο από τη σχέση $\in_T = \{ \langle x, y \rangle \in T \times T : x \in y \}$ λέγεται διατακτικός αριθμός.

Παραδειγμα 5. 1) Οι φυσικοί αριθμοί είναι διατακτικοί αριθμοί.

ii) Το σύνολο ω των φυσικών αριθμών είναι διατακτικός αριθμός.

iii) Αν το σύνολο α είναι διατακτικός αριθμός, τότε και το σύνολο $\cup\{\alpha\}$ είναι διατακτικός αριθμός (ασκήση 5.19). Ειδικά έχουμε ότι τα σύνολα:

$$\omega \cup \{\omega\}, \omega \cup \{\omega\} \cup \{\omega \cup \{\omega\}\}, \omega \cup \{\omega\} \cup \{\omega \cup \{\omega\} \cup \{\omega \cup \{\omega\}\}\}, \text{ κ.ο.κ.}$$

είναι διατακτικοί αριθμοί.

Οι διατακτικοί αριθμοί παραδοσιακά συμβολίζονται με μικρά γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου. Στη συνέχεια, αυτά τα γράμματα θα τα χρησιμοποιούμε μόνο για διατακτικούς αριθμούς. Έτσι λοιπόν, όταν θα γράφουμε $\Phi(\xi)$, θα εννοούμε: " ξ είναι διατακτικός αριθμός και $\Phi(\xi)$ ".

Παρατήρηση. Οι ϵ -εικόνες των καλά διατεταγμένων συνόλων είναι προφανώς διατακτικοί αριθμοί. Ισχύει και το αντιστρόφο, δηλαδή κάθε διατακτικός αριθμός α είναι ϵ -εικόνα ενός καλά διατεταγμένου συνόλου (του $\langle \alpha, \in_\alpha \rangle$). Οι διατακτικοί αριθμοί χαρακτηρίζονται λοιπόν ως οι ϵ -εικόνες των καλά διατεταγμένων συνόλων.

Ορισμός. Αν ο διατακτικός αριθμός α είναι ϵ -εικόνα ενός καλά διατεταγμένου συνόλου $\langle A, R \rangle$, τότε λέμε τον α διατακτικό αριθμό του $\langle A, R \rangle$ και γράφουμε $\overline{\langle A, R \rangle} = \alpha$. Λέμε επίσης ότι το $\langle A, R \rangle$ είναι καλή διαταξη τύπου α .

Το τελευταίο πορίσμα μας λέει ότι:

$$\langle A, R \rangle \approx \langle B, S \rangle \leftrightarrow \overline{\langle A, R \rangle} = \overline{\langle B, S \rangle},$$

δηλαδή ότι οι διατακτικοί αριθμοί μπορούν να θεωρηθούν διατακτικοί τύποι των καλά διατεταγμένων συνόλων.

Οι βασικές ιδιότητες των διατακτικών αριθμών προκύπτουν από τις γενικές ιδιότητες των καλών διαταξεών, που γνωρίσαμε νωρίτερα.

Προταση 8. Για οποιουδήποτε διατακτικούς αριθμούς α, β ισχύει:

$$\langle \alpha, \in_\alpha \rangle \approx \langle \beta, \in_\beta \rangle \leftrightarrow \alpha = \beta.$$

Προταση 9. Τα αρχικά τμήματα των διατακτικών αριθμών είναι διατακτικοί αριθμοί.

Αποδείξη: Εστω α διατακτικός αριθμός. Αν $X \subseteq \alpha$, τότε $\in_X = \in_\alpha \upharpoonright X^2$. Η σχέση

$\in_x$ είναι λοιπόν καλή διαταξη του X (ασκήση 5.1). Αρκεί να αποδείξουμε ότι αν X είναι αρχικό τμήμα του $\langle \alpha, \in_\alpha \rangle$, τότε είναι μεταβατικό σύνολο. Εστω $y \in X$ και $t \in y$. Τότε $y \in \alpha$ και συνεπώς $t \in \alpha$. Έχουμε λοιπόν $t \in_\alpha y$. Αν το X είναι αρχικό τμήμα του $\langle \alpha, \in_\alpha \rangle$, τότε πρέπει να ισχύει $t \in X$. ■

Προταση 10. Εστω α διατακτικός αριθμός. Για κάθε $x \in \alpha$ ισχύει:

$$O(x) = x.$$

Αποδειξη: Εστω $x \in \alpha$. Για κάθε $y \in x$ έχουμε:

$$y \in O(x) \leftrightarrow y \in_\alpha x \leftrightarrow y \in \alpha \wedge x \in y \leftrightarrow y \in x.$$

(η τελευταία ισοδυναμία ισχύει, διότι $x \in \alpha$ και το α είναι μεταβατικό).

Άρα $O(x) = x$. ■

Πορισμα 1. Κάθε διατακτικός αριθμός ταυτίζεται με το σύνολο των γνησιών αρχικών του τμημάτων.

Πορισμα 2. Τα στοιχεία των διατακτικών αριθμών είναι διατακτικοί αριθμοί.

Πορισμα 3. Εστω α, β διατακτικοί αριθμοί. Το $\langle \alpha, \in_\alpha \rangle$ είναι ομοίο με γνήσιο αρχικό τμήμα του $\langle \beta, \in_\beta \rangle$ εάν και μόνον εάν $\alpha \in \beta$.

Προταση 11. Για οποιουσδήποτε διατακτικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει:

- i) $\alpha \notin \alpha$.
- ii) $\alpha \in \beta \rightarrow \beta \notin \alpha$.
- iii) $\alpha \in \beta \wedge \beta \in \gamma \rightarrow \alpha \in \gamma$.
- iv) $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha$.

Αποδειξη: Το τελευταίο πορίσμα μας λέει ότι: $\alpha \in \beta \leftrightarrow \langle \alpha, \in_\alpha \rangle \prec \langle \beta, \in_\beta \rangle$. Τα ζητούμενα προκύπτουν λοιπόν από την προταση 5 και το Νομο Τριχοτομίας για τις καλές διαταξεις (σελίδα 92). ■

5.5 Συγκριση διατακτικών αριθμών.

Ορισμος. Εστω α, β διατακτικοί αριθμοί. Λέμε ότι ο α είναι μικροτερος από τον β και γράφουμε $\alpha < \beta$, όταν $\alpha \in \beta$. Λέμε ότι ο α είναι μικροτερος ή ίσος β και γράφουμε $\alpha \leq \beta$, όταν $\alpha < \beta$ ή $\alpha = \beta$.

Παρατηρησεις. 1) Το παραπάνω πορίσμα 3 μας λέει ότι για οποιουσδήποτε διατακτικούς αριθμούς α, β :

$$\alpha < \beta \leftrightarrow \langle \alpha, \in_\alpha \rangle \text{ είναι ομοίο με ένα γνήσιο αρχικό τμήμα του } \langle \beta, \in_\beta \rangle$$

$$(\text{δηλαδή όταν } \langle \alpha, \in_\alpha \rangle \prec \langle \beta, \in_\beta \rangle).$$

Αυτό σημαίνει ότι η ιδιότητα $<$, που ορίσαμε πιο πάνω, ταυτίζεται με την ιδιότητα $\prec$ των καλά διατεταγμένων συνόλων.

ii) Για τους φυσικούς αριθμούς η ιδιότητα $<$ συμφωνεί με τη διαταξη τους.

Η προταση 11 μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής.

Προταση 11'. Για οποιουσδήποτε διατακτικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει:

- i) $\neg(\alpha < \alpha)$.
- ii) $\alpha < \beta \rightarrow \neg(\beta < \alpha)$.
- iii) $\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \rightarrow \alpha < \gamma$.
- iv) $\alpha < \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta < \alpha$.

Αντιστοιχούς νόμους για την ιδιότητα $\leq$, εκφράζει η ασκήση 5.21.

Παρατήρηση. Ευκολά βλέπουμε ότι, για κάθε διατακτικό αριθμό α , η κλάση των διατακτικών αριθμών που είναι μικρότεροι από τον α είναι σύνολο.

Πραγματικά, έχουμε:

$$\{\xi: \text{"}\xi \text{ είναι διατακτικός αριθμός"} \wedge \xi < \alpha\} = \{\xi: \xi \in \alpha\} = \alpha.$$

Ξερούμε ότι για κάθε διατακτικό αριθμό α , το σύνολο $\alpha \cup \{\alpha\}$ είναι επίσης διατακτικός αριθμός (ασκήση 5.19). Δεχομαστε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός. Εστω α διατακτικός αριθμός. Ο διατακτικός αριθμός $\alpha \cup \{\alpha\}$ λέγεται επομένος του α και συμβολίζεται α' .

Παρατηρήσεις. Είναι φανερό ότι για κάθε διατακτικό αριθμό α ισχύει: $\alpha < \alpha'$. Ευκολά αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει διατακτικός αριθμός μεταξύ των α και α' , δηλαδή ο α' είναι άμεσα επομένος του α (ασκήση 5.22).

5.6 Σύνολα διατακτικών αριθμών

Προταση 12. Για κάθε σύνολο διατακτικών αριθμών A , η σχέση

$$<_A = \{ \langle x, y \rangle \in A^2 : x < y \}$$

είναι γραμμική διαταξη του A .

Αποδείξη: Από την προταση 11'. ■

Το επομένο είναι γνωστό ως Αρχή Ελάχιστου Διατακτικού Αριθμού.

Θεώρημα 4. Σε κάθε μη κενό σύνολο B διατακτικών αριθμών υπάρχει ο μικρότερος διατακτικός αριθμός.

Αποδείξη: Εστω α οποιοδήποτε στοιχείο του B . Θεωρούμε το σύνολο

$$C = B \cap \alpha = \{ \xi \in B : \xi < \alpha \}.$$

Αν $C = \emptyset$, τότε το α είναι το μικρότερο στοιχείο του B . Εστω ότι $C \neq \emptyset$. Το $\langle \alpha, \epsilon_\alpha \rangle$ είναι καλά διατεταγμένο σύνολο και $C \subseteq \alpha$. Άρα υπάρχει $\beta \in C$ που εί-

ναι ελαχιστο (ως προς τη διαταξη $\in_{\alpha}$). Για κάθε $\gamma \in \alpha$ έχουμε ότι: αν $\gamma \in \beta$, τότε $\gamma \in C$. Θα δείξουμε ότι το β είναι το μικρότερο στοιχείο του συνόλου B . Προφανώς $\beta \in B$. Αν $\gamma < \beta$, τότε επειδή το α είναι μεταβατικό και $\beta \in \alpha$, έχουμε ότι $\gamma \in \alpha$. Από την επιλογή του β επεται ότι $\gamma \notin C$, και συνεπώς $\gamma \notin B$. Αυτό σημαίνει ότι κανένας διατακτικός αριθμός μικρότερος από το β δεν ανήκει στο σύνολο B , δηλαδή το β είναι το μικρότερο στοιχείο του B . ■

Πορίσμα 1. Για κάθε σύνολο διατακτικών αριθμών A , η σχέση $<_A$ είναι καλή διαταξη του A .

Πορίσμα 2. Κάθε μεταβατικό σύνολο διατακτικών αριθμών A είναι διατακτικός αριθμός.

Αποδείξη: Για κάθε $\xi, \eta \in A$ ισχύει: $\xi < \eta \leftrightarrow \xi \in \eta$. Εχουμε λοιπόν ότι $<_A = \in_A$. Από το πορίσμα 1, έχουμε ότι το $\langle A, \in_A \rangle$ είναι καλά διατεταγμένο σύνολο. Επειδή το A είναι μεταβατικό σύνολο, είναι διατακτικός αριθμός. ■

Η Αρχή Ελαχιστου Διατακτικου Αριθμου διατυπώνεται και ως εξής.

Θεώρημα 5. Εστω Φ τύπος. Ας υποθέσουμε ότι $\exists \alpha \Phi(\alpha)$. Τότε

$$\exists \alpha (\Phi(\alpha) \wedge \forall \beta (\beta < \alpha \rightarrow \neg \Phi(\beta))).$$

Αποδείξη: Εστω α_0 οποιοσδήποτε διατακτικός αριθμός ώστε $\Phi(\alpha_0)$. Θεωρούμε το σύνολο $X = \{\xi \in \alpha_0 : \Phi(\xi)\}$. Αν $X = \emptyset$, τότε το α_0 είναι ο μικρότερος διατακτικός αριθμός που έχει την ιδιότητα Φ . Εχουμε τότε

$$\Phi(\alpha_0) \wedge \forall \beta (\beta < \alpha_0 \rightarrow \neg \Phi(\beta)).$$

Αν $X \neq \emptyset$, τότε παίρνοντας το μικρότερο στοιχείο του συνόλου X έχουμε:

$$\Phi(\alpha) \wedge \forall \beta (\beta < \alpha \rightarrow \neg \Phi(\beta)). \quad \blacksquare$$

Ορισμοί. Εστω B μη κενό σύνολο διατακτικών αριθμών. Με $\min B$ συμβολίζουμε το μικρότερο διατακτικό αριθμό που ανήκει στο B .

Εστω Φ τύπος. Εστω ότι $\exists \xi \Phi(\xi)$. Με $\min \xi : \Phi(\xi)$ συμβολίζουμε τον μικρότερο διατακτικό αριθμό που ικανοποιεί τον τύπο Φ .

Θεώρημα 6. Εστω A σύνολο διατακτικών αριθμών. Υπάρχει διατακτικός αριθμός που είναι μεγαλύτερος από όλα τα στοιχεία του A .

Αποδείξη: Η ένωση $\bigcup A$, ως μεταβατικό σύνολο διατακτικών αριθμών, είναι διατακτικός αριθμός (ασκήση 5.25). Εστω $\bigcup A = \beta$. Για κάθε $\xi \in A$ έχουμε $\xi \leq \beta$ (ασκήση 5.26). Ο διατακτικός αριθμός β είναι λοιπόν γνήσια μεγαλύτερος από όλα τα στοιχεία του συνόλου A . ■

Πορίσμα. Εστω A σύνολο διατακτικών αριθμών. Υπάρχει διατακτικός αριθμός που δεν ανήκει στο A . Υπάρχει λοιπόν (από την Αρχή Ελαχιστου) ο

μικροτερος διατακτικός αριθμός που δεν ανήκει στο A .

Ενα από τα πρώτα παραδοξά της αφελούς θεωρίας συνόλων διαπιστώθηκε το 1897 από τον Burali-Forti. Η χρησιμοποίηση του συνόλου όλων των διατακτικών αριθμών τον οδήγησε σε αντιφάση. Στις αξιωματικές θεωρίες συνόλων αποδεικνύεται απλώς ότι η κλάση των διατακτικών αριθμών είναι μια γνήσια κλάση. Ως συνέπεια του τελευταίου πορίσματος, έχουμε αμέσως το ακόλουθο.

Θεώρημα 7. Δεν υπάρχει σύνολο όλων των διατακτικών αριθμών.

Ορισμός. Για κάθε σύνολο διατακτικών αριθμών A ορίζουμε ως $\sup A$ τον μικρότερο διατακτικό αριθμό που είναι μεγαλύτερο από όλα τα στοιχεία του A .

Παρατηρήσεις. Εστω A σύνολο διατακτικών αριθμών.

Αν το β είναι μέγιστο στοιχείο του A , τότε $\sup A = \beta$.

Αν στο A δεν υπάρχει μέγιστο στοιχείο, τότε ο διατακτικός αριθμός $\alpha = \sup A$ είναι μεγαλύτερος από όλα τα στοιχεία του A και είναι ο μικρότερος διατακτικός αριθμός με αυτή την ιδιότητα. Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε λοιπόν $\sup A = \alpha$ (ασκήση 5.26).

Επίσης, για κάθε διατακτικό αριθμό ξ έχουμε $\sup \xi = \xi$.

Στην επομένη παραγραφο θα αποδείξουμε για κάθε καλά διατεταγμένο σύνολο υπάρχει η ϵ -εικόνα του. Στην αποδείξη θα χρησιμοποιήσουμε ένα αξιωματικό σχήμα της θεωρίας συνόλων ZF, που δεν γνωρίσαμε μέχρι τώρα.

5.7 Το σχήμα αντικατάστασης.

Το σχήμα αντικατάστασης προστέθηκε στα αξιώματα του Zermelo από τον A. Fraenkel το 1922. Είναι ισχυρότερο από το σχήμα υποσυνόλων (ασκήση 5.28) και θεωρείται βασικό για τη θεωρία συνόλων. Όπως θα δούμε, είναι διαισθητικά φανερό. Για να καταλάβουμε το νόημα του, εισαγούμε πρώτα μια βοηθητική έννοια.

Ορισμός. Εστω $\Phi(x, y)$ τύπος και x, y μεταβλητές. Λέμε ότι ο Φ ορίζει αντιστοιχισμό όταν

$$\forall x \exists ! y \Phi(x, y),$$

που σημαίνει ότι για κάθε x υπάρχει ακριβώς ένα y ώστε $\Phi(x, y)$.

Αν ο τύπος Φ ορίζει αντιστοιχισμό, τότε για κάθε x , το μοναδικό y για το οποίο ισχύει $\Phi(x, y)$, το λέμε Φ -παραδειγμα για το x .

Παραδειγμα 6. i) Στο κεφάλαιο 1 είδαμε ότι για κάθε σύνολο x υπάρχει και είναι μοναδικό το μονοσύνολο του. Άρα ο τύπος

$$y=\{x\}$$

ορίζει αντιστοιχισή.

Όμοια έχουμε ότι καθένας από τους τύπους: $y=P_x$, $y=\bigcup x$ ορίζει αντιστοιχισή.

ii) Στον τύπο $y=\emptyset$ δεν εμφανίζεται ως ελεύθερη μεταβλητή το x . Λόγω της μοναδικότητας του κενού συνόλου, έχουμε όμως $\forall x \exists! y (y=\emptyset)$. Επομένως ο τύπος $y=\emptyset$ ορίζει αντιστοιχισή.

iii) Θεωρούμε τον τύπο $\Phi(x,y)$:

" y είναι πρώτο μέλος του ζευγους x ",

δηλαδή τον: $\exists z (<y,z>=x)$. Ο τύπος $\Phi(x,y)$ δεν ορίζει αντιστοιχισή, διότι αν το x δεν είναι διατεταγμένο ζευγος, τότε δεν υπάρχει y με $\Phi(x,y)$. Όμως για τα x που είναι διατεταγμένα ζευγη, υπάρχει μοναδικό y τέτοιο ώστε $\Phi(x,y)$.

Μπορούμε να βρούμε έναν τύπο $\Phi^*(x,y)$ που ορίζει αντιστοιχισή και έχει το ίδιο νόημα με τον $\Phi(x,y)$ για εκείνα τα x που είναι διατεταγμένα ζευγη. Στα x που δεν είναι διατεταγμένα ζευγη, θα αντιστοιχεί ως παράδειγμα το $\emptyset$. Συγκεκριμένα, παίρνουμε ως $\Phi^*(x,y)$ τον τύπο:

$$\exists z (<y,z>=x) \vee (\neg \exists t \exists z (<t,z>=x)) \wedge y=\emptyset,$$

δηλαδή τον:

" y είναι πρώτο μέλος του ζευγους x " $\vee$

$\vee$ " x δεν είναι διατεταγμένο ζευγος και $y=\emptyset$ ".

Η άσκηση 5.29 εκφράζει μια γενίκευση της παραπάνω παρατήρησης.

Το αξιωματικό σχήμα αντικατάστασης του Fraenkel διατυπώνεται ως εξής.

A8. Σχήμα αντικατάστασης. Εστω ότι ο τύπος $\Phi(x,y)$ ορίζει αντιστοιχισή.

"Εστω A σύνολο. Υπάρχει ένα σύνολο B τέτοιο ώστε:

$$i) (\forall a \in A) (\exists b \in B) \Phi(a,b),$$

$$ii) (\forall b \in B) (\exists a \in A) \Phi(a,b)."$$

Υπάρχει δηλαδή ένα σύνολο B , στο οποίο ανήκουν τα Φ -παράδειγματα για όλα τα στοιχεία του A (συνθήκη i) και μόνον αυτά (συνθήκη ii).

Ορισμοί. Το παραπάνω σύνολο B , που για δοσμένο A είναι μοναδικό (από το αξίωμα εκτασης) συμβολίζεται

$$B=\{y: (\exists x \in A) \Phi(x,y)\}$$

το λέμε εικόνα του συνόλου A μέσω της αντιστοιχισής Φ .

Αν B είναι εικόνα του συνόλου A μέσω της αντιστοιχισής Φ , τότε

για κάθε y ισχύει:

$$y \in B \leftrightarrow (\exists x \in A) \Phi(x, y).$$

Το σχήμα αντικατάστασης είναι βασικό για τη θεωρία συνόλων. Εφαρμόζεται σε αποδείξεις υπάρξεως και για κατασκευές πολλών συνόλων. Είναι διαισθητικά αποδεκτό το γεγονός ότι αν σε κάθε στοιχείο ενός συνόλου A αντιστοιχεί ένα "παραδειγμα", τότε η συλλογή των "παραδειγμάτων" για όλα τα στοιχεία του A σχηματίζει σύνολο.

Παραδειγμα 7. i) Στο κεφάλαιο 1 δείξαμε ότι για οποιοδήποτε σύνολο A υπάρχει το σύνολο $\{\{x\}: x \in A\}$. Μια πιο συντομη δικαιολόγηση της υπάρξεως αυτού του συνόλου, μας δίνει το σχήμα αντικατάστασης. Ο τύπος $y = \{x\}$ προφανώς ορίζει αντιστοιχισμό. Αν το σύνολο B είναι η εικόνα του A μέσω αυτού του τύπου, τότε για κάθε y ισχύει:

$$y \in B \leftrightarrow (\exists x \in A) (y = \{x\}).$$

Συνεπώς έχουμε $B = \{\{x\}: x \in A\}$.

ii) Ομοία μπορούμε να αποδείξουμε ότι για κάθε σύνολο A υπάρχουν τα σύνολα $\{\cup x: x \in A\}$, $\{\cap x: x \in A\}$.

Προταση 13. Εστω Φ τύπος. Εστω A σύνολο. Ας υποθέσουμε ότι

$$(\forall x \in A) \exists! y \Phi(x, y).$$

Τότε υπάρχει μοναδικό σύνολο B τέτοιο ώστε για κάθε y :

$$y \in B \leftrightarrow (\exists x \in A) \Phi(x, y).$$

(δηλαδή $B = \{y: (\exists x \in A) \Phi(x, y)\}$).

Αποδείξη: Ο τύπος $\Phi(x, y)$ δεν ορίζει αναγκαστικά αντιστοιχισμό. Θα βρούμε όμως έναν τύπο $\Phi'(x, y)$ που:

i) ορίζει αντιστοιχισμό,

ii) για κάθε $x \in A$: $\Phi(x, y) \leftrightarrow \Phi'(x, y)$.

Τότε, από το σχήμα αντικατάστασης, θα έχουμε ότι υπάρχει το σύνολο

$$\{y: (\exists x \in A) \Phi'(x, y)\},$$

που (λόγω του ii) είναι το ζητούμενο σύνολο B .

Ως $\Phi'(x, y)$ αρκεί να πάρουμε τον τύπο

$$(x \in A \wedge \Phi(x, y)) \vee (x \notin A \wedge y = \emptyset).$$

Ευκολά ελεγχεται ότι ο $\Phi'(x, y)$ ικανοποιεί τις παραπάνω απαιτήσεις. ■

Παραδειγμα 8. Εστω C σύνολο. Αποδεικνύεται (με επαγωγή) ότι για κάθε $n \in \omega$, $n \geq 2$ υπάρχει η καρτεσιανή δύναμη C^n . Θετώντας επιπλέον $C^0 = \{\emptyset\}$ και $C^1 = C$, έχουμε: $(\forall n \in \omega) \exists! y (y = C^n)$. Αν και το C^ω δεν έχει το νόημα που θέλουμε για $x \in \omega$, με βάση την παραπάνω πρόταση, βλέπουμε ότι υπάρχει το

συνολο $\{C^n: n \in \omega\}$.

Ομοια δικαιολογείται και η υπαρξη του συνολου $\{<n, C^n>: n \in \omega\}$, δηλα-
δη της ακολουθιας $(C^n)_{n \in \omega}$.

Στην ασκηση 4.12 αποδεικνυεται οτι για καθε συνολο A υπαρχει το
συνολο $\text{Seq}(A)$ ολων των πεπερασμενων ακολουθιων με τιμες στο A . Χρησι-
μοποιώντας την προταση 13, μπορούμε να το δειξουμε απλουστερα. Για κα-
θε $n \in \omega$ το συνολο ${}^n A$ των ακολουθιων μηκους n με τιμες στο A ειναι μονα-
δικο. Επεται οτι υπαρχει το συνολο $\{{}^n A: n \in \omega\}$. Το $\text{Seq}(A)$ ειναι η ενωση
του τελευταιου συνολου.

Τωρα θα αποδειξουμε το βασικο θεωρημα αυτου του κεφαλαιου. Αυτο
μας λεει οτι καθε καλα διατεταγμενο συνολο ειναι ομοιο με εναν διατα-
κτικο αριθμο, συνεπως μας επιτρεπει να θεωρησουμε τους διατακτικους
αριθμους ως τυπους των καλα διατεταγμενων συνολων.

Θα διατυπωσουμε πρωτα ενα χρησιμο λημμα, του οποιου η αποδειξη
περιεχεται στην ασκηση 5.17.

Λημμα. Εστω οτι $\langle S, \in_S \rangle$ ειναι $\in$ -εικονα του καλα διατεταγμενου συνολου
 $\langle B, R \rangle$ και $f: B \xrightarrow{1-1} S$ ειναι ο $\in$ -ισομορφισμος. Τότε

i) Για καθε $b \in B$, το συνολο $f(b)$ ειναι $\in$ -εικονα του $O_R(b)$ (διατεταγ-
μενου απο την R).

ii) Καθε $y \in S$ ειναι $\in$ -εικονα ενος γνησιου αρχικου τμηματος του $\langle B, R \rangle$
(του $O_R(f^{-1}(y))$).

Θεωρημα 8. Εστω $\langle A, R \rangle$ καλα διατεταγμενο συνολο. Υπαρχει (μοναδικη)
 $\in$ -εικονα του $\langle A, R \rangle$.

Αποδειξη: Η μοναδικοτητα αποδειχθηκε στην προταση 7 (σελιδα 95).

Θεωρουμε το συνολο

$$C = \{x: \text{"υπαρχει η } \in\text{-εικονα του } O_R(x)\text{"}\}.$$

Το C ειναι αρχικο τμημα του $\langle A, R \rangle$. Πραγματικα, αν το $O_R(x)$ εχει $\in$ -ει-
κονα και $y R x$, (απο το i του λημματος) υπαρχει η $\in$ -εικονα του $O_R(x)$.

Η σχεση R ειναι καλη διαταξη του C . Θα δειξουμε οτι υπαρχει η $\in$ -
εικονα του C . Απο τον ορισμο του C , για καθε $x \in C$ υπαρχει (μοναδικο)
συνολο T_x , που ειναι $\in$ -εικονα του $O_R(x)$. Βασει του αξιωματικου σχημα-
τος αντικαταστασης (προταση 13), υπαρχει το συνολο $T = \{T_x: x \in C\}$.

Απο το ii του λημματος, επεται οτι το συνολο T ειναι μεταβατικο.
Πραγματικα, αν $y \in T_x$, τότε υπαρχει $z \in O_R(x)$ τετοιο ωστε $y = T_z$.

Το συνολο $F = \{\langle x, T_x \rangle: x \in C\}$ (υπαρχει απο το σχημα αντικαταστασης)
ειναι συναρτηση. Εχουμε $F: C \xrightarrow{\text{επι}} T$. Επειδη για $x \neq y$, τα τμηματα $O_R(x)$,

$O_R(y)$ δεν είναι ομοια (πορίσμα στη σελίδα 91), βλέπουμε ότι η F είναι 1-1. Από το λήμμα έχουμε επίσης ότι

$$yRx \leftrightarrow y \in O_R(x) \leftrightarrow T_y \in T_x.$$

Αυτό σημαίνει ότι η F είναι ϵ -ισομορφισμός. Συνεπώς, το T είναι ϵ -εικόνα του C .

Η απόδειξη θα ολοκληρωθεί, αν δείξουμε ότι $C=A$. Αν το C ήταν γνήσιο αρχικό τμήμα του $\langle A, R \rangle$, τότε για κάποιο $a \in A$ θα είχαμε $C = O_R(a)$. Παραπάνω δείξαμε ότι υπάρχει η ϵ -εικόνα του C . Από τον ορισμό του C , επεται λοιπόν ότι $a \in C$. Αυτό όμως είναι αδύνατο, διότι $a \notin O_R(a)$. ■

5.8 Ο αριθμός Hartogs.

Ορισμός. Λέμε ότι το σύνολο A κυριαρχείται από το σύνολο B , όταν το A είναι ισοπληθικό με κάποιο υποσύνολο του B , δηλαδή όταν υπάρχει συνάρτηση $f: A \xrightarrow{1-1} B$ (συγκρίνετε με τον ορισμό στη σελίδα 77).

Για δοσμένο σύνολο A θα εξετάσουμε τους διατακτικούς αριθμούς που κυριαρχούνται από το A . Είναι προφανές ότι αν ο διατακτικός αριθμός ξ κυριαρχείται από το A και $\eta < \xi$, τότε και ο η κυριαρχείται από το A . Θα δείξουμε ότι οι διατακτικοί αριθμοί που κυριαρχούνται από το σύνολο A αποτελούν σύνολο.

Λήμμα. Εστω A σύνολο. Οι ϵ -εικόνες των υποσυνολών του A που δεχονται καλή διαταξη σχηματίζουν σύνολο.

Απόδειξη: Εστω R μια καλή διαταξη με $\text{fld}(R) = B \subseteq A$. Υπάρχει ακριβώς ένας διατακτικός αριθμός ξ_R που είναι ϵ -εικόνα του $\langle B, R \rangle$.

Θεωρούμε το σύνολο

$$X = \{R \in \mathcal{P}(A \times A) : "R \text{ είναι σχέση καλής διαταξης"}\}.$$

Από το σχήμα αντικατάστασης επεται ότι υπάρχει το σύνολο $Y = \{\xi_R : R \in X\}$.

Για κάθε υποσύνολο B του A που δεχεται μια καλή διαταξη, έχουμε ότι η ϵ -εικόνα του $\langle B, R \rangle$ ανηκει στο σύνολο Y . ■

Θεώρημα 9 (Hartogs). Για κάθε σύνολο A υπάρχει διατακτικός αριθμός που δεν κυριαρχείται από το A .

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε ότι αν ένας διατακτικός αριθμός κυριαρχείται από το A , τότε είναι ϵ -εικόνα ενός καλά διατεταχμένου υποσυνόλου του A . Τότε, με βάση το λήμμα, θα έχουμε ότι υπάρχει το σύνολο όλων των διατακτικών αριθμών που κυριαρχούνται από το A . Υπάρχει λοιπόν (θεώρημα 6) διατακτικός αριθμός που δεν κυριαρχείται από το A .

Ας υποθέσουμε ότι ο διατακτικός αριθμός ξ κυριαρχείται από το A .

Τότε υπάρχει συνάρτηση $f: \xi \xrightarrow{1-1} A$. Για το $B = \text{rng}(f)$ έχουμε $f: \xi \xrightarrow{1-1} B$. Η συνάρτηση f ορίζει στο B μια σχέση καλής διατάξης ως εξής:

$$x R_f y \leftrightarrow f^{-1}(x) < f^{-1}(y).$$

Η f είναι προφανώς ισομορφισμός των $\langle \xi, \epsilon_\xi \rangle$ και $\langle B, R_f \rangle$. Συνεπώς το ξ είναι ϵ -εικόνα του $\langle B, R_f \rangle$ (με ϵ -ισομορφισμό τη συνάρτηση f^{-1}).

Δειξάμε ότι το ξ είναι ϵ -εικόνα ενός καλά διατεταγμένου υποσυνόλου του A . ■

Πορίσμα. Για κάθε σύνολο A υπάρχει ο μικρότερος διατακτικός αριθμός που δεν κυριαρχείται από το A .

Ορισμός. Ο μικρότερος διατακτικός αριθμός που δεν κυριαρχείται από το σύνολο A λέγεται αριθμός Hartogs του A και συμβολίζεται με $H(A)$. Έχουμε δηλαδή

$$H(A) = \min \xi: \xi \text{ δεν κυριαρχείται από το } A.$$

Συμφώνα με τα παραπάνω, υπάρχουν διατακτικοί αριθμοί που δεν κυριαρχούνται από το ω . Ο μικρότερος από αυτούς συμβολίζεται με ω_1 . Δηλαδή έχουμε $\omega_1 = H(\omega)$.

Ο Cantor συμβολίζει Ω το σύνολο όλων των διατακτικών αριθμών που είναι το πολύ αριθμησιμοί. Στοιχεία του Ω είναι λοιπόν ακριβώς οι διατακτικοί αριθμοί που κυριαρχούνται από το ω . Έπεται ότι $\Omega = \omega_1$ (ασκήση 5.31i).

Τον πληθικό αριθμό του συνόλου ω_1 τον συμβολίζουμε $\aleph_1$.

Επειδή $\omega < \omega_1$ και το ω_1 δεν είναι αριθμησιμο, έχουμε:

$$\aleph_0 < \aleph_1.$$

Αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει πληθικός αριθμός μεταξύ του $\aleph_0$ και του $\aleph_1$, δηλαδή ότι αν $m < \aleph_1$, τότε $m \leq \aleph_0$ (ασκήση 5.32). Συνεπώς ο πληθικός αριθμός $\aleph_1$ είναι αμέσως επόμενος του $\aleph_0$.

5.9 Οριακοί διατακτικοί αριθμοί. Πράξεις με διατακτικούς αριθμούς.

Ορισμός. Ένας διατακτικός αριθμός λέγεται οριακός όταν δεν είναι επόμενος κανενός διατακτικού αριθμού.

Παρατήρηση. Αν το λ είναι οριακός διατακτικός αριθμός, τότε στο λ δεν υπάρχει μέγιστο (ως προς τη διατάξη ϵ_λ) στοιχείο.

Παραδειγμα 9. i) Το 0 είναι οριακός διατακτικός αριθμός.

ii) Ο μικρότερος απείρος οριακός διατακτικός αριθμός είναι το ω .

iii) Ορίζουμε αναδρομικά: $\omega + 0 = \omega$, $\omega + (n+1) = (\omega + n)'$ (για $n \in \omega$). Έχουμε

δηλαδή: $\omega + n = \omega', \dots$ (n φορές). Βάσει του αξιωματικού σχήματος αντικατάστασης, υπάρχει το σύνολο $\bigcup \{\omega + n : n \in \omega\}$. Αυτό είναι μεταβατικό σύνολο διατακτικών αριθμών, άρα είναι διατακτικός αριθμός. Τον συμβολίζουμε με $\omega + \omega$. Για κάθε διατακτικό αριθμό $\xi \in \omega + \omega$, έχουμε $\xi' \in \omega + \omega$. Αυτό σημαίνει ότι το $\omega + \omega$ δεν είναι επομένος κανενός διατακτικού αριθμού, δηλαδή ότι είναι οριακός διατακτικός αριθμός.

Ο διατακτικός αριθμός $\omega + \omega$, που ορίσαμε πιο πάνω είναι ο διατακτικός τύπος του "αθροίσματος" δύο καλών διαταξεών τύπου ω . Η άσκηση 5.9 μας λέει πως μπορούμε να ορίσουμε μια πράξη προσθήκης καλών διαταξεών. Το άθροισμα $\langle A, R \rangle + \langle B, S \rangle$ δύο καλά διατεταγμένων συνόλων $\langle A, R \rangle$ και $\langle B, S \rangle$ είναι ένα καλά διατεταγμένο σύνολο του οποίου ο διατακτικός τύπος εξαρτάται μόνο από τους διατακτικούς τύπους των $\langle A, R \rangle$, $\langle B, S \rangle$. Συνεπώς, ορίζεται μια πράξη προσθήκης διατακτικών αριθμών. Συγκεκριμένα, το $\alpha + \beta$ είναι ο διατακτικός τύπος του αθροίσματος δύο καλά διατεταγμένων συνόλων τύπου α και β .

Αποδεικνύεται ότι η προσθήκη των διατακτικών αριθμών είναι προσεταιριστική πράξη. Ας προσεξουμε όμως ότι δεν είναι αντιμεταθετική. Έχουμε π.χ. $1 + \omega = \omega$ και $\omega + 1 \neq \omega$ (άσκηση 5.10), άρα $\omega + 1 \neq 1 + \omega$.

Για οποιαδήποτε καλά διατεταγμένα σύνολα $\langle A, R \rangle$, $\langle B, S \rangle$, η αντίλεξικογραφική διαταξη του καρτεσιανού γινομένου $A \times B$ είναι μια καλή διαταξη του (άσκηση 5.13). Έτσι προκύπτει ένα καλά διατεταγμένο σύνολο $\langle A, R \rangle \cdot \langle B, S \rangle$, του οποίου ο διατακτικός τύπος εξαρτάται μόνο από τους διατακτικούς τύπους των $\langle A, R \rangle$ και $\langle B, S \rangle$. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε μια πράξη πολλαπλασιασμού διατακτικών αριθμών. Το γινομένο $\alpha \cdot \beta$ είναι ο διατακτικός τύπος του καλά διατεταγμένου συνόλου $\langle \alpha, \in_\alpha \rangle \cdot \langle \beta, \in_\beta \rangle$.

Ο πολλαπλασιασμός των διατακτικών αριθμών είναι προσεταιριστική πράξη. Δεν είναι όμως αντιμεταθετική. Ευκόλα ελέγχεται ότι $2 \cdot \omega = \omega$, ενώ $\omega \cdot 2 \neq \omega + \omega$. Έχουμε λοιπόν $2 \cdot \omega \neq \omega + \omega$.

Οι παραπάνω πράξεις με διατακτικούς αριθμούς ορίζονται και με άλλον τρόπο. Χρησιμοποιώντας την Αρχή Υπερπερασμένης Αναδρομής, που θα γνωρίσουμε πιο κάτω, μπορούμε να ορίσουμε την προσθήκη $+$ και τον πολλαπλασιασμό $\cdot$ των διατακτικών αριθμών, έτσι ώστε να συμφωνούν με τις πράξεις που περιγράψαμε παραπάνω. Δεν θα ασχοληθούμε περισσότερο μ' αυτές τις πράξεις. Θα σημειώσουμε μόνο μερικές ιδιότητες τους.

Για οποιονδήποτε διατακτικό αριθμό α , ο αριθμός $\alpha + 1$ είναι ο άμεσως επομένος του α . Έχουμε δηλαδή $\alpha' = \alpha + 1$.

Η προσθήκη και ο πολλαπλασιασμός, περιορισμένοι στους φυσικούς αριθμούς, συμφωνούν με τις γνωστές πράξεις στο ω .

Οι διατακτικοί αριθμοί:

$$\omega + \omega, \omega + \omega + \omega, \omega + \omega + \omega + \omega \quad \text{κ.ο.κ.}$$

$$\omega \cdot \omega, \omega \cdot \omega \cdot \omega, \omega \cdot \omega \cdot \omega \cdot \omega \quad \text{κ.ο.κ.}$$

είναι οριακοί διατακτικοί αριθμοί. Ο μικρότερος μη αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός ω_1 είναι επίσης οριακός. Το τελευταίο προκύπτει ευκολά π.χ. από την άσκηση 5.33.

5.10 Υπερπεπερασμένες ακολουθίες. Αρχή Υπερπεπερασμένης Αναδρομής.

Ορισμός. Υπερπεπερασμένη ακολουθία λέμε κάθε συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού έναν διατακτικό αριθμό. Μήκος μιας υπερπεπερασμένης ακολουθίας λέμε το πεδίο ορισμού της. Μια υπερπεπερασμένη ακολουθία x μήκους α συμβολίζεται ως

$$\langle x_\xi : \xi < \alpha \rangle \quad \text{ή} \quad (x_\xi)_{\xi < \alpha}.$$

Παρατηρήσεις. Οι πεπερασμένες ακολουθίες και οι απείρες ακολουθίες μήκους ω είναι προφανώς υπερπεπερασμένες ακολουθίες. Η έννοια της υπερπεπερασμένης ακολουθίας είναι λοιπόν μια γενίκευση της γνωστής έννοιας ακολουθίας.

Ας σημειώσουμε ότι αν f είναι μια υπερπεπερασμένη ακολουθία με μήκος α , τότε έχουμε $\text{dom}(f) = \{\xi : \xi < \alpha\}$ και $\text{rng}(f) = \{f_\xi : \xi < \alpha\}$.

Είναι επίσης φανερό ότι αν f είναι μια υπερπεπερασμένη ακολουθία με μήκος α και $\beta < \alpha$, τότε ο περιορισμός $f \upharpoonright \beta$ της f στο β είναι μια υπερπεπερασμένη ακολουθία μήκους β .

Παραδειγμα 10. Στο παραδειγμα 4 (σελίδα 95) βρήκαμε τον ισομορφισμό f του συνόλου $B = \{\frac{n}{n+1} : n \in \omega\} \cup \{1\}$, που είναι καλά διατεταγμένο από τη σχέση $<_{\mathbb{R}} \cap (B \times B)$, με τον διατακτικό αριθμό $\omega \cup \{\omega\}$. Επειδή $f : B \xrightarrow{\frac{1-1}{\varepsilon \pi \iota}} \omega \cup \{\omega\}$, η αντιστροφή συνάρτηση $f^{-1} : \omega \cup \{\omega\} \xrightarrow{\frac{1-1}{\varepsilon \pi \iota}} B$, δίνει μια "αριθμηση" του συνόλου B . Ως δείκτες χρησιμοποιούνται οι φυσικοί αριθμοί και το ω , δηλαδή οι διατακτικοί αριθμοί που είναι μικρότεροι από το $\omega+1$. Η f^{-1} είναι λοιπόν μια υπερπεπερασμένη ακολουθία μήκους $\omega+1$.

Η ακολουθία προταση γενικεύει το παραπάνω παραδειγμα και μας δίνει έναν χαρακτηρισμό των συνόλων που δεχονται μια καλή διατάξη.

Προταση 14. Εστω A σύνολο. Το A είναι πεδίο τιμών μιας αμφιμονοσημαντής υπερπεπερασμένης ακολουθίας αν και μόνο αν υπάρχει μια καλή διατάξη του A .

Αποδειξη: ($\rightarrow$) Εστω ότι $g=(g_\xi)_{\xi<\alpha}$ είναι μια αμφιμονοσημαντη υπερπεπερασμένη ακολουθία με $\text{rng}(g)=A$. Τότε έχουμε $g:\alpha \xrightarrow[\text{επ}]{1-1} A$. Η καλή διαταξη του α μεταφέρεται από την g στο A ως εξής:

$$xRy \leftrightarrow g^{-1}(x) < g^{-1}(y).$$

Η σχέση R είναι μια καλή διαταξη του A . Αποδείξαμε λοιπόν το ($\rightarrow$). Ας σημειώσουμε επιπλέον ότι το $\langle A, R \rangle$ είναι καλά διατεταγμένο σύνολο τυπου α . Πραγματικά, η συναρτηση g^{-1} είναι ϵ -ισομορφισμος του $\langle A, R \rangle$ με το α .

Για να δείξουμε το ($\leftarrow$), ας υποθέσουμε ότι R είναι μια καλή διαταξη του A . Εστω ότι α είναι η ϵ -εικονα του $\langle A, R \rangle$ και f ο ϵ -ισομορφισμος. Τότε $f^{-1}:\alpha \xrightarrow[\text{επ}]{1-1} A$, δηλαδή η f^{-1} είναι μια αμφιμονοσημαντη υπερπεπερασμένη ακολουθία με πεδίο τιμών το σύνολο A . ■

Θα αποδείξουμε τώρα το σημαντικότερο θεώρημα της θεωρίας των διατακτικών αριθμών, που είναι γνωστό ως Αρχή Υπερπεπερασμένης Αναδρομής. Αυτό μας επιτρέπει να ορίζουμε υπερπεπερασμένες ακολουθίες, στις οποίες κάθε όρος εξαρτάται από τους προηγούμενους μέσω μιας προκαθορισμένης αντιστοιχισής.

Θεώρημα 10 (Αρχή Υπερπεπερασμένης Αναδρομής).

Εστω ότι ο τυπος Φ ορίζει αντιστοιχισή. Για κάθε διατακτικό αριθμό α υπάρχει ακριβώς μια υπερπεπερασμένη ακολουθία f με μήκος α τέτοια ώστε

$$(\forall \xi < \alpha) \Phi(f \upharpoonright \xi, f(\xi)),$$

δηλαδή για κάθε $\xi < \alpha$:

$$f(\xi) = \text{"το μοναδικό } y \text{ ώστε } \Phi(f \upharpoonright \xi, y)\text{"}.$$

Για να καταλάβουμε καλύτερα την αποδειξη του θεωρήματος, θα διατυπώσουμε πρώτα μερικά λήμματα. Ας συμβολίσουμε $\Theta(\alpha, f)$ τον τυπο:

$$\text{"} f \text{ είναι υπερπεπερασμένη ακολουθία μήκους } \alpha \text{"} \wedge (\forall \xi < \alpha) \Phi(f \upharpoonright \xi, f(\xi)).$$

Λήμμα 1. $\Theta(\beta, g) \wedge \gamma < \beta \rightarrow \Theta(\gamma, g \upharpoonright \gamma)$.

Λήμμα 2. $\Theta(\beta, g) \wedge \Theta(\beta, h) \rightarrow g = h$.

Αποδειξη: Ας υποθέσουμε ότι $g \neq h$. Τότε υπάρχει $\xi < \beta$ ώστε $g(\xi) \neq h(\xi)$. Εστω $\eta = \min \xi: g(\xi) \neq h(\xi)$. Τότε έχουμε $g(\eta) \neq h(\eta)$ και για κάθε $\xi < \eta$: $g(\xi) = h(\xi)$, δηλαδή $g \upharpoonright \eta = h \upharpoonright \eta$. Επειδή όμως ισχύει $\Phi(g \upharpoonright \eta, g(\eta)) \wedge \Phi(h \upharpoonright \eta, h(\eta))$ και ο τυπος Φ ορίζει αντιστοιχισή, επεται ότι πρέπει $g(\eta) = h(\eta)$. Αποπο. ■

Λήμμα 3. $\Theta(\beta, g) \wedge \Theta(\gamma, h) \wedge \beta < \gamma \rightarrow g = h \upharpoonright \beta$.

Λήμμα 4. Εστω $\Theta(\gamma, g)$ και $\Phi(g, y)$. Τότε ισχύει $\Theta(\gamma+1, g \cup \{\langle \gamma, y \rangle\})$.

Λήμμα 5. Εστω λ οριακός διατακτικός αριθμός. Ας υποθέσουμε ότι για κα-

θε $\gamma < \lambda$ υπάρχει g τέτοιο ώστε $\Theta(\gamma, g)$. Τότε υπάρχει f ώστε $\Theta(\lambda, f)$.

Αποδείξη: Για $\xi < \lambda$, συμβολίζουμε g_ξ τη μοναδική (λόγω του λημματος 2) συναρτησή για την οποία ισχύει $\Theta(\xi, g_\xi)$. Απο το λήμμα 1 επεται οτι για καθε $\gamma < \beta < \lambda$ εχουμε $g_\gamma = g_\beta \upharpoonright \gamma$, αρα $g_\gamma \leq g_\beta$. Συνεπως, η ενωση

$$g = \bigcup \{g_\xi : \xi < \lambda\}$$

ειναι συναρτηση, που για καθε $\xi < \lambda$ επεκτεινει την g_ξ (ασκηση 2.14).

Θα αποδειξουμε οτι ισχυει $\Theta(\lambda, g)$. Η g ειναι μια υπερπεπερασμενη ακολουθια μηκους λ , διοτι $\text{dom}(g) = \bigcup \{\text{dom}(g_\xi) : \xi < \lambda\} = \bigcup \lambda = \lambda$. Αρκει λοιπον να ελεγχουμε οτι για καθε $\xi < \lambda$ ισχυει $\Phi(g \upharpoonright \xi, g(\xi))$.

Εστω $\xi < \lambda$. Εχουμε $\xi + 1 < \lambda$, αφου το λ ειναι οριακος διατακτικος αριθμος. Λογω της υποθεσης $\Theta(\xi + 1, g_{\xi+1})$, ισχυει $\Phi(g \upharpoonright \xi + 1, g(\xi + 1))$. Επειδη ομως $g_{\xi+1} \leq g$, επεται οτι $g_{\xi+1}(\xi) = g(\xi)$ και $g_{\xi+1} \upharpoonright \xi = g \upharpoonright \xi$. Συνεπως εχουμε $\Phi(g \upharpoonright \xi, g(\xi))$. ■

Αποδειξη του θεωρηματος: Η μοναδικοτητα επεται απο το λήμμα 2. Για να αποδειξουμε την υπαρξη της ζητουμενης υπερπεπερασμενης ακολουθιας f , θεωρουμε το συνολο

$$\{\xi \in \alpha : (\exists g) \Theta(\xi, g)\}.$$

Αυτο, βασει του λημματος 1, ειναι ενα αρχικο τμημα του α . Αρα εχουμε $\{\xi \in \alpha : (\exists g) \Theta(\xi, g)\} = \beta$, για καποιον διατακτικο αριθμο $\beta \leq \alpha$. Για καθε $\xi < \beta$ υπαρχει λοιπον μοναδικο g_ξ ωστε $\Theta(\xi, g_\xi)$. Εφαρμοζοντας το λήμμα 4 (αν το β ειναι επομενος καποιου διατακτικου αριθμου) ή το λήμμα 5 (οταν το β ειναι οριακος διατακτικος αριθμος), εχουμε οτι:

$$(*) \quad (\exists f) \Theta(\beta, f).$$

Παρατηρουμε οτι $\beta = \alpha$. Πραγματικα, αν ηταν $\beta < \alpha$, τοτε απο τον ορισμο του β και τη συνθηκη (*), θα ειχαμε $\beta \in \{\xi \in \alpha : (\exists g) \Theta(\xi, g)\}$. Θα ηταν δηλαδη $\beta \in \beta$, που ειναι αδυνατο.

Αφου $\beta = \alpha$, η συνθηκη (*) σημαινει ακριβως οτι υπαρχει υπερπεπερασμενη ακολουθια f μηκους α , τετοια που για καθε $\xi < \alpha$ ισχυει:

$$f(\xi) = \text{"το μοναδικο } \gamma \text{ ωστε } \Phi(f \upharpoonright \xi, \gamma)\text{"}. \quad \blacksquare$$

Ορισμος. Με $X^{<\alpha}$ συμβολιζουμε το συνολο ολων των υπερπεπερασμενων ακολουθιων με μηκος μικροτερο απο α . Με $X^{\leq \alpha}$ συμβολιζουμε το συνολο ολων των υπερπεπερασμενων ακολουθιων με μηκος το πολυ α και τιμές στο X .

Παρατηρησεις. Η Αρχη Υπερπεπερασμενης Αναδρομης μπορεί να εφαρμοστεί και με τυπους που δεν οριζουν αντιστοιχιση (με την εννοια του ορισμου στη σελιδα 100). Αρκει μονο να ξερουμε οτι για καθε υπερπεπερασμενη α -

κολουθία g με μήκος μικρότερο από α , υπάρχει ακριβώς ένα y τέτοιο ώστε $\Phi(g, y)$.

Στην απόδειξη του θεωρήματος 10, μόνο για τέτοιες g χρειαστήκαμε την υπαρξη μοναδικού Φ -παραδείγματος.

Μπορούμε να απαιτήσουμε και λιγότερο. Αρκεί, για ένα δοσμένο σύνολο X , να έχουμε:

$$(\forall g \in X^{<\alpha})(\exists! y \in X) \Phi(g, y)$$

Τότε υπάρχει μοναδική υπερπεπερασμένη ακολουθία $f: \alpha \rightarrow X$ τέτοια που

$$(\forall \xi < \alpha) f(\xi) = \text{"το μοναδικό } y \text{ ώστε } \Phi(f \upharpoonright \xi, y)\text{"}.$$

Η δικαιολογήση είναι ομοία με την απόδειξη της προτάσης 13 (σελίδα 102). Σ' αυτή την περίπτωση, ο τύπος Φ ορίζει μια συνάρτηση

$$h: X^{<\alpha} \rightarrow X$$

ώστε

$$(\forall \xi < \alpha) (f(\xi) = h(f \upharpoonright \xi)).$$

Στις εφαρμογές, οι ορισμοί με υπερπεπερασμένη αναδρομή έχουν συνήθως μια ειδική μορφή. Λόγω διαφορετικής φύσεως των οριακών διατακτικών αριθμών από αυτούς που είναι επομενοί, αλλιώς ορίζονται οι όροι με οριακό δείκτη και αλλιώς οι όροι που έχουν δείκτη έναν επομένο διατακτικό αριθμό. Χρησιμοποιούνται στον ορισμό δυο τύποι Φ_1 και Φ_2 . Κάθε όρος μορφής $f(\xi+1)$ εξαρτάται μόνον από τον αμέσως προηγούμενο, δηλαδή από τον $f(\xi)$, μέσω του τύπου Φ_1 . Οι όροι με οριακό δείκτη εξαρτώνται από όλους τους προηγούμενους μέσω του τύπου Φ_2 . Τέτοιοι ορισμοί έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$f(\xi+1) = \text{"το μοναδικό } y \text{ ώστε } \Phi_1(f(\xi), y)\text{"},$$

$$f(\lambda) = \text{"το μοναδικό } y \text{ ώστε } \Phi_2(f \upharpoonright \lambda, y)\text{"} \quad (\text{για οριακό } \lambda).$$

Στην περίπτωση $\alpha = \omega$ έχουμε έναν ορισμό μορφής:

$$(\forall n \in \omega) f(n+1) = \text{"το μοναδικό } y \text{ ώστε } \Phi_1(f(n), y)\text{"},$$

δηλαδή έναν συνηθισμένο αναδρομικό ορισμό στους φυσικούς αριθμούς.

Η Αρχή Υπερπεπερασμένης Αναδρομής για $\alpha = \omega$ μας δίνει τη λεγόμενη ισχυρή μορφή αναδρομής στους φυσικούς αριθμούς. Μας επιτρέπει να ορίζουμε αναδρομικές ακολουθίες στις οποίες ο κάθε όρος εξαρτάται από όλους τους προηγούμενους. Μπορούμε π.χ., για ένα δοσμένο σύνολο X και μια συνάρτηση $h: X^{<\omega} \rightarrow X$, να ορίσουμε αναδρομικά για κάθε $n \in \omega$:

$$f(n) = h(\langle f(k) : k < n \rangle).$$

Τότε έχουμε $f(0) = h(\emptyset)$, $f(1) = h(\langle f(0) \rangle)$, $f(2) = h(\langle f(0), f(1) \rangle)$ κ.ο.κ. Γενικά $f(n+1) = h(\langle f(0), f(1), \dots, f(n) \rangle)$.

As δουμε μερικα παραδειγματα ορισμων με υπερπεπερασμενη αναδρομη.

Παραδειγμα 11. i) Για πω οριζουμε αναδρομικα:

$$R_0 = \emptyset,$$

$$R_{n+1} = \mathcal{P}R_n.$$

Ετσι ορισαμε μια ακολουθια $(R_n)_{n < \omega}$. Η ενωση $\bigcup \{R_n : n < \omega\}$ ειναι το λεγομενο συνολο διαδοχικα πεπερασμενων συνολων.

ii) Θετοντας

$$R_\omega = \bigcup_{n < \omega} R_n,$$

οριζουμε μια υπερπεπερασμενη ακολουθια μηκους $\omega+1$ που επεκτεινει την $(R_n)_{n < \omega}$.

As σημειωσουμε οτι ο ορος R_ω εχει διαφορετικο ορισμο απο τους ορους R_n για $n < \omega$. Εχουμε

$$R_{n+1} = \text{"το δυναμοσυνολο του } R_n \text{"} = \text{"το μοναδικο } \gamma \text{ ωστε } \gamma = \mathcal{P}R_n \text{"},$$

$$R_\omega = \text{"η ενωση της οικογενειας } (R_n)_{n < \omega} \text{"} =$$

$$\text{"το μοναδικο } \gamma \text{ ωστε } \gamma = \bigcup_{n < \omega} R_n \text{"}.$$

iii) Μπορουμε τον παραπανω ορισμο να τον επεκτεινουμε και να εχουμε υπερπεπερασμενη ακολουθια μηκους $\omega+1$, $\omega+2$, κ.ο.κ. Γενικα, για οποιονδηποτε διατακτικο αριθμο α οριζουμε για $\xi < \alpha$:

$$R_{\xi+1} = \mathcal{P}R_\xi,$$

$$R_\xi = \bigcup_{\eta < \xi} R_\eta \quad (\text{για οριακο } \xi).$$

As σημειωσουμε ακομα οτι για το 0, που ειναι οριακος διατακτικος αριθμος, εχουμε $R_0 = \bigcup \{R_\eta : \eta < 0\} = \bigcup \emptyset = \emptyset$.

Παραδειγμα 12. i) Ο αναδρομικος ορισμος της προσθεσης φυσικων αριθμων (σελιδα 54) μπορει να γενικευθει ως εξης. Για οποιονδηποτε διατακτικο αριθμο η (το η ειναι παραμετρος στον ορισμο) θετουμε:

$$\eta+0=\eta,$$

$$\eta+(n+1)=(\eta+n)+1.$$

Ετσι ορισαμε την ακολουθια $(\eta, \eta+1, \eta+2, \dots)$, δηλαδη την $(\eta+n)_{n < \omega}$.

ii) Ο διατακτικος αριθμος $\eta+\omega$ μπορει να οριστεί ως "οριο" της παραπανω ακολουθιας. Συγκεκριμενα, θετουμε:

$$\eta+\omega = \sup\{\eta+n : n < \omega\},$$

ή ισοδυναμα (ασκηση 5.36):

$$\eta+\omega = \bigcup_{n < \omega} \eta+n.$$

As παρατηρησουμε οτι το παραπανω ειναι μια γενικευση του ορισμου του αριθμου $\omega+\omega$, που δοθηκε στο παραδειγμα 9iii (σελιδα 105). Ευκολα μπορουμε να ελεγχουμε οτι το $\eta+\omega$ ειναι ο διατακτικος τυπος του αθροι-

σματος των διατακτικών αριθμών η και ω , όπως αυτό ορίζεται στην άσκηση 5.9.

iii) Γενικά, για οποιουδήποτε διατακτικούς αριθμούς α και β , μπορούμε να ορίσουμε το άθροισμα $\alpha + \beta$ με υπερπεπερασμένη αναδρομή ως προς το β (με παράμετρο το α). Θετούμε:

$$(1) \quad \alpha + 0 = \alpha,$$

$$(2) \quad \alpha + (\xi + 1) = (\alpha + \xi) + 1,$$

$$(3) \quad \alpha + \lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} \alpha + \xi \quad (\text{για οριακό } \lambda \neq 0).$$

Αν έχουν οριστεί τα άθροισμα $\alpha + \xi$ για $\xi < \beta$, τότε ορίζεται και το $\alpha + \beta$. Αν $\beta = 0$, χρησιμοποιούμε το (1), αν το β είναι επομένος διατακτικός αριθμός - το (2) και για οριακό β - το (3).

Ας παρατηρήσουμε ότι έχουμε διαφορετικούς ορισμούς για το 0 και απείρο οριακό διατακτικό αριθμό. Μπορούμε όμως να έχουμε έναν ορισμό κοινό και για τις δύο περιπτώσεις. Ο τύπος $\Phi(g, y)$:

$$"(|g| = 0 \wedge y = \alpha) \vee (|g| \text{ απείρος οριακός} \wedge y = \bigcup \text{rng}(g))",$$

όπου $|g|$ είναι το μήκος της g , για κάθε α και κάθε υπερπεπερασμένη ακολουθία g με οριακό μήκος, ορίζει ακριβώς ένα y .

Στο επομένο κεφάλαιο θα δούμε μερικά παραδείγματα εφαρμογής της Αρχής Υπερπεπερασμένης Αναδρομής σε άλλους κλάδους των Μαθηματικών.

Παρατήρηση. Εστω Φ τύπος που ορίζει αντιστοιχισμό. Το Θεώρημα Υπερπεπερασμένης Αναδρομής μας λέει ότι για κάθε διατακτικό αριθμό α υπάρχει μοναδική υπερπεπερασμένη ακολουθία f που ορίζεται αναδρομικά μέσω του τύπου Φ . Έχουμε δηλαδή

$$\forall \alpha \exists ! f \ \Theta(\alpha, f),$$

όπου $\Theta(\alpha, f)$ είναι ο τύπος:

$$"f \text{ είναι υπερπεπερασμένη ακολουθία μήκους } \alpha" \wedge (\forall \xi < \alpha) \ \Phi(f \upharpoonright \xi, f(\xi)).$$

Αυτό σημαίνει ότι ο τύπος Θ ορίζει αντιστοιχισμό.

Ας συμβολίσουμε με f_α το μοναδικό f τέτοιο ώστε $\Theta(\alpha, f_\alpha)$. Οι υπερπεπερασμένες ακολουθίες f_α και f_β , για $\alpha \neq \beta$, συμφωνούν μεταξύ τους. Δηλαδή για κάθε ξ , αν $\xi < \alpha$ και $\xi < \beta$, έχουμε $f_\alpha(\xi) = f_\beta(\xi)$. Όλες οι f_α με μήκος μεγαλύτερο από ξ έχουν λοιπόν την ίδια τιμή y_ξ . Σε κάθε διατακτικό αριθμό ξ αντιστοιχεί ακριβώς ένα y_ξ .

Η αντιστοιχία του y_ξ στο ξ δίδεται από έναν τύπο Ψ . Ο τύπος αυτός περιγράφει την "ένωση" των f_α . Η κλάση όλων των f_α δεν είναι όμως σύνολο (αφού οι διατακτικοί αριθμοί δεν σχηματίζουν σύνολο). Η "ένωση" τους δεν είναι λοιπόν συνάρτηση. Η συλλογή όλων των ζευγών $\langle \xi, y_\xi \rangle$

είναι μια γνησία κλάση που ορίζει αντιστοιχισμό. Αν περιοριστούμε στα ξ μικρότερα από έναν διατακτικό αριθμό α , τότε (από το αξίωμα αντικατάστασης) η παραπάνω αντιστοιχισμός δίνει το σύνολο $\{\langle \xi, \gamma_\xi \rangle : \xi < \alpha\}$, δηλαδή την υπερπεπερασμένη ακολουθία f_α .

Ξεκινώντας λοιπόν με μια αντιστοιχισμός Φ , με βάση την Αρχή Υπερπεπερασμένης Αναδρομής, μπορούμε όχι μόνο να ορίσουμε μια υπερπεπερασμένη ακολουθία f_α για κάθε διατακτικό αριθμό α , αλλά να ορίσουμε και μια νέα αντιστοιχισμός Ψ που για κάθε διατακτικό αριθμό ξ δίνει ακριβώς ένα γ_ξ .

5.11 Αρχικοί διατακτικοί αριθμοί. Η ιεραρχία των αλφ.

Σ' αυτή την παραγραφο θα δείξουμε πως μπορούν να οριστούν οι πληθικοί αριθμοί για τα σύνολα που δέχονται μια καλή διατάξη. Θα ασχοληθούμε μόνο με τέτοια σύνολα και θα δώσουμε έναν ορισμό που ικανοποιεί το αίτημα του Cantor για τους πληθικούς αριθμούς.

Αποδείξαμε νωρίτερα (θεώρημα 8, σελίδα 103) ότι κάθε καλά διατεταγμένο σύνολο είναι ομοίο με έναν διατακτικό αριθμό. Συνεπώς, για κάθε σύνολο X που δέχεται καλή διατάξη, υπάρχει ένας διατακτικός αριθμός ξ και μια συνάρτηση f τέτοια ώστε

$$f: X \xrightarrow[\text{επ}]{1-1} \xi.$$

Τούτο σημαίνει ότι το σύνολο X είναι πληθικά ισοδύναμο με κάποιον διατακτικό αριθμό. Αυτός ο διατακτικός αριθμός δεν είναι υποχρεωτικά μοναδικός, αφού υπάρχουν σύνολα τα οποία δέχονται πολλές καλές διατάξεις διαφορετικού τύπου. Είναι όμως μοναδικός ο μικρότερος δυνατός τέτοιος αριθμός.

Ορισμός. Για κάθε σύνολο που δέχεται μια καλή διατάξη θέτουμε:

$$\text{card}(X) = \min \xi : X \sim \xi.$$

Ο διατακτικός αριθμός $\text{card}(X)$ λέγεται πληθικός αριθμός του συνόλου X .

Οι παρακάτω προτάσεις είναι άμεσες συνέπειες του ορισμού.

Πρόταση 15. Για οποιαδήποτε σύνολα X, Y που δέχονται καλές διατάξεις ισχύει:

- i) $X \sim Y \leftrightarrow (\min \xi : X \sim \xi) = (\min \xi : Y \sim \xi) \leftrightarrow \text{card}(X) = \text{card}(Y).$
- ii) $\text{card}(X) \leq \text{card}(Y) \vee \text{card}(Y) \leq \text{card}(X).$

Πρόταση 16. Για κάθε σύνολο X που δέχεται καλή διατάξη ισχύει:

- i) $X \sim \text{card}(X).$
- ii) $\text{card}(\text{card}(X)) = \text{card}(X).$

Συμφωνά με τον ορισμό του κεφαλαίου 4, η ιδιότητα

$$\text{card}(X) \leq \text{card}(Y)$$

σημαίνει ότι το σύνολο X είναι ισοπληθικό με ένα υποσύνολο του Y . Πιο κάτω θα δούμε ότι τώρα η ιδιότητα αυτή έχει ένα νέο νόημα. Ταυτίζεται με την ιδιότητα $\leq$ σύγκρισης των διατακτικών αριθμών.

Προτάση 17. Εστω $\text{card}(X)=\alpha$, $\text{card}(Y)=\beta$. Τότε

$$\alpha \leq \beta \leftrightarrow \exists f(f: X \xrightarrow{1-1} Y).$$

Αποδείξη: Το $(\rightarrow)$ είναι φανερό. Για το $(\leftarrow)$ ας υποθέσουμε ότι το X είναι ισοπληθικό με κάποιο υποσύνολο του Y . Τότε το α είναι ισοπληθικό με ένα υποσύνολο του β . Αν ήταν $\beta < \alpha$, τότε (απο το θεώρημα των Cantor, Schröder και Bernstein) θα είχαμε ότι $\alpha \sim \beta$. Θα ήταν συνεπώς $X \sim Y$. Αν το είναι αδύνατο, αφού $\alpha = \min \{ \gamma : X \sim \gamma \}$ και $\beta < \alpha$. Εχουμε λοιπόν: $\alpha \leq \beta$. ■

Πορίσμα. Αν $\text{card}(X)=\alpha$ και $\text{card}(Y)=\beta$, τότε: $\alpha < \beta$ εάν και μόνον εάν το X είναι ισοπληθικό με ένα υποσύνολο του Y και τα X, Y δεν είναι πληθικά ισοδύναμα. Η σύγκριση $<$ των πληθικών αριθμών ταυτίζεται λοιπόν με την ιδιότητα $<$ σύγκρισης των διατακτικών αριθμών.

Παρατηρήσεις. Κανένας φυσικός αριθμός δεν είναι ισοπληθικός με άλλον φυσικό αριθμό. Για κάθε n έστω λοιπόν, ο παραπάνω ορισμός μας δίνει

$$\text{card}(n)=n.$$

Συνεπώς, ο ορισμός του πληθικού αριθμού για τα πεπερασμένα σύνολα που δεχθήκαμε στο κεφάλαιο 4, συμφωνεί με τον παραπάνω.

Το ω επίσης δεν είναι πληθικά ισοδύναμο με κανέναν μικρότερο διατακτικό αριθμό. Δηλαδή $(\min \{ \gamma : \omega \sim \gamma \}) = \omega$. Άρα για το ω , και κάθε αριθμησιμο σύνολο X , έχουμε $\text{card}(X) = \omega$. Ο αφηρημένος πληθικός αριθμός $\aleph_0$, που εισήγαγε ο Cantor για τα άπειρα αριθμησιμα σύνολα, μπορεί τώρα να οριστεί απλώς ως εξής:

$$\aleph_0 = \omega.$$

Ομοια, για τον μικρότερο μη αριθμησιμο διατακτικό αριθμό ω_1 έχουμε $\text{card}(\omega_1) = \omega_1$ (το ω_1 δεν είναι ισοπληθικό με κανέναν μικρότερο διατακτικό αριθμό). Το $\aleph_1$ που ορίστηκε νωρίτερα ως ο πληθικός αριθμός του ω_1 , μπορούμε να το ορίσουμε τώρα απλώς ως

$$\aleph_1 = \omega_1.$$

Ας σημειώσουμε ακόμα μερικές ιδιότητες των διατακτικών αριθμών, οι οποίες είναι συνέπειες των παραπάνω προτάσεων.

Προταση 18. Για οποιουσδηποτε διατακτικους αριθμους α, β ισχυει:

- i) $\text{card}(\alpha) \leq \alpha$,
- ii) $\alpha \leq \beta \rightarrow \text{card}(\alpha) \leq \text{card}(\beta)$,
- iii) $\text{card}(\alpha) \leq \text{card}(\beta) \rightarrow \alpha \leq \beta$.

As παρατηρησουμε ομως οτι δεν αληθεουν οι αντιστροφες των προτασεων ii και iii. Εχουμε π.χ. $\omega+1 \sim \omega$ και συνεπως $\text{card}(\omega+1) = \text{card}(\omega)$. Αρα $\text{card}(\omega+1) \leq \text{card}(\omega)$ ενω δεν ισχυει το $\omega+1 < \omega$.

Ειδαμε παραπανω οτι, τουλαχιστον για τα συνολα που δεχονται μια καλη διαταξη, υπαρχει ενας ικανοποιητικος ορισμος του πληθικου αριθμου. Πληθικοι αριθμοι τετοιων συνολων ειναι καποιοι απο τους διατακτικους αριθμους.

Ορισμος. Ενας διατακτικος αριθμος λεγεται αρχικος, οταν δεν ειναι πληθικα ισοδυναμος με κανεναν μικροτερο διατακτικο αριθμο. Ενας διατακτικος αριθμος α ειναι λοιπον αρχικος αν και μονο αν

$$(\min \xi: \alpha \sim \xi) = \alpha,$$

δηλαδη οταν $\text{card}(\alpha) = \alpha$.

Οι φυσικοι αριθμοι και το ω ειναι αρχικοι διατακτικοι αριθμοι. Ο διατακτικος αριθμος ω_1 ειναι επισης αρχικος. Μεταξυ του ω και του ω_1 δεν υπαρχει αλλος αρχικος διατακτικος αριθμος, αφου

$$\omega \leq \xi < \omega_1 \rightarrow \text{card}(\xi) = \aleph_0.$$

Προταση 19. Για καθε συνολο A , ο αριθμος Hartogs $H(A)$ ειναι αρχικος διατακτικος αριθμος.

Αποδειξη: Απο τον ορισμο του αριθμου Hartogs εχουμε

$$H(A) = \min \xi: \text{"}\xi \text{ δεν κυριαρχειται απο το } A\text{"}.$$

Το $H(A)$ δεν κυριαρχειται λοιπον απο το A και για καθε $\xi < H(A)$, το ξ κυριαρχειται απο το A . Αρα κανενα ξ μικροτερο απο το $H(A)$ δεν μπορει να ειναι ισοπληθικο με το $H(A)$. ■

Προταση 20. Για καθε διατακτικο αριθμο α εχουμε:

$$H(\alpha) = \min \xi: \text{"}\xi \text{ ειναι αρχικος διατακτικος αριθμος και } \alpha < \xi\text{"}.$$

Αποδειξη: Εστω κ αρχικος διατακτικος αριθμος και $\kappa < H(\alpha)$. Τότε το κ κυριαρχειται απο το α , αρα $\text{card}(\kappa) \leq \text{card}(\alpha)$. Επειδη εχουμε $\kappa = \text{card}(\kappa)$ και $\text{card}(\alpha) \leq \alpha$, επεται οτι $\kappa \leq \alpha$.

Δειξαμε παραπανω οτι για καθε αρχικο διατακτικο αριθμο κ ισχυει:

$$\kappa < H(\alpha) \rightarrow \kappa \leq \alpha$$

(ή ισοδυναμία: $\alpha < \kappa \rightarrow H(\alpha) \leq \kappa$).

Επειδή το $H(\alpha)$ είναι αρχικός διατακτικός αριθμός μεγαλύτερος από το α από τα παραπάνω επεται ότι είναι ο μικρότερος δυνατός τέτοιος αριθμός. ■

Πορίσμα 1. Για κανεναν διατακτικό αριθμό α , δεν υπάρχει αρχικός διατακτικός αριθμός μεταξύ των $\text{card}(\alpha)$ και $H(\alpha)$.

Αποδείξη: Εχουμε προφανώς $\text{card}(\alpha) \leq \alpha < H(\alpha)$. Οι αρχικοί διατακτικοί αριθμοί $\text{card}(\alpha)$ και $H(\alpha)$ έχουν λοιπόν την ιδιότητα:

$$\text{card}(\alpha) < H(\alpha).$$

Απο την τελευταία πρόταση επεται ότι αν κ είναι αρχικός διατακτικός αριθμός με $\kappa < H(\alpha)$, τότε $\kappa \leq \alpha$. Συνεπώς ισχυει

$$\kappa < H(\alpha) \rightarrow \kappa \leq \text{card}(\alpha)$$

για κάθε αρχικό διατακτικό αριθμό κ . ■

Πορίσμα 2. Αν κ είναι αρχικός διατακτικός αριθμός, τότε ο αριθμός $\text{Hartogs } H(\kappa)$ είναι ο αμέσως επόμενος αρχικός διατακτικός αριθμός.

Ορισμός. Με κ^+ συμβολίζουμε τον αμέσως επόμενο αρχικό διατακτικό αριθμό του αρχικού διατακτικού αριθμού κ .

Πρόταση 21. Εστω A σύνολο αρχικών διατακτικών αριθμών. Η ένωση $\kappa = \bigcup A$ είναι αρχικός διατακτικός αριθμός.

Αποδείξη: Εστω $\beta < \kappa$. Τότε για κάποιο $\alpha \in A$ ισχυει $\beta < \alpha$. Αν ήταν $\beta \sim \kappa$, τότε (λόγω του $\beta \leq \alpha \leq \kappa$) θα είχαμε $\beta \sim \alpha$. Αυτό όμως είναι αδύνατο, διότι το α είναι αρχικός διατακτικός αριθμός και $\beta < \alpha$.

Αποδείξαμε ότι ο διατακτικός αριθμός κ δεν είναι ισοπληθικός με κανεναν μικρότερο διατακτικό αριθμό, δηλαδή ότι είναι αρχικός. ■

Πορίσμα. Εστω $(\beta_\xi)_{\xi < \alpha}$ γνησια αυξουσα, υπερπεπερασμενη ακολουθια αρχικών διατακτικών αριθμών. Τότε το

$$\kappa = \sup\{\beta_\xi : \xi < \alpha\}$$

είναι αρχικός διατακτικός αριθμός.

Πρόταση 22. Η συλλογή των αρχικών διατακτικών αριθμών είναι γνησια κλάση.

Αποδείξη: Αρκει να αποδείξουμε ότι για κάθε σύνολο διατακτικών αριθμών A υπάρχει αρχικός διατακτικός αριθμός που δεν ανηκει στο A . Εστω ότι $\beta = \sup A$. Το $H(\beta)$ είναι αρχικός διατακτικός αριθμός. Επειδή $\beta < H(\beta)$, επεται ότι $H(\beta) \notin A$. ■

Η ακολουθία ιδιοτήτων των αρχικών διατακτικών αριθμών είναι άμεση συνέπεια της πρότασης 12 (σελίδα 98).

Πρόταση 23. Κάθε σύνολο A αρχικών διατακτικών αριθμών είναι καλά διατεταγμένο από τη σχέση $<_A = \{ \langle \kappa, \lambda \rangle \in A^2 : \kappa < \lambda \}$.

Η ιεραρχία των αλεφ.

Θα ορίσουμε τώρα, με υπερπεπερασμένη αναδρομή, μια ιεραρχία στην κλάση των απείρων αρχικών διατακτικών αριθμών. Θα δώσουμε δηλαδή μια "αριθμηση" αυτής της κλάσης με τη βοήθεια των διατακτικών αριθμών. Για μια τέτοια αριθμηση δεν αρκεί ένα σύνολο διατακτικών αριθμών, διότι οι αρχικοί διατακτικοί αριθμοί δεν αποτελούν σύνολο. Για κάθε ξ ορίζεται μοναδικός απείρος διατακτικός αριθμός ω_ξ , έτσι ώστε για ξ, η :

$$\xi < \eta \leftrightarrow \omega_\xi < \omega_\eta.$$

Ορισμός.

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \omega, \\ \omega_{\xi+1} &= \omega_\xi^+, \\ \omega_\lambda &= \sup\{\omega_\xi : \xi < \lambda\} \quad (\text{για απείρο οριακό } \lambda). \end{aligned}$$

Ο μικρότερος απείρος αρχικός διατακτικός αριθμός είναι το ω . Ο άμεσα επόμενος του ω αρχικός διατακτικός αριθμός είναι ο μικρότερος μη αριθμησιμος διατακτικός αριθμός, δηλαδή το ω_1 που γνωρίσαμε νωρίτερα. Γενικά το $\omega_{\xi+1}$ είναι ο άμεσα επόμενος του ω_ξ αρχικός αριθμός (δηλαδή ο αριθμός $H(\omega_\xi)$). Για απείρο οριακό λ , ο αριθμός ω_λ είναι ο μικρότερος διατακτικός αριθμός που είναι μεγαλύτερος από όλους τους αριθμούς ω_ξ για $\xi < \lambda$.

Χρησιμοποιώντας την Αρχή Ελάχιστου Διατακτικού Αριθμού (θεώρημα 5 στη σελίδα 99) ή με υπερπεπερασμένη επαγωγή (π.χ. όπως αυτή εκφράζεται στην άσκηση 5.38) μπορούμε να αποδείξουμε ότι για κάθε ξ ο διατακτικός αριθμός ω_ξ είναι αρχικός. Είναι φανερό ότι αν το ω_ξ είναι αρχικός, τότε και το $\omega_{\xi+1}$ είναι αρχικός. Αν το λ είναι απείρος οριακός διατακτικός αριθμός και για κάθε $\xi < \lambda$ το ω_ξ είναι αρχικός, τότε ο διατακτικός αριθμός $\sup\{\omega_\xi : \xi < \lambda\}$ είναι επίσης αρχικός (πορίσμα από την πρόταση 21).

Για απείρο οριακό λ έχουμε επίσης ότι

$$\omega_\lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} \omega_\xi.$$

Πραγματικά, επειδή η υπερπεπερασμένη ακολουθία $\langle \omega_\xi : \xi < \lambda \rangle$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο, έχουμε ότι $\bigcup_{\xi < \lambda} \omega_\xi = \sup\{\omega_\xi : \xi < \lambda\}$.

Ευκολα αποδεικνυεται οτι καθε απειρος αρχικος διατακτικος αριθμος
ειναι μορφης ω_ξ για καποιο διατακτικο αριθμο ξ (ασκηση 5.39).

Οπως ειδαμε πιο πανω, τους αρχικους διατακτικους αριθμους μπορού-
με να τους θεωρησουμε πληθικους αριθμους για τα συνολα που δεχονται
καλη διαταξη. Οι απειροι αρχικοι διατακτικοι αριθμοι λοιπον, οπως και
οι φυσικοι αριθμοι, ειναι συγχρονως διατακτικοι και πληθικοι αριθμοι.
Παραδοσιακα, χρησιμοποιειται για αυτους διπλος συμβολισμος. Για το ω_ξ
γραφουμε και $\aleph_\xi$ (αλεφ ξ), οταν θελουμε να τονισουμε οτι το ω_ξ ειναι
πληθικος αριθμος. Οριζουμε δηλαδη για καθε διατακτικο αριθμο ξ :

$$\aleph_\xi = \omega_\xi.$$

Ο νεος συμβολισμος συμφωνει με τον προηγουμενο για τους δυο αριθ-
μους αλεφ που γνωρισαμε νωριτερα. Εχουμε δηλαδη $\aleph_0 = \omega_0$ και $\aleph_1 = \omega_1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5.1 Εστω $\langle X, R \rangle$ καλά διατεταγμένο σύνολο και $Y \subseteq X$. Αποδείξτε ότι η σχέση $R \cap Y \times Y$ είναι καλή διατάξη του συνόλου Y .

5.2 Εστω $\langle X, R \rangle$ καλά διατεταγμένο σύνολο. Εστω $a \in X$. Αποδείξτε ότι αν το a δεν είναι μέγιστο στοιχείο, τότε υπάρχει στο A το άμεσως επόμενο του στοιχείο.

5.3 Αποδείξτε ότι αν R είναι γραμμική διατάξη ενός πεπερασμένου συνόλου A , τότε η R είναι καλή διατάξη του A .

5.4 Εστω $\langle A, R \rangle$, $\langle B, S \rangle$ όμοια διατεταγμένα σύνολα. Αποδείξτε ότι αν η R είναι καλή διατάξη του A , τότε η S είναι καλή διατάξη του B .

5.5 Εστω $\langle A, < \rangle$ καλά διατεταγμένο σύνολο. Αποδείξτε ότι:

i) Για κάθε $a \in A$, το $O_<(a)$ είναι γνήσιο αρχικό τμήμα του $\langle A, < \rangle$.

ii) Αν το B είναι γνήσιο αρχικό τμήμα του $\langle A, < \rangle$, τότε υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $B = O_<(a)$.

5.6 Εστω $\langle A, < \rangle$ καλά διατεταγμένο σύνολο. Αποδείξτε ότι για κάθε $x, y \in A$:

$$x < y \leftrightarrow O_<(x) \subset O_<(y).$$

Εστω B το σύνολο των αρχικών τμημάτων του $\langle A, < \rangle$. Αποδείξτε ότι τα διατεταγμένα σύνολα $\langle A, < \rangle$ και $\langle B, \subset_B \rangle$ είναι όμοια.

5.7 Εστω ότι $F: A \xrightarrow[επι]{1-1} B$ είναι ισομορφισμός των καλά διατεταγμένων συνόλων $\langle A, R \rangle$, $\langle B, S \rangle$. Αποδείξτε ότι για κάθε $a \in A$, ο περιορισμός $F|_{O_R(a)}$ είναι ισομορφισμός του $O_R(a)$ με ένα αρχικό τμήμα του $\langle B, S \rangle$. Βρείτε αυτό το τμήμα.

5.8 (Η "επομένη" καλή διατάξη). Εστω $\langle A, R \rangle$ καλά διατεταγμένο σύνολο. Εστω $b \notin A$. Στο σύνολο $B = A \cup \{b\}$ θεωρούμε τη σχέση $R' = R \cup \{ \langle x, b \rangle : x \in A \}$. Αποδείξτε ότι:

i) $R' \cap A^2 = R$ (δηλαδή ότι η R' συμφωνεί στο A με την R).

ii) Το b είναι μέγιστο στοιχείο του B (ως προς τη διατάξη R').

iii) Το A είναι αρχικό τμήμα του $\langle B, R' \rangle$ ($A = O_{R'}(b)$).

iv) Η σχέση R' είναι καλή διατάξη του B .

5.9 ("Προσθήκη" καλών διατάξεων). Εστω $\langle A, R \rangle$, $\langle B, S \rangle$ καλά διατεταγμένα σύνολα. Εστω $A \cap B = \emptyset$. Στο $A \cup B$ θεωρούμε τη σχέση $T = R \cup S \cup \{ \langle a, b \rangle : a \in A, b \in B \}$. Αποδείξτε ότι:

i) $T \cap A^2 = R$ και $T \cap B^2 = S$ (δηλαδή ότι η T συμφωνεί με τις R και S στο A και B , αντιστοίχα).

ii) Η T είναι καλή διαταξη του $A \cup B$.

iii) Το A είναι αρχικό τμήμα του $\langle A \cup B, T \rangle$.

Το καλά διατεταγμένο σύνολο $\langle A \cup B, T \rangle$ συμβολίζεται $\langle A, R \rangle + \langle B, S \rangle$.

5.10 Εστω $b \notin \omega$. Το $\langle \{b\}, \emptyset \rangle$ είναι καλά διατεταγμένο σύνολο. Εφαρμόζοντας την άσκηση 5.9, βρείτε τα αθροίσματα $\langle \omega, < \rangle + \langle \{b\}, \emptyset \rangle$ και $\langle \{b\}, \emptyset \rangle + \langle \omega, < \rangle$. Είναι όμοιες οι καλές διαταξεις που προκύπτουν;

5.11 Στο σύνολο $\omega \times \{0, 1\}$ θεωρούμε τη σχέση R που ορίζεται από:

$$\langle m, x \rangle R \langle n, y \rangle \leftrightarrow x < y \vee (x = y \wedge m < n).$$

Αποδείξτε ότι η R είναι καλή διαταξη του $\omega \times \{0, 1\}$. Βρείτε τα αρχικά τμήματα $O_R(\langle n, 1 \rangle)$ για $n \in \omega$.

5.12 Στο σύνολο $\omega \times \omega$ θεωρούμε τις σχέσεις $<_L$ και $<_A$ που ορίζονται από

$$\langle m, x \rangle <_L \langle n, y \rangle \leftrightarrow m < n \vee (m = n \wedge x < y),$$

$$\langle m, x \rangle <_A \langle n, y \rangle \leftrightarrow x < y \vee (x = y \wedge m < n).$$

Αποδείξτε ότι οι σχέσεις $<_L$ και $<_A$ είναι καλές διαταξεις του ω^2 . Αυτές ονομάζονται λεξικογραφική και αντιλεξικογραφική διαταξη του ω^2 , αντιστοίχα.

5.13 ("Πόλλαπλασιασμός" καλών διαταξεων). Εστω $\langle A, R \rangle$, $\langle B, S \rangle$ καλά διατεταγμένα σύνολα. Στο $A \times B$ θεωρούμε την σχέση T που ορίζεται από

$$\langle x, y \rangle T \langle z, t \rangle \leftrightarrow y < t \vee (y = t \wedge x < z).$$

Αυτή είναι η λεγόμενη "αντιλεξικογραφική" διαταξη του $A \times B$ που ορίζεται από τις διαταξεις R, S και συμβολίζεται $\langle A, R \rangle \cdot \langle B, S \rangle$. Αποδείξτε ότι η T είναι καλή διαταξη του $A \times B$. Βρείτε παραδείγματα καλά διατεταγμένων συνολών $\langle A, R \rangle$ και $\langle B, S \rangle$ τέτοιων ώστε τα $\langle A, R \rangle \cdot \langle B, S \rangle$ και $\langle B, S \rangle \cdot \langle A, R \rangle$ να μην είναι όμοια.

5.14 Εστω $\langle A, R \rangle$, $\langle B, S \rangle$ καλά διατεταγμένα σύνολα. Αποδείξτε ότι αν $\langle A, R \rangle$ είναι όμοιο με κάποιο γνήσιο αρχικό τμήμα του $\langle B, S \rangle$, τότε το $\langle B, S \rangle$ δεν είναι όμοιο με κανένα αρχικό τμήμα του $\langle A, R \rangle$.

5.15 Αποδείξτε ότι αν το καλά διατεταγμένο σύνολο $\langle A, R \rangle$ είναι όμοιο με ένα αρχικό τμήμα του καλά διατεταγμένου συνόλου $\langle B, S \rangle$ και το $\langle B, S \rangle$ είναι όμοιο με ένα αρχικό τμήμα του καλά διατεταγμένου συνόλου $\langle C, T \rangle$, τότε το $\langle A, R \rangle$ είναι όμοιο με ένα αρχικό τμήμα του $\langle C, T \rangle$.

5.16 Εστω f ισομορφισμός των καλά διατεταγμένων συνολών $\langle A, R \rangle$, $\langle B, S \rangle$. Αποδείξτε ότι για κάθε $a \in A$:

- i) $O_S(f(a)) = f[O_R(a)]$,
- ii) $f(a) = \min_S \{y \in B: (\forall x \in O_R(a))(f(x)Sy)\}$,
- iii) $f(a) = \min_S \{y \in B: f[O_R(a)] \leq O_S(y)\}$,
- iv) $O_S(f(a)) = \{f(x): xRa\}$.

Αν ειδικά το B είναι μεταβατικό σύνολο και $S = \in_B$, αποδείξτε ότι για κάθε $a \in A$:

$$f(a) = O_{\in_B}(f(a)) = \{f(x): xRa\}.$$

5.17 Εστω $\langle A, R \rangle$ καλά διατεταγμένο σύνολο με $\in$ -εικόνα α . Αποδείξτε ότι:

i) Αν B είναι αρχικό τμήμα του $\langle A, R \rangle$, τότε υπάρχει βεα τέτοιο ώστε: $\langle B, R \cap B^2 \rangle$ έχει $\in$ -εικόνα το β.

ii) Κάθε βεα είναι $\in$ -εικόνα ενός αρχικού τμήματος του $\langle A, R \rangle$.

Με βάση τα παραπάνω αποδείξτε ότι αν $\langle A, R \rangle, \langle B, S \rangle$ είναι καλά διατεταγμένα σύνολα με $\in$ -εικόνες α και β , αντιστοίχα, τότε ισχύει:

$$\langle A, R \rangle \prec \langle B, S \rangle \leftrightarrow \alpha \in \beta.$$

5.18 Αποδείξτε ότι αν $S \leq T$, τότε $\in_S = \in_T \cap S^2$.

5.19 Αποδείξτε ότι για κάθε διατακτικό αριθμό α , το σύνολο $\text{au}\{\alpha\}$ είναι διατακτικός αριθμός.

5.20 Αποδείξτε ότι για οποιουσδήποτε διατακτικούς αριθμούς α, β ισχύει:

i) $\alpha' = \beta' \leftrightarrow \alpha = \beta$.

ii) $\alpha < \beta \leftrightarrow \alpha \in \beta$.

iii) $\alpha \leq \beta \leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$.

5.21 Για οποιουσδήποτε διατακτικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει:

i) $\alpha \leq \alpha$.

ii) $\alpha \leq \beta \wedge \beta \leq \alpha \rightarrow \alpha = \beta$.

iii) $\alpha \leq \beta \wedge \beta \leq \gamma \rightarrow \alpha \leq \gamma$.

iv) $\alpha \leq \beta \vee \beta \leq \alpha$.

5.22 Αποδείξτε ότι ο διατακτικός αριθμός $\text{au}\{\alpha\}$, είναι αμέσως επόμενος του α , δηλαδή ότι δεν υπάρχει διατακτικός αριθμός β τέτοιος ώστε:

$$\alpha < \beta < \text{au}\{\alpha\}.$$

5.23 Αποδείξτε ότι τα θεωρήματα 4 και 5 (σελ. 98, 99) είναι ισοδύναμα.

5.24 Εστω $\langle A, R \rangle$ καλά διατεταγμένο σύνολο τύπου α . Εστω $B \subseteq A$. Αποδείξτε ότι αν B είναι ο διατακτικός τύπος του $\langle B, R \cap B^2 \rangle = \beta$, τότε $\beta \leq \alpha$.

5.25 Αποδείξτε ότι αν A είναι σύνολο διατακτικών αριθμών, τότε η ενω-

ση $\cup A$ διατακτικός αριθμός.

5.26 Εστω A σύνολο διατακτικών αριθμών και $\alpha = \cup A$. Αποδείξτε ότι:

i) Για κάθε $\xi \in A$: $\xi \leq \alpha$.

ii) Το α είναι ο μικρότερος διατακτικός αριθμός με την ιδιότητα i.

Αποδείξτε επίσης ότι:

iii) Αν στο A δεν υπάρχει μέγιστο στοιχείο, τότε το α είναι ο μικρότερος διατακτικός αριθμός με την ιδιότητα:

$$(\forall \xi \in A) \xi < \alpha.$$

iv) Αν β είναι το μεγαλύτερο στοιχείο του A , τότε $\alpha = \beta$.

5.27 Εστω ότι A_8' είναι ένα σχήμα αξιωμάτων που προκύπτει από το A_8 , αν σ' αυτό απαιτήσουμε να ικανοποιείται μόνον η πρώτη συνθήκη. Χρησιμοποιώντας το σχήμα υποσυνόλων A_7 , δείξτε ότι από το A_8' προκύπτει το σχήμα αντικατάστασης A_8 .

5.28 Δείξτε ότι το σχήμα υποσυνόλων (A_7) αποδεικνύεται από το σχήμα αντικατάστασης (A_8).

5.29 Ένας τύπος $\Phi(x, y)$ λέγεται μονοσημαντός αν

$$\forall x \forall y \forall z (\Phi(x, y) \wedge \Phi(x, z) \rightarrow y = z).$$

Ορίζουμε ως $\Phi^*(x, y)$ τον τύπο:

$$\Phi(x, y) \vee \neg (\exists t \Phi(x, t)) \wedge y = \emptyset.$$

Αποδείξτε ότι ο $\Phi^*(x, y)$ ορίζει αντιστοιχισμό.

5.30 Εστω ότι ο τύπος $\Psi(x, y)$ είναι μονοσημαντός (ασκήση 5.29). Εστω A σύνολο. Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικό σύνολο C τέτοιο ώστε:

i) $(\forall x \in A) (\exists y \Psi(x, y) \rightarrow (\exists y \in C) \Psi(x, y))$.

ii) $(\forall y \in C) (\exists x \in A) \Psi(x, y)$.

Το σύνολο C λέγεται εικόνα του A μέσω του μονοσημαντού τύπου Ψ .

5.31 Αποδείξτε ότι για κάθε σύνολο A ο αριθμός Hartogs $H(A)$ έχει τις ιδιότητες:

i) $H(A) = \{\xi: \text{"}\xi \text{ κυριαρχείται από το } A\}$.

ii) $H(A) = \sup\{\xi: \text{"}\xi \text{ κυριαρχείται από το } A\}$.

iii) Αν $\xi < H(A)$, τότε ξ και $H(A)$ δεν είναι πληθικά ισοδύναμα.

5.32 Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας την ασκήση 5.24, ότι αν $A \leq \omega_1$, τότε $\text{card}(A) = \aleph_1$ ή $\text{card}(A) \leq \aleph_0$.

5.33 Αποδείξτε ότι για κάθε διατακτικό αριθμό α , αν $\omega \leq \alpha$ τότε:

i) Το α είναι ισοπληθικό με το $\alpha+1$.

ii) Το α είναι ισοπληθικό με το $\alpha + \omega$.

5.34 Αποδείξτε ότι αν το σύνολο A κυριαρχείται από έναν διατακτικό αριθμό, τότε το A δεχεται μια καλή διατάξη.

5.35 Αποδείξτε ότι ένας διατακτικός αριθμός λ είναι οριακός αν και μόνο αν $\bigcup \lambda = \lambda$.

5.36 Εστω ότι $(\alpha_n)_{n \in \omega}$ είναι μια γνησία αυξουσα ακολουθία διατακτικών αριθμών (δηλαδή για κάθε $n \in \omega$: $\alpha_n < \alpha_{n+1}$). Εστω $\lambda = \sup\{\alpha_n : n \in \omega\}$. Αποδείξτε ότι $\lambda = \bigcup \{\alpha_n : n \in \omega\}$ και ότι το λ είναι οριακός διατακτικός αριθμός.

5.37 Εστω X σύνολο και α διατακτικός αριθμός. Αποδείξτε ότι υπάρχουν τα σύνολα $X^{\leq \alpha}$ και $X^{< \alpha}$ των υπερπεπερασμένων ακολουθιών με μήκος το πολύ α και μήκος μικρότερο από α , αντιστοιχά.

5.38 Εστω Φ τύπος. Εστω ότι $(x_\xi)_{\xi < \alpha}$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη υπερπεπερασμένη ακολουθία. Ας υποθέσουμε ότι:

i) $\Phi(x_0)$,

ii) $(\Phi(x_\xi) \rightarrow \Phi(x_{\xi+1}))$ για κάθε ξ με $\xi+1 < \alpha$,

iii) $(\forall \xi < \lambda) \Phi(x_\xi) \rightarrow \Phi(x_\lambda)$ για κάθε οριακό $\lambda < \alpha$.

Αποδείξτε ότι τότε $(\forall \xi < \alpha) \Phi(x_\xi)$.

5.39 Αποδείξτε ότι για κάθε απείρο αρχικό διατακτικό αριθμό κ υπάρχει διατακτικός αριθμός ξ τέτοιος ώστε $\kappa = \omega_\xi$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6. ΤΟ ΑΞΙΩΜΑ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

6.1 Το αξίωμα επιλογής.

Ενα απο τα αξιωματα για τη θεωρια συνολων που διατυπωσε το 1904 ο Zermelo, το λεγομενο αξιωμα επιλογης, αξιζει ιδιαιτερης προσοχης. Λογω της μη κατασκευαστικης φυσεως του, αρκετοι μαθηματικοι δεν το δεχθηκαν ως διαισθητικα αληθινο. Το αξιωμα επιλογης διαφερει απο τα υπολοιπα αξιωματα της θεωριας συνολων. Μας λεει για την υπαρξη καποιων συνολων χωρις να καθοριζει τα στοιχεια τους. Αργότερα, μερικες "περιεργες" συνεπειες του αξιωματος επιλογης αυξησαν το πληθος αυτων που το απορριπτουν. Οι περισσοτεροι μαθηματικοι το δεχονται ομως χωρις καμια επιφυλαξη. Το θεωρουν μαλιστα απαραιτητο, αφου χρησιμοποιειται ουσιαστικα για τις αποδειξεις αρκετων βασικων θεωρηματων σε πολλους κλαδους των Μαθηματικων.

Για τους λογους που αναφεραμε πιο πανω, διακρινουμε θεωρια συνολων με και χωρις το αξιωμα επιλογης. Τα A_1 ως A_8 που γνωρισαμε μεχρι τωρα, μαζι με το αξιωμα κανονικοτητας A_9 που διατυπωνεται στο παραρτημα, αποτελουν το αξιωματικο συστημα ZF . Με ZFC συμβολιζουμε το συστημα αξιωματων A_1 ως A_{10} , δηλαδη τα αξιωματα της θεωριας συνολων ZF μαζι με το αξιωμα επιλογης. Στη συνεχεια θα σημειωνουμε με $^{\circ}$ τα θεωρηματα της θεωριας ZFC , δηλαδη εκεινες τις προτασεις, για την αποδειξη των οποιων χρησιμοποιηθηκε το αξιωμα επιλογης.

Το αξιωμα επιλογης εχει πολλες ισοδυναμες διατυπωσεις. Μια απ' αυτες ειναι η ακολουθη.

A_{10} . Αξιωμα επιλογης.

"Εστω A συνολο μη κενων, ξενων μεταξυ τους συνολων. Υπαρχει συνολο S που με καθενα απο τα συνολα του A εχει ακριβως ενα κοινο στοιχειο".

Συμβολικα:

$$(\forall x \in A) x \neq \emptyset \wedge (\forall x \in A) (\forall y \in A) (x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset) \rightarrow \exists S (\forall x \in A) \exists u (S \cap x = \{u\}).$$

Το συνολο S λεγεται συνολο επιλογης για το A , διοτι απο καθενα συνολο του A "επιλεγει" ενα στοιχειο.

Οταν το A αποτελειται απο ενα μη κενο συνολο X , τοτε μπορουμε απο το X να παρουμε ενα στοιχειο. Δεν υπαρχει επισης προβλημα επιλογης αν το A ειναι πεπερασμενο. Γενικα ομως, η δυνατοτητα επιλογης δεν εξασφαλιζεται χωρις ειδικο αξιωμα.

Ευκολα αποδεικνυεται οτι οι παρακατω δυο προτασεις ειναι ισοδυνα-
μες με το αξιωμα επιλογης (ασκηση 6.1).

° Προταση 1. Εστω $(A_t)_{t \in T}$ οικογενεια μη κενων συνολων. Υπαρχει μια συν-
αρτηση f με πεδιο ορισμου το συνολο T , τετοια ωστε για καθε $t \in T$:

$$f(t) \in A_t.$$

Υπαρχει δηλαδη μια συναρτηση επιλογης για την οικογενεια $(A_t)_{t \in T}$.

Το παραπανω σημαινει οτι το γενικευμενο καρτεσιανο γινομενο μιας
οικογενειας μη κενων συνολων, ειναι μη κενο. Εχουμε δηλαδη:

$$(\forall t \in T)(A_t \neq \emptyset) \rightarrow (\prod_{t \in T} A_t \neq \emptyset).$$

Η προταση 1 απαντα λοιπον στο ερωτημα που θεσαμε στο κεφαλαιο 2
(σελιδα 29).

° Προταση 2. Εστω A συνολο. Υπαρχει συναρτηση W με $\text{dom}(W) = \mathcal{P}A - \{\emptyset\}$, ωστε:

$$(\forall Y \in \mathcal{P}A)(Y \neq \emptyset \rightarrow W(Y) \in Y).$$

Μια τετοια συναρτηση W λεγεται συναρτηση επιλογης για τα υποσυνολα του
 A , αφου "διαλεγει" απο καθε μη κενο υποσυνολο του A ενα στοιχειο.

Παρατηρηση. Χωρις να χρησιμοποιησουμε το αξιωμα επιλογης, μπορουμε να
ορισουμε μια συναρτηση επιλογης για τα υποσυνολα του ω . Αρκει για καθε
 $Z \subseteq \omega$, $Z \neq \emptyset$ να θεσουμε απλως: $W(Z) = \min Z$.

Γενικοτερα, για καθε συνολο A που δεχεται μια καλη διαταξη R , θε-
τοντας:

$$W(Z) = \min_R Z \quad (\text{για } Z \subseteq A, Z \neq \emptyset),$$

οριζουμε μια συναρτηση επιλογης για τα υποσυνολα του A .

6.2 Το Λημμα των Kuratowski και Zorn.

Στα Μαθηματικα, αντι για το αξιωμα επιλογης εφαρμοζεται συχνα ενα
ισοδυναμο μ' αυτο θεωρημα. Το θεωρημα αυτο αποδειχθηκε απο τους Kura-
towski (1922) και Zorn (1935) και ειναι γνωστο ως Λημμα του Zorn.

Πριν αποδειξουμε το Λημμα των Kuratowski-Zorn, θα ορισουμε μια
βοηθητικη εννοια που απλοποιει τη διατυπωση του.

Ορισμος. Εστω $\leq$ μερικη διαταξη ενος συνολου X . Ενα υποσυνολο $\mathcal{A}$ του X
λεγεται αλυσιδα, οταν το $\mathcal{A}$ ειναι γραμμικα διατεταχμενο απο τη σχεση $\leq$,
δηλαδη οταν

$$(\forall x \in \mathcal{A})(\forall y \in \mathcal{A})(x \leq y \vee y \leq x).$$

° Θεωρημα 1. (Λημμα Kuratowski-Zorn).

Εστω $\langle X, \leq \rangle$ μερικως διατεταχμενο συνολο που ικανοποιει τη συνθηκη:

(+) "Για κάθε αλυσίδα υπάρχει ανω φραγμα".

Τότε στο X υπάρχει μείζον (maximal) στοιχείο, δηλαδή

$$(\exists c \in X)(\forall x \in X)(c \leq x \rightarrow x = c).$$

Αποδείξη: Εστω x_0 οποιοδήποτε στοιχείο του X . Ας υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει στο X μείζον στοιχείο x με $x_0 \leq x$. Τότε για κάθε $x \in X$ ($x_0 \leq x$) υπάρχει $y \in X$ ώστε $y \neq x$ και $x \leq y$ (δηλαδή $x < y$). Αυτό σημαίνει ότι τα συνολα:

$$\{y \in X: x < y\}$$

(για $x \in X$, $x_0 \leq x$) είναι μη κενά.

Απο την υποθεση του θεωρήματος επεται ότι για κάθε αλυσίδα A , το σύνολο $\{y \in X: (\forall a \in A) a \leq y\}$ των ανω φραγμάτων της A δεν είναι κενό. Αν η αλυσίδα A δεν περιεχει μεγιστο στοιχείο, τότε κάθε ανω φραγμα της είναι γνησιο. Για τετοιες αλυσιδες εχουμε ότι το σύνολο:

$$\Gamma(A) = \{y \in X: (\forall a \in A) a < y\}$$

των γνησιων ανω φραγματων της A είναι μη κενό.

Εχουμε λοιπον ότι:

- (1) Για κάθε $x \in X$, $x_0 \leq x$: $\{y \in X: x < y\} \neq \emptyset$.
- (2) Για κάθε αλυσίδα A χωρίς μεγιστο στοιχείο: $\Gamma(A) \neq \emptyset$.

Εστω W μια συναρτηση επιλογης για τα υποσύνολα του X . Βασει των (1) και (2) μπορούμε, με τη βοήθεια της συναρτησης W , για κάθε διατακτικό αριθμο α , να ορισουμε μια γνησια αυξουσα, υπερπεπερασμενη ακολουθια $(z_\xi)_{\xi < \alpha}$ στοιχειων του X . Θα καταληξουμε σε ατοπο, διότι δεν υπάρχουν τετοιες ακολουθιες με οποιοδήποτε μηκος α (το α πρεπει να είναι μικροτερο απο τον αριθμο Hartogs $H(X)$ του συνολου X).

Με υπερπεπερασμενη επαγωγη οριζουμε:

$$\begin{aligned} z_0 &= x_0, \\ z_{\xi+1} &= W(\{y \in X: z_\xi < y\}), \\ z_\lambda &= W(\Gamma(\{z_\xi: \xi < \lambda\})) \quad (\text{για οριακο } \lambda \neq 0). \end{aligned}$$

Ειναι προφανες ότι για κάθε ξ : $z_\xi < z_{\xi+1}$. Επισης αν λ είναι οριακος διατακτικος αριθμος και $\xi < \lambda$, τότε $z_\xi < z_\lambda$. Επεται ότι η υπερπεπερασμενη ακολουθια $(z_\xi)_{\xi < \alpha}$ είναι γνησια αυξουσα στο $\langle X, \leq \rangle$. ■

Παρατηρηση. Ας σημειωσουμε ότι παραπανω δειξαμε κατι ισχυροτερο. Αποδειξαμε ότι αν το $\langle X, \leq \rangle$ μερικως διατεταχμενο σύνολο ικανοποιει τη συνθηκη (+) των Kuratowski-Zorn, τότε για κάθε $x_0 \in X$ υπάρχει στο X μείζον στοιχείο y με $x_0 \leq y$.

Το γεγονός ότι το Λήμμα των Kuratowski-Zorn είναι ισοδυναμο με το αξιωμα επιλογης δεν είναι αμεσως φανερο. Θα το δουμε στην επομενη πα-

ραγραφο. Μια άλλη δικαιολόγηση περιέχει η άσκηση 6.7.

Παραδειγμα 1. Εφαρμόζοντας το Λήμμα των Kuratowski-Zorn, θα αποδείξουμε ότι σε κάθε διανυσματικό χώρο υπάρχει βάση.

Εστω V διανυσματικός χώρος. Θεωρούμε το σύνολο

$X = \{Y \in \mathcal{P}V : "Y \text{ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων} "\}$.

Η σχέση $\subseteq_X$ είναι μερική διαταξη του X . Θα δείξουμε ότι το $\langle X, \subseteq_X \rangle$ ικανοποιεί τη συνθήκη των Kuratowski-Zorn.

Εστω A μια αλυσίδα του $\langle X, \subseteq_X \rangle$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $Y, Z \in A$: $Y \subseteq Z$ ή $Z \subseteq Y$. Η ένωση $\bigcup A$ είναι προφανώς ένα σύνολο διανυσμάτων που περιέχει κάθε στοιχείο του A . Αρκεί να αποδείξουμε ότι το $\bigcup A$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Θα έχουμε τότε ότι $\bigcup A \in X$, και συνεπώς ότι το $\bigcup A$ είναι άνω φράγμα της αλυσίδας A .

Εστω $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\bigcup A$. Τότε υπάρχουν $Y_0, Y_1, \dots, Y_k$ στοιχεία του A , τέτοια ώστε $v_0 \in Y_0, v_1 \in Y_1, \dots, v_k \in Y_k$. Επειδή το A είναι αλυσίδα, μεταξύ των συνόλων $Y_0, Y_1, \dots, Y_k$ υπάρχει ένα Y_1 ($0 \leq i \leq k$) που περιέχει τα υπολοιπα. Συνεπώς έχουμε $\{v_0, v_1, \dots, v_k\} \subseteq Y_1$. Επειδή το σύνολο Y_1 είναι γραμμικά ανεξάρτητο, επεται ότι τα διανυσμάτα $v_0, v_1, \dots, v_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Δείξαμε λοιπόν ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του $\bigcup A$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, που σημαίνει ότι το $\bigcup A$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Απο το Λήμμα των Kuratowski-Zorn έχουμε ότι στο $\langle X, \subseteq \rangle$ υπάρχει ένα μέγιστο στοιχείο B . Για κάθε διάνυσμα $v \in V$, το σύνολο $B \cup \{v\}$ είναι γνησια επέκταση του B , άρα δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Επεται ότι το v είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του B . Αυτό σημαίνει ότι το B είναι βάση του χώρου V . Συμφωνά με την παραπάνω παρατήρηση, μπορούμε να υποθέσουμε επιπλέον ότι το B είναι επέκταση ενός προκαθορισμένου συνόλου Y_0 γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων. Δείξαμε λοιπόν πιο πάνω ότι κάθε-να τέτοιο σύνολο Y_0 μπορεί να επεκταθεί σε βάση του χώρου V .

6.3 Η Αρχή Καλής Διατάξης.

Άλλη μια σημαντική για τη θεωρία συνόλων συνεπεία του αξιώματος επιλογής είναι η λεγόμενη Αρχή Καλής Διατάξης του Zermelo. Το θεώρημα αυτό, όπως θα δούμε πιο κάτω, είναι ισοδύναμο με το αξίωμα επιλογής. Θα το αποδείξουμε εφαρμόζοντας το Λήμμα των Kuratowski-Zorn. Η άσκηση 6.8 περιγράφει μιαν άλλη απόδειξη του.

^ο Θεώρημα 2. (Αρχή Καλής Διατάξης του Zermelo).

Κάθε σύνολο δεχεται καλή διαταξη.

Αποδείξη: Εστω A σύνολο. Θεωρούμε το σύνολο

$$X = \{ \langle B, \rho \rangle : B \subseteq A \wedge \text{"} \rho \text{" είναι καλή διαταξη του } B \}.$$

Στο X θεωρούμε τη σχέση $\leq$ που ορίζεται ως εξής:

$$(*) \quad \langle B, \rho \rangle \leq \langle C, \sigma \rangle \leftrightarrow "B \text{ είναι αρχικό τμήμα του } C" \wedge \sigma \upharpoonright B^2 = \rho.$$

Ευκολά ελεγχεται ότι η σχέση $\leq$ είναι μερική διαταξη του συνόλου X . Θα δείξουμε ότι ικανοποιείται η υποθεση (+) του Λήμματος Kuratowski-Zorn.

Εστω $\mathcal{A} = \{ \langle B_i, \rho_i \rangle : i \in I \}$ μια αλυσίδα στοιχείων του X . Θετούμε

$$B = \bigcup_{i \in I} B_i \quad \text{και} \quad \rho = \bigcup_{i \in I} \rho_i.$$

Αποδεικνύεται (ασκήση 6.9) ότι η σχέση ρ είναι καλή διαταξη του B και για κάθε $i \in I$: $\langle B_i, \rho_i \rangle \leq \langle B, \rho \rangle$. Εχουμε συνεπώς ότι $\langle B, \rho \rangle \in X$ και το $\langle B, \rho \rangle$ είναι ανώφραγμα της αλυσίδας $\mathcal{A}$.

Απο το Λήμμα των Kuratowski-Zorn επεται λοιπον ότι υπάρχει στο X ένα μείζον (ως προς τη διαταξη $\leq$) στοιχείο $\langle B, \rho \rangle$. Πρέπει να είναι $B=A$. Πραγματικά, αν υπήρχε $c \in A-B$, τότε στο $B' = B \cup \{c\}$ ορίζεται μια καλή διαταξη ρ' (η "επομενή" της ρ). Θα ειχαμε τότε

$$\langle B, \rho \rangle \leq \langle B', \rho' \rangle \quad \text{και} \quad \langle B, \rho \rangle \neq \langle B', \rho' \rangle$$

που είναι αδύνατο, αφού $\langle B, \rho \rangle$ είναι μείζον. Επειδή έχουμε $B=A$, επεται ότι η σχέση ρ είναι καλή διαταξη του συνόλου A . ■

Παρατήρηση. Όπως ειδαμε στην παρατήρηση της σελίδας 125, για κάθε σύνολο που δεχεται μια καλή διαταξη, μπορούμε να ορίσουμε μια συναρτηση επιλογής για τα υποσύνολα του. Απο την Αρχή Καλής Διαταξης (ΑΚΔ) επεται λοιπον ότι για κάθε σύνολο υπάρχει μια συναρτηση επιλογής για τα υποσύνολα του. Το τελευταίο γεγονός είναι ισοδύναμο με το αξίωμα επιλογής (ασκήση 6.1). Η Αρχή Καλής Διαταξης αποδειχθηκε με βάση το Λήμμα των Kuratowski-Zorn (ΑΚΖ). Εχουμε δηλαδή ότι

$$(Αξ.Επ.) \rightarrow (ΑΚΖ) \rightarrow (ΑΚΔ) \rightarrow (Αξ.Επ.).$$

Επεται λοιπον ότι το αξίωμα επιλογής, το Λήμμα Kuratowski-Zorn και η Αρχή Καλής Διαταξης του Zermelo είναι ισοδύναμα.

6.4 Οι πληθικοί αριθμοί στη θεωρία ZFC.

Στην παραγραφο 5.11 γνώρισαμε έναν ορισμό των πληθικών αριθμών για τα σύνολα που δεχονται καλή διαταξη. Κάθε τέτοιο σύνολο είναι ισοπληθικό με κάποιον διατακτικό αριθμό. Ο μικρότερος διατακτικός αριθμός μ' αυτή την ιδιότητα είχε οριστεί ως ο πληθικός αριθμός του συνόλου. Θεσάμε τότε

$$\text{card}(A) = \min \{ \alpha : A \sim \alpha \},$$

το οποίο έχει νόημα για εκείνα τα σύνολα A που δέχονται καλή διαταξη.

Απο την Αρχή Καλής Διαταξης επεται ότι ο παραπάνω αριθμός $\text{card}(A)$ ορίζεται για κάθε σύνολο A . Στη θεωρία συνόλων ZFC έχουμε λοιπόν έναν σαφή ορισμό των πληθικών αριθμών.

Για κάθε σύνολο A ο αριθμός $\text{card}(A)$ είναι ένας αρχικός διατακτικός αριθμός. Για πεπερασμένο σύνολο A το $\text{card}(A)$ είναι ένας φυσικός αριθμός. Για τους απείρους αρχικούς διατακτικούς αριθμούς ορίσαμε μια ιεραρχία, τη λεγόμενη ιεραρχία των αλεφ (σελιδα 113). Κάθε απείρο σύνολο έχει ως πληθικό αριθμό καποιον αλεφ. Για κάθε απείρο σύνολο A υπάρχει λοιπόν (μοναδικος) διατακτικός αριθμός $\aleph_\xi$ τέτοιος ώστε:

$$\text{card}(A) = \aleph_\xi.$$

Συμφωνα με τα παραπάνω και αυτά που δείξαμε στην παραγραφο 5.11 (προταση 1511, σελιδα 113), βλέπουμε ότι για οποιαδήποτε σύνολα, συγκρίνονται οι πληθικοί τους αριθμοί. Δείξαμε λοιπόν μια σημαντική ιδιότητα των πληθικών αριθμών που δεν έχει αποδειχθεί στο κεφαλαίο 4.

Θεωρημα 3. Για οποιαδήποτε σύνολα A, B ισχυει:

$$\text{card}(A) \leq \text{card}(B) \vee \text{card}(B) \leq \text{card}(A)$$

ή ισοδυναμα:

$$\text{card}(A) < \text{card}(B) \vee \text{card}(A) = \text{card}(B) \vee \text{card}(B) < \text{card}(A).$$

Το παραπάνω διατυπώνεται και ως ένας νόμος για τους πληθικούς αριθμούς.

Θεωρημα 3'. (Νόμος Τριχοτομίας για τους πληθικούς αριθμούς).

Για οποιουσδήποτε πληθικούς αριθμούς m, n ισχυει:

$$m < n \vee m = n \vee n < m.$$

Παρατηρηση. Στο πρόβλημα σύγκρισης των πληθικών αριθμών δεν μπορούμε να απαντήσουμε χωρίς το αξίωμα επιλογής. Και τουτο διότι ο Νόμος Τριχοτομίας είναι ισοδυναμος με αυτό το αξίωμα. Πραγματικά, ας υποθέσουμε ότι για οποιαδήποτε σύνολα συγκρίνονται οι πληθικοί τους αριθμοί. Τότε για κάθε σύνολο A υπάρχει ένας διατακτικός αριθμός α ώστε

$$\text{card}(A) \leq \text{card}(\alpha)$$

(οποιοσδήποτε α που δεν κυριαρχείται απο το A). Αυτό σημαίνει ότι κάθε σύνολο κυριαρχείται απο καποιον διατακτικο αριθμό, και συνεπώς (ασκηση 5.34) ότι δέχεται μια καλή διαταξη. Βλέπουμε λοιπόν ότι η Αρχή Καλής Διαταξης, αρα και το αξίωμα επιλογής, είναι συνεπεια του Νόμου Τριχοτομίας για τους πληθικούς αριθμούς.

Για τα αριθμησιμα συνολα εχουμε $\text{card}(A)=\aleph_0$. Ο πρωτος πληθικος αριθμος που ειναι μεγαλυτερος απο το $\aleph_0$ ειναι το $\aleph_1$ (που ειναι ο μικροτερος μη αριθμησιμος διατακτικος αριθμος). Ο πληθικος αριθμος του συν-
 εχους ($c=\text{card}(\mathbb{R})$) ειναι καποιο αλεφ. Δηλαδη για καποιον διατακτικο αριθμο ξ ισχυει: $c=\aleph_\xi$. Απο την Εικασια του Συνεχους (σελιδα 83) προκυ-
 πτει οτι μεταξυ των $\aleph_0$ και c δεν υπαρχει αλλος πληθικος αριθμος (ασκη-
 ση 4.36). Συνεπως εχουμε οτι

$$c=\aleph_1.$$

Στη θεωρια συνολων ZFC ευκολα αποδεικνυεται οτι η παραπανω ισοτητα ει-
 ναι ισοδυναμη με την Εικασια του Συνεχους (ασκηση 6.10).

6.5 Αλλες συνεπειες του αξιωματος επιλογης.

Το αξιωμα επιλογης μας επιτρεπει να απαντησουμε και σε αλλα ερω-
 τηματα που θεσαμε νωριτερα. Οπως ειδαμε στο κεφαλαιο 4, καθε συνολο
 κατα Dedekind απειρο ειναι απειρο (σελιδα 67). Τωρα μπορουμε να α-
 ποδειξουμε οτι ισχυει και το αντιστροφο. Με τη βοηθεια του αξιωματος
 επιλογης, αποδεικνυεται αμεσα (ασκηση 6.5) οτι καθε απειρο συνολο πε-
 ριχει ενα αριθμησιμο υποσυνολο. Αλλη μια αιτιολογηση μας δινει ο Νο-
 μος Τριχοτομιας (αν A απειρο, τοτε πρεπει να ειναι $\aleph_0 \leq \text{card}(A)$). Εchu-
 με συνεπως (απο την ασκηση 4.14) οτι καθε απειρο συνολο ειναι ισοπλη-
 θικο με καποιο γνησιο υποσυνολο του.

° Προταση 3. Ενα συνολο ειναι απειρο εαν και μονον εαν ειναι κατα Dede-
 kind απειρο.

Η προταση 1 του κεφαλαιου 5 μας λεει οτι οι καλες διαταξεις δεν ε-
 χουν απειρες φθινουσες ακολουθιες. Χρησιμοποιωντας καταλληλα το αξιωμα
 επιλογης, μπορουμε να αποδειξουμε και το αντιστροφο (ασκηση 6.4). Ε-
 χουμε λοιπον τον ακολουθο χαρακτηρισμα των καλων διαταξεων.

° Προταση 4. Εστω R γνησια γραμμικη διαταξη του συνολου A . Η σχεση R
 ειναι καλη διαταξη του A αν και μονο αν δεν υπαρχει απειρη R -φθινουσα
 ακολουθια στοιχειων του A .

Η προταση 14 του κεφαλαιου 4 δειχνει πως, χρησιμοποιωντας δοσμε-
 νες αριθμησεις $(f_n)_{n \in \omega}$ μιας αριθμησιμης οικογενειας $(A_n)_{n \in \omega}$ μη κενων
 συνολων, μπορουμε να ορισουμε μια αριθμηση της ενωσης $\bigcup_{n \in \omega} A_n$. Το αξιω-
 μα επιλογης μας επιτρεπει να διαλεξουμε τετοιες αριθμησεις και να απο-
 δειξουμε την παρακατω ιδιοτητα (ασκηση 6.12).

° Προταση 5. Η ένωση μιας αριθμησιμης οικογενειας το πολυ αριθμησιμων συνολων ειναι το πολυ αριθμησιμη.

Απο την παραπανω προταση επεται αμεσως μια σημαντικη ιδιοτητα του διατακτικου αριθμου ω_1 (ασκηση 6.13).

° Προταση 6. Εστω $(\alpha_n)_{n \in \omega}$ ακολουθια αριθμησιμων διατακτικων αριθμων. Τότε ο διατακτικος αριθμος $\bigcup_{n \in \omega} \alpha_n$ (συνεπws και ο $\sup\{\alpha_n : n \in \omega\}$) ειναι αριθμησιμος. Εχουμε δηλαδη:

$$(\forall n \in \omega)(\alpha_n < \omega_1) \rightarrow (\bigcup_{n \in \omega} \alpha_n < \omega_1).$$

6.6 Εφαρμογες της Αρχης Υπερπεπερασμενης Αναδρομης.

Θα κλεισουμε το κεφαλαιο με δυο παραδειγματα εφαρμογης της Αρχης Υπερπεπερασμενης Αναδρομης στα Μαθηματικα.

Τα Borel συνολα.

Τα Borel υποσυνολα των Ευκλειδειων χωρων $\mathbb{R}^n$ (και γενικότερα των μετρικων χωρων) παιζουν σημαντικό ρολο στη Μαθηματικη Αναλυση. Θα περιγραφουμε πρωτα το συνηθισμενο τους ορισμο. Μετα, χρησιμοποιωντας υπερπεπερασμενη αναδρομη, θα δωσουμε εναν διαφορετικο ορισμο. Ο τελειος ορισμος των Borel συνολων μας επιτρεπει να αποδεικνουμε πολλες ιδιοτητες τους με υπερπεπερασμενη επαγωγη.

Ο ορος "οικογενεια", οπως συνηθιζεται στα Μαθηματικα, παρακατω θα σημαινει απλως συνολο.

Η οικογενεια $\mathcal{B}(X)$ των Borel υποσυνολων του χωρου X , οριζεται ως η μικροτερη οικογενεια $\mathcal{Y}$ υποσυνολων του X που περιεχει τα κλειστα συνολα και ειναι κλειστη ως προς τη πραξη συμπληρωματος και τις πραξεις αριθμησιμων ενωσεων και τομων. Η $\mathcal{B}(X)$ ειναι δηλαδη η μικροτερη οικογενεια $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}(X)$ που ικανοποιει τις πιο κατω συνθηκες:

- i) Αν F ειναι κλειστο υποσυνολο του X , τότε $F \in \mathcal{Y}$.
- ii) Αν $A \in \mathcal{Y}$, τότε $X - A \in \mathcal{Y}$.
- iii) Αν για καθε $n \in \omega$: $A_n \in \mathcal{Y}$, τότε $\bigcup_{n \in \omega} A_n \in \mathcal{Y}$.
- iv) Αν για καθε $n \in \omega$: $A_n \in \mathcal{Y}$, τότε $\bigcap_{n \in \omega} A_n \in \mathcal{Y}$.

Η αιτιολογηση υπαρξης της οικογενειας $\mathcal{B}(X)$ δεν ειναι δυσκολη (ασκηση 6.14).

Ευκολα βλεπουμε οτι τα ανοικτα υποσυνολα του χωρου X , ως συμπληρωματα κλειστων συνολων, ειναι Borel συνολα. Ειναι φανερο οτι οι αριθ-

μησιμες ενωσεις κλειστων συνολων (τα λεγομενα F_σ συνολα) ειναι Borel. Οι αριθμησιμες τομες ανοικτων συνολων (τα λεγομενα G_δ συνολα) ειναι ε-
πισης Borel συνολα.

Οι οικογενειες των F_σ και των G_δ συνολων δεν εξαντλουν τα Borel συνολα. Αποδεικνυεται οτι στους Ευκλειδειους χωρους υπαρχουν αριθμησι-
μες ενωσεις G_δ συνολων ($G_{\delta\sigma}$ συνολα) και αριθμησιμες τομες F_σ συνολων ($F_{\sigma\delta}$ συνολα) που δεν ειναι ουτε F_σ ουτε G_δ . Ομως ουτε οι οικογενειες $G_{\delta\sigma}$ και $F_{\sigma\delta}$ εξαντλουν τα Borel συνολα. Υπαρχουν Borel συνολα με πιο
συνθετη "δομη".

Ας παρατηρησουμε οτι απο τις συνθηκες iii και iv του ορισμου αρ-
κει μονον μια. Πραγματικα, απο τους νομους του de Morgan εχουμε

$$\bigcap_{n \in \omega} A_n = X - \left(\bigcup_{n \in \omega} (X - A_n) \right),$$

$$\bigcup_{n \in \omega} A_n = X - \left(\bigcap_{n \in \omega} (X - A_n) \right).$$

Συνεπως, μια οικογενεια $\mathcal{Y}$ που εχει την ιδιοτητα ii, ικανοποιει την iii
αν και μονο αν ικανοποιει την iv.

Συμφωνα με τα παραπανω, ο ορισμος της οικογενειας $\mathcal{B}(X)$ των Borel
υποσυνολων του χωρου X , μπορει να εκφραστει πιο συντομα και ως εξης. Η
 $\mathcal{B}(X)$ ειναι η μικροτερη οικογενεια $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}(X)$ που ικανοποιει τις συνθηκες:

i') Αν G ειναι ανοικτο υποσυνολο του X , τοτε $G \in \mathcal{Y}$.

ii) Αν $A \in \mathcal{Y}$, τοτε $X - A \in \mathcal{Y}$.

iii) Αν για καθε $n \in \omega$: $A_n \in \mathcal{Y}$, τοτε $\bigcup_{n \in \omega} A_n \in \mathcal{Y}$.

Θα γνωρισουμε τωρα εναν αλλον τροπο ορισμου των Borel συνολων.

Θα ορισουμε την οικογενεια των Borel συνολων βημα-βημα με υπερπε-
περασμενη επαγωγη.

Ξεκινουμε απο την οικογενεια $(\mathcal{G})$ των ανοικτων συνολων του χωρου.

Στα επομενα βηματα θα φροντισουμε να ικανοποιουνται οι συνθηκες ii και
iii. Στο πρωτο βημα παιρνουμε την οικογενεια των συμπληρωματων των α-
νοικτων συνολων και τις αριθμησιμες ενωσεις αυτων των συμπληρωματων.
Σχηματιζουμε ετσι μια οικογενεια συνολων (τα F_σ συνολα) που περιεχει
την οικογενεια $(\mathcal{G})$ των κλειστων συνολων και ειναι προφανως κλειστη ως
προς αριθμησιμες ενωσεις (δηλαδη ικανοποιει τη συνθηκη iii). Η νεα αυ-
τη οικογενεια δεν ειναι ομως κλειστη ως προς συμπληρωματα (δεν ικανο-
ποιειται δηλαδη η συνθηκη ii).

Συνεχιζουμε τη διαδικασια, παιρνοντας στο δευτερο βημα τα συμπλη-
ρωματα των F_σ συνολων και τις αριθμησιμες ενωσεις αυτων των συμπληρω-
ματων. Η νεα οικογενεια (των $G_{\delta\sigma}$ συνολων) ικανοποιει τη συνθηκη iii

και δεν ικανοποιει την ii.

Συνεχιζουμε την παραπανω διαδικασια επαγωγικα. Στο βημα $n+1$ (για $n \in \omega$) οριζουμε μια οικογενεια συνολων Σ_{n+1} . Αυτη αποτελείται απο τις αριθμησιμες ενωσεις συμπληρωματων στοιχειων της προηγουμενης οικογενειας, δηλαδη της Σ_n . Παιρνουμε τωρα την ενωση των Σ_n . Προκυπτει μια οικογενεια συνολων που ικανοποιει τη συνθηκη ii ($A \in \Sigma_n \rightarrow X - A \in \Sigma_{n+1}$) αλλα δεν ειναι κλειστη ως προς αριθμησιμες ενωσεις, δηλαδη δεν ικανοποιει τη συνθηκη iii.

Η διαδικασια μπορεί να συνεχιστεί με υπερπεπερασμενη επαγωγή. Όπως ειδαμε πιο πανω, δεν αρκει η απλη, πεπερασμενη επαγωγή. Πριν διατυπωσουμε τον ορισμο, εισαγουμε μερικους συμβολισμους.

Εστω X συνολο και $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Με $\mathcal{G}(\mathcal{Y})$ συμβολιζουμε την οικογενεια των συμπληρωματων στοιχειων της οικογενειας $\mathcal{Y}$. Εχουμε δηλαδη

$$\mathcal{G}(\mathcal{Y}) = \{X - A : A \in \mathcal{Y}\}.$$

Αν $A \in \mathcal{Y}$, εχουμε προφανως οτι $X - A \in \mathcal{G}(\mathcal{Y})$. Με $\mathcal{F}(\mathcal{Y})$ συμβολιζουμε την οικογενεια των αριθμησιμων ενωσεων στοιχειων της οικογενειας $\mathcal{Y}$, δηλαδη

$$\mathcal{F}(\mathcal{Y}) = \left\{ \bigcup_{n \in \omega} A_n : (\forall n \in \omega) (A_n \in \mathcal{Y}) \right\}.$$

Ευκολα βλεπουμε οτι, για οποιαδηποτε οικογενεια $\mathcal{Y}$, η $\mathcal{F}(\mathcal{Y})$ ειναι κλειστη ως προς αριθμησιμες ενωσεις.

Εστω X Ευκλειδειος (η γενικότερα μετρικος) χωρος. Με υπερπεπερασμενη επαγωγή, οριζουμε για $\xi < \omega_1$:

$$\Sigma_0 = \mathcal{G} = \text{"η οικογενεια των ανοικτων συνολων του } X\text{"}.$$

$$\Sigma_{\xi+1} = \mathcal{F}(\mathcal{G}(\Sigma_\xi)).$$

$$\Sigma_\lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} \Sigma_\xi \quad (\text{για οριακο } \lambda \neq 0).$$

Εχουμε δηλαδη:

$$A \in \Sigma_0 \leftrightarrow A \text{ ειναι ανοικτο υποσυνολο του } X.$$

$$A \in \Sigma_{\xi+1} \leftrightarrow \text{υπαρχει ακολουθια } (B_n)_{n \in \omega} \text{ στοιχειων του } \Sigma_\xi \text{ ωστε } A = \bigcup_{n \in \omega} (X - B_n).$$

$$A \in \Sigma_\lambda \leftrightarrow \text{για καποιο } \xi < \lambda: A \in \Sigma_\xi \quad (\text{αν } \lambda \text{ οριακος, } \lambda \neq 0).$$

Θετουμε

$$\Sigma = \bigcup_{\xi < \omega_1} \Sigma_\xi.$$

Ευκολα ελεγχεται οτι η οικογενεια Σ :

(1) Περιεχει τα ανοικτα συνολα.

(2) Ειναι κλειστη ως προς συμπληρωματα.

Αποδεικνυεται οτι τα κλειστα συνολα ειναι αριθμησιμες τομες ανοικτων συνολων ($F \in \mathcal{G}_\Sigma$). Συνεπως, τα ανοικτα συνολα ειναι αριθμησιμες ενωσεις κλειστων συνολων. Εχουμε δηλαδη $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}_\Sigma$ ή ισοδυναμα:

(3) $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1$.

Με υπερπεπερασμένη επαγωγή μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

(4) Για κάθε $\xi < \omega_1$: $\Sigma_\xi \subseteq \Sigma_{\xi+1}$ και γενικότερα, για $\xi \leq \eta < \omega_1$: $\Sigma_\xi \subseteq \Sigma_\eta$.

Με βάση την πρόταση 6, αποδεικνύεται τώρα ευκολά ότι η Σ :

(5) Είναι κλειστή ως προς αριθμησιμες ενώσεις.

Απο τα παραπάνω είναι φανερό ότι η οικογένεια Σ ικανοποιεί τις συνθήκες i', ii και iii (σελίδα 132) του κλασσικού ορισμού των Borel συνόλων. Περιέχει λοιπόν την οικογένεια $\mathcal{B}(X)$ που είναι η μικρότερη με αυτές τις ιδιότητες. Έχουμε δηλαδή:

$$\mathcal{B}(X) \subseteq \Sigma.$$

Ισχύει και το αντιστρόφιο. Με υπερπεπερασμένη επαγωγή αποδεικνύεται ότι για κάθε $\xi < \omega_1$ ισχύει: $\Sigma_\xi \subseteq \mathcal{B}(X)$ (ασκήση 6.15 iv). Επομένως έχουμε:

$$\Sigma \subseteq \mathcal{B}(X).$$

Αρα οι οικογένειες Σ και $\mathcal{B}(X)$ είναι ίσες.

Βλέπουμε λοιπόν ότι και οι δύο ορισμοί μας δίνουν την ίδια οικογένεια συνόλων.

Παρατήρηση. Αποδεικνύεται (η απόδειξη δεν είναι ευκολή) ότι η υπερπεπερασμένη ακολουθία $(\Sigma_\xi)_{\xi < \omega_1}$ είναι γνησία αυξουσα, δηλαδή ότι για κάθε $\xi < \omega_1$ υπάρχουν σύνολα που ανήκουν στην Σ_ξ και δεν ανήκουν σε καμία Σ_η για $\eta < \xi$. Αυτό σημαίνει ότι τα ω_1 βήματα του αναδρομικού ορισμού ήταν απαραίτητα. Για κάθε $\alpha < \omega_1$, η ένωση $\bigcup_{\xi < \alpha} \Sigma_\xi$ γνησία περιέχεται στην οικογένεια $\mathcal{B}(X)$ των Borel υποσυνόλων του χώρου X .

Το τελείο μέρος κλειστού συνόλου.

Θα δούμε παρακάτω πως κατασκευάζεται το λεγόμενο τελείο μέρος ενός κλειστού υποσυνόλου του $\mathbb{R}$. Ο Cantor χρησιμοποίησε αυτή την κατασκευή για να αποδείξει μια σημαντική ιδιότητα των κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$.

Ενα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ λέγεται τελείο, όταν δεν περιέχει μεμονωμένα σημεία, δηλαδή αν κάθε στοιχείο του είναι σημείο συσσωρευσης.

Η ακολουθία πρόταση είναι γνωστή ως θεώρημα των Cantor-Bendixson:

"Κάθε κλειστό υποσύνολο F του $\mathbb{R}$ είναι ένωση δύο ξένων συνόλων

$$F = T \cup A,$$

όπου το T είναι τελείο και το A είναι το πολύ αριθμησιμο".

Αποδεικνύεται ότι για κάθε F , η παραπάνω παράσταση του συνόλου

F είναι μοναδική. Το σύνολο T λέγεται τελειό μέρος του F .

Το τελείο μέρος ενός αριθμήσιμου συνόλου είναι το κενό σύνολο. Τα υπεραριθμήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ έχουν μη κενό τελείο μέρος.

Θα κατασκευάσουμε το τελείο μέρος ενός δοσμένου κλειστού συνόλου F , ξεκινώντας από το F και αφαιρώντας βήμα-βήμα τα μεμονωμένα σημεία. Αν από το F αφαιρέσουμε τα μεμονωμένα σημεία, έχουμε ένα κλειστό υποσύνολο F' του F που δεν είναι υποχρεωτικά τελείο. Το F' μπορεί να έχει μεμονωμένα σημεία.

Εισαχούμε πρώτα μια βοηθητική έννοια.

Παραγωγή των Cantor-Bendixson ενός συνόλου $X \subseteq \mathbb{R}$ λέμε το σύνολο X' των σημείων συσσωρευσης του X .

Ευκολά αποδεικνύεται ότι για κάθε X , το σύνολο X' είναι κλειστό. Αν το σύνολο X είναι κλειστό, τότε περιέχει την παραγωγή του, δηλαδή έχουμε $X' \subseteq X$. Το $X - X'$ είναι τότε το σύνολο των μεμονωμένων σημείων του X . Το σύνολο $X - X'$ είναι το πολύ αριθμήσιμο (ασκήση 6.16). Είναι φανερό ότι ένα κλειστό σύνολο X είναι τελείο εάν και μόνον εάν ισχύει $X = X'$.

Εστω F κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Με υπερπεπερασμένη επαγωγή, για $\xi < \omega_1$ ορίζουμε την παραγωγή Cantor-Bendixson F_ξ τάξης ξ του συνόλου F .

$$\begin{aligned} F_0 &= F. \\ F_{\xi+1} &= (F_\xi)'. \\ F_\lambda &= \bigcap_{\xi < \lambda} F_\xi \quad (\text{για οριακό } \lambda \neq 0). \end{aligned}$$

$H(F_\xi : \xi < \omega_1)$, που ορίσαμε πιο πάνω, είναι μια φθίνουσα υπερπεπερασμένη ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Μια τέτοια ακολουθία δεν μπορεί να είναι γνήσια φθίνουσα (ασκήση 6.17). Υπάρχει λοιπόν διατακτικός $\alpha < \omega_1$ τέτοιος ώστε $F_{\alpha+1} = F_\alpha$. Η τελευταία ισότητα σημαίνει ότι το σύνολο F_α είναι τελείο, αφού $F_\alpha = (F_\alpha)'$. Για κάθε $\beta \geq \alpha$ έχουμε τότε $F_\beta = F_\alpha$, δηλαδή η $(F_\xi : \xi < \omega_1)$ σταθεροποιείται.

Θα κλείσουμε το κεφάλαιο με την απόδειξη του θεωρήματος Cantor-Bendixson. Παιρνουμε ως T το παραπάνω F_α . Το T είναι τελείο υποσύνολο του F . Αρκεί να δείξουμε ότι η διαφορά $A = F - T$ είναι το πολύ αριθμήσιμη. Από τον ορισμό της ακολουθίας $(F_\xi : \xi < \omega_1)$ έχουμε ότι, για κάθε $\xi < \omega_1$, οι διαφορές $F_\xi - F_{\xi+1} = F_\xi - (F_\xi)'$ είναι το πολύ αριθμήσιμες. Με υπερπεπερασμένη επαγωγή βλέπουμε ότι, για κάθε $\beta < \omega_1$, η διαφορά $F_0 - F_\beta$ είναι το πολύ αριθμήσιμη. Πραγματικά, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι:

$$\begin{aligned} F_0 - F_{\xi+1} &\subseteq (F_0 - F_\xi) \cup (F_\xi - F_{\xi+1}), \\ F_0 - F_\lambda &= F_0 - \left(\bigcap_{\xi < \lambda} F_\xi \right) = \bigcup_{\xi < \lambda} (F_0 - F_\xi) \quad (\text{για οριακό } \lambda \neq 0). \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6.1 Αποδειξτε ότι οι προτάσεις 1 και 2 (σελιδα 125) είναι ισοδυναμες με το αξίωμα επιλογής.

6.2 Αποδειξτε ότι το αξίωμα επιλογής είναι ισοδυναμο με την πρόταση: "Για κάθε σχέση R υπάρχει συναρτηση f τετοια ώστε $\text{dom}(R)=\text{dom}(f)$ ".

6.3 Αποδειξτε ότι αν $f:A \xrightarrow[\text{επ}]{\quad} B$, τότε $\text{card}(B) \leq \text{card}(A)$.

6.4 Εστω R γνήσια γραμμική διαταξη του συνόλου A . Αποδειξτε ότι η R είναι καλή διαταξη του A αν και μόνο αν δεν υπάρχει απειρη R -φθίνουσα ακολουθία στοιχείων του A . Συγκρίνετε με την πρόταση 1 του κεφαλαίου 5 (σελιδα 90).

6.5 Εστω A απειρο σύνολο. Χρησιμοποιώντας μια συναρτηση επιλογής για τα υποσύνολα του A , αποδειξτε ότι το A περιέχει αριθμησιμο υποσύνολο, και συνεπώς ότι είναι ισοπληθικο με κάποιο γνήσιο υποσύνολο του (ασκήση 4.14).

6.6 Εστω $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τετοιο ώστε:

$$|x-a| < \delta \wedge |f(x)-f(a)| \geq \varepsilon$$

Αποδειξτε ότι τότε υπάρχει ακολουθία πραγματικών αριθμών $(x_n)_{n \in \omega}$ με όριο το a για την οποία η ακολουθία $(f(x_n))_{n \in \omega}$ δεν συγκλίνει στο $f(a)$.

6.7 Εστω $(A_t)_{t \in T}$ οικογενεια μη κενών συνόλων. Μερική συναρτηση επιλογής για την $(A_t)_{t \in T}$ λέμε μια συναρτηση f με $\text{dom}(f) \subseteq T$ τετοια ώστε για κάθε $t \in T$: $f(t) \in A_t$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα των Kuratowski-Zorn, αποδειξτε στο σύνολο των μερικών συναρτησεων επιλογής υπάρχει μείζον (maximal ως προς τον εγκλεισμό $\subseteq$) στοιχείο. Δειξτε ότι μια τετοια συναρτηση είναι συναρτηση επιλογής για την οικογενεια $(A_t)_{t \in T}$.

6.8 Εστω A σύνολο και $b \notin A$. Εστω $W:\mathcal{P}A - \{\emptyset\} \rightarrow A$ μια συναρτηση επιλογής για τα υποσύνολα του A . Επεκτείνουμε την W στο $\mathcal{P}A$ θέτοντας $W(\emptyset)=b$. Για οποιονδήποτε διατακτικο αριθμο α , με υπερπεπερασμενη επαγωγή, ορίζουμε για $\xi < \alpha$:

$$x_\xi = W(A - \{x_\eta : \eta < \xi\}).$$

Αποδειξτε ότι αν $x_\alpha \neq b$, τότε ο διατακτικός αριθμος α κυριαρχείται από το A . Δειξτε ότι υπάρχει α ώστε $x_\alpha = b$. Δειξτε ότι για τον μικροτερο α

μ' αυτή την ιδιότητα, έχουμε $\Lambda = \{x_\eta : \eta < \alpha\}$ και συνεπώς ότι το σύνολο Λ (ως πεδίο τιμών μιας αμφιμονοσήμαντης υπερπεπερασμένης ακολουθίας) δε-
χεται καλή διατάξη.

6.9 Εστω $\langle B_i, \rho_i \rangle : i \in I$ μια οικογένεια καλά διατεταγμένων συνολών. Ας υποθέσουμε ότι για οποιαδήποτε $i, j \in I$:

$$\langle B_i, \rho_i \rangle \leq \langle B_j, \rho_j \rangle \quad \dot{\eta} \quad \langle B_j, \rho_j \rangle \leq \langle B_i, \rho_i \rangle,$$

όπου $\leq$ είναι η σχέση που ορίζεται από την συνθήκη (*) στη σελίδα 128. Θετούμε

$$B = \bigcup_{i \in I} B_i \quad \text{και} \quad \rho = \bigcup_{i \in I} \rho_i.$$

Αποδείξτε ότι η σχέση ρ είναι καλή διατάξη του B και για κάθε $i \in I$:

$$\langle B_i, \rho_i \rangle \leq \langle B, \rho \rangle.$$

6.10 Αποδείξτε ότι αν ισχύει $c = \aleph_1$, τότε κάθε απειρο, μη αριθμησιμο σύνολο πραγματικών αριθμών έχει τον πληθικό αριθμό του συνεχούς.

6.11 Αποδείξτε, χωρίς τη χρήση του αξιωματος επιλογής, ότι για οποι-
οσδήποτε διατακτικούς αριθμούς $\alpha < \omega_1$ και $\beta < \omega_1$ ισχύει:

$$i) \alpha + \beta < \omega_1,$$

$$ii) \alpha \cdot \beta < \omega_1.$$

6.12 Εστω $(A_n)_{n \in \omega}$ ακολουθία συνολών. Χρησιμοποιώντας καταλλήλα το αξι-
ωμα επιλογής και την πρόταση 14 στη σελίδα 72, αποδείξτε ότι αν καθε-
να από τα σύνολα A_n (για $n \in \omega$) είναι το πολύ αριθμησιμο, τότε η ένωση
 $\bigcup_{n \in \omega} A_n$ είναι το πολύ αριθμησιμη.

6.13 Αποδείξτε ότι για κάθε ακολουθία $(\alpha_n)_{n \in \omega}$ αριθμησιμων διατακτικων
αριθμών, ο διατακτικός αριθμός $\bigcup_{n \in \omega} \alpha_n$ (αρα και ο $\sup\{\alpha_n : n \in \omega\}$) είναι α-
ριθμησιμος. Δείξτε δηλαδή ότι:

$$(\forall n \in \omega)(\alpha_n < \omega_1) \rightarrow \left(\bigcup_{n \in \omega} \alpha_n < \omega_1 \right).$$

6.14 Δείξτε ότι το δυναμοσύνολο του $\mathbb{R}$ ικανοποιεί τις συνθήκες i-iv του
ορισμού των Borel συνολών (σελίδα 131). Αποδείξτε ότι αν $Y, Z \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ικα-
νοποιούν αυτές τις συνθήκες, τότε και $Y \cap Z$ επίσης τις ικανοποιεί. Απο-
δείξτε γενικότερα ότι αν οι συνθήκες ικανοποιούνται για κάθε $Y \in \mathcal{I}$ ($\mathcal{I} \neq \emptyset$,
 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$), τότε ικανοποιούνται και από την τομή $\bigcap \mathcal{I}$. Αποδείξτε ότι υ-
παρχει η οικογένεια των Borel υποσυνολών του $\mathbb{R}$.

6.15 Εστω Σ η οικογένεια που ορίστηκε στη σελίδα 133. Αποδείξτε ότι:

i) Η Σ περιέχει τα ανοικτά σύνολα και είναι κλειστή ως προς συμπλη-
ρώματα.

ii) Για οποιαδήποτε $\xi \leq \omega_1$ ισχύει: $\Sigma_\xi \subseteq \Sigma_\eta$ (θεωρήστε δεδομένο ότι $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1$

και χρησιμοποιηστε υπερπεπερασμενη επαγωγη).

iii) Η Σ είναι κλειστη ως προς αριθμησιμες ενωσεις.

iv) Για καθε $\xi < \omega_1$: $\Sigma_\xi \subseteq \mathcal{B}(X)$.

6.16 Εστω $X \subseteq \mathbb{R}$. Δειξτε οτι για καθε $x \in X$ που είναι μεμονωμενο σημειο του X υπάρχουν ρητοι αριθμοι q και r τετοιιοι ωστε το x είναι μοναδικο σημειο της τομης του X με το ανοικτο διαστημα $(q-r, q+r)$. Αποδειξτε οτι το συνολο $X - X'$ είναι το πολυ αριθμησιμο.

6.17 Εστω X, Y κλειστα υποσυνολα του $\mathbb{R}$. Εστω $X \subset Y$. Δειξτε οτι υπάρχουν ρητοι αριθμοι q και r , τετοιιοι ωστε το διαστημα $(q-r, q+r)$ τεμνει το Y και είναι ξενο με το X . Με βαση το παραπανω, αποδειξτε οτι καμια φθινουσα υπερπεπερασμενη ακολουθια $(F_\xi)_{\xi < \omega_1}$ κλειστων υποσυνολων του $\mathbb{R}$ δεν είναι γνησια φθινουσα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ. ΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΟΛΩΝ.

Τα A1 ως A9 είναι αξιώματα της θεωρίας συνόλων ZF (Zermelo-Fraenkel). Τα A1 ως A10 είναι αξιώματα της θεωρίας συνόλων ZFC (ZF+Choice).

A1. Αξίωμα εκτάσης.

$$\forall A \forall B (\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A=B).$$

"Για οποιαδήποτε συνολα A και B, αν τα A, B έχουν τα ίδια στοιχεία, τότε είναι ίσα".

A2. Αξίωμα υπάρξης κενου συνολου.

$$\exists y \forall x x \notin y.$$

"Υπάρχει ένα συνολο που δεν έχει κανένα στοιχειο".

A3. Αξίωμα ζευγους.

$$\forall a \forall b \exists c (\forall x (x \in c \leftrightarrow x = a \vee x = b)).$$

"Για οποιαδήποτε a, b υπάρχει ένα συνολο c του οποίου στοιχεία είναι το a, το b, και μονον αυτα".

A4. Αξίωμα ενωσης.

$$\forall A \exists B (\forall x (x \in B \leftrightarrow (\exists y \in A) x \in y)).$$

"Για κάθε συνολο A υπάρχει ένα συνολο B στο οποίο ανηκουν τα στοιχεία των στοιχειων του A, και μονον αυτα".

A5. Αξίωμα δυναμοσυνολου.

$$\forall A \exists B (\forall x (x \in B \leftrightarrow x \subseteq A)).$$

"Για κάθε συνολο A υπάρχει ένα συνολο B που αποτελείται ακριβως απο τα υποσυνολα του A".

A6. Αξίωμα απειρου.

$$\exists A (\emptyset \in A \wedge \forall x (x \in A \rightarrow x \cup \{x\} \in A)).$$

"Υπάρχει επαγωγικο συνολο, δηλαδη ένα συνολο A στο οποίο ανηκει το κενο συνολο και μαζί με κάθε στοιχειο x του A, στο A ανηκει και το $x \cup \{x\}$ (το επομενο του x συνολο)".

A7. Αξιωματοικο σχημα διαχωρισμου υποσυνολου.

Εστω Φ τυπος της γλωσσας της θεωρίας συνολου.

$$\forall A \exists B (\forall x (x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge \Phi(x))).$$

"Για κάθε συνολο A υπάρχει ένα συνολο B στο οποίο ανηκουν εκείνα απο τα στοιχεία του A που ικανοποιουν τον τυπο Φ , και μονον αυτα".

A8. Αξιωματικό σχήμα αντικατάστασης.

Εστω $\Phi(x, y)$ τυπός της γλώσσας της θεωρίας συνόλων, τέτοιος ώστε:
 $\forall x \exists! y \Phi(x, y)$ (δηλαδή ο $\Phi(x, y)$ ορίζει αντιστοιχισμό).

$$\forall A \exists B (\forall y (y \in B \leftrightarrow (\exists x \in A) \Phi(x, y))).$$

"Για κάθε σύνολο A υπάρχει ένα σύνολο B του οποίου στοιχεία είναι τα y που για κάποιο x του A ικανοποιούν τον τύπο $\Phi(x, y)$, και μόνον αυτά".

A9. Αξίωμα κανονικότητας.

$$\forall x (x \neq \emptyset \rightarrow (\exists y (y \in x \wedge (\forall z \in x) z \notin y))).$$

"Σε κάθε μη κενό σύνολο υπάρχει ϵ -ελάχιστον στοιχείο. Δηλαδή, αν το σύνολο x δεν είναι κενό, τότε υπάρχει σ' αυτό ένα y τέτοιο ώστε κανένα στοιχείο του x δεν ανήκει στο y (το y δεν έχει στο x ϵ -προηγούμενο)".

A10. Αξίωμα επιλογής.

$$\forall A ((\forall x \in A) x \neq \emptyset \wedge (\forall x \in A) (\forall y \in A) (x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset) \rightarrow \exists S (\forall x \in A) \exists u (S \cap x = \{u\})).$$

"Για κάθε σύνολο A μη κενών, ξένων ανά δυο συνόλων, υπάρχει ένα σύνολο S που έχει ένα ακριβώς κοινό στοιχείο με κάθε σύνολο του A ".