ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

Τελικό Διαγώνισμα-Εαρινό Εξάμηνο 2013
Διάρκεια 2.5 ώρες. Μπορείτε να φύγετε μετά μία ώρα.
Παρακαλώ αφήστε τα θέματα και το πρόχειρο. Καλή επιτυχία!

(**1**) (2 μονάδες) Έστω (x_n) φθίνουσα ακολουθία αριθμών ώστε $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

(i) **(Θεωρία)** Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n$ συγκλίνει.

(ii) Δείξτε ότι υπάρχει υποακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} x_{k_n} < +\infty$.

(**2**) (2 μονάδες) (i) Έστω $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2-\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2} & x \neq 0, \\ c & x = 0. \end{cases}$$

Δείξτε ότι υπάρχει $c \neq 0$ ώστε η f να είναι συνεχής στο 0.

(ii) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(2 - \sqrt{1+1/n} - \sqrt{1-1/n})$.

(**3**) (2 μονάδες) (i) **(Θεωρία)** Έστω $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι η f είναι φραγμένη.

(ii) Έστω $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής ώστε $\limsup_{x\to+\infty} f(x) < +\infty$. Δείξτε ότι η f είναι φραγμένη άνω.

(**4**) (2 μονάδες) (i) Έστω P πολυώνυμο βαθμού $n \geq 1$. Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει ακριβώς n διαφορετικές λύσεις. Δείξτε ότι η εξίσωση $P'(x) = 0$ έχει ακριβώς $n-1$ διαφορετικές λύσεις.

(ii) Δείξτε ότι η εξίσωση

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \cdots + \frac{1}{x-2013} = 0$$

έχει ακριβώς 2012 διαφορετικές λύσεις.

(**5**) (2 μονάδες) (i) Έστω $c > 0$ σταθερά και $f\colon [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε $f'(x) \geq c$ για κάθε $x \geq 1$. Δείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(ii) Δώστε παράδειγμα παραγωγίσιμης συνάρτησης $f\colon [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ ώστε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \geq 1$ όμως $\lim_{x\to+\infty} f(x) \neq +\infty$.

(**6**) (2 μονάδες) Έστω $p \geq 1$ πραγματικός αριθμός. Δείξτε ότι για κάθε $a, b \geq 0$ έχουμε

(i) $(a+b)^p \geq a^p + b^p$.

(ii) $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$.
