ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

Τελικό Διαγώνισμα-Σεπτέμβριος 2012-Διδάσκων:Νίκος Φραντζικινάκης

Διάρκεια **3 ώρες**. Μπορείτε να φύγετε μετά μία ώρα.

(**1**) (2 Μονάδες) Έστω (x_n) ακολουθία με τύπο

$$x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}.$$

(**i**) Υπολογίστε τα $\sup\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, $\inf\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, $\limsup_{n\to\infty} x_n$, $\liminf_{n\to\infty} x_n$.

(**ii**) Είναι η ακολουθία (x_n) *Cauchy*;

(**iii**) Υπάρχει υποακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_{k_n}$ να συγκλίνει;

(**2**) (2.5 Μονάδες) (**i**) Έστω (x_n) ακολουθία τέτοια η οποία ορίζεται αναδρομικά ως εξής: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n/n$ για $n \in \mathbb{N}$. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_n$.

(**ii**) Βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \log n}$.

(**3**) (2 Μονάδες) (**i**) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και $f(x) \in \mathbb{Q}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

(**ii**) Έστω $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in [a,b]$ υπάρχει $y \in [a,b]$ τέτοιο ώστε $|f(y)| \leq |f(x)|/2$. Δείξτε ότι υπάρχει $z \in [a,b]$ τέτοιο ώστε $f(z) = 0$.

(**4**) (2 Μονάδες) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $|f'(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(**i**) Δείξτε ότι $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

(**ii**) Δείξτε ότι η ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n = f(1/n)$ συγκλίνει.

(**iii**) Εαν επιπλέον $f(0) = 0$, δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(1/n^2)$ συγκλίνει.

(**5**) (2.5 Μονάδες) (**i**) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 2.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2.$$

(**ii**) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = 2.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{2012}} = +\infty.$$

Καλή επιτυχία !!