

Απειροστικός Ι (Τμήμα Α)

Διαγώνισμα Εξεταστικής Σεπτέμβρη 2017

Διάρκεια 2.5 ώρες. Μπορείτε να φύγετε μετά μία ώρα.

Δεν επιτρέπεται να έχετε ηλεκτρονικές συσκευές δίπλα σας ή πάνω σας.¹

Παρακαλώ αφήστε τα θέματα και το πρόχειρο. Καλή επιτυχία!

(1) (2 μονάδες) (i) Υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\log n]}{\sqrt{n}}.$$

(ii) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση την ακολουθία (x_n) που ικανοποιεί $x_1 = 2$ και $x_{n+1} = x_n + e^{-x_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

(2) (1.5 μονάδες) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n + 5^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{\sqrt{n}}.$$

(3) (2 μονάδες) (i) Βρείτε την τιμή του a για την οποία η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x)-x}{x^2} & x \neq 0, \\ a & x = 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο 0.

(ii) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$.

(4) (1.5 μονάδες) (i) Έστω $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί $f(0) = f(1)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1]$ ώστε $f(\xi) = f\left(\xi + \frac{1}{2}\right)$.

(ii) Έστω $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί $f(0) = f(1) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1]$ ώστε $f'(\xi) = f(\xi)$.

(5) (2 μονάδες) Υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n^2} \int_0^n e^{t^2} dt.$$

(6) (2 μονάδες) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα (το τρίτο ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο)

$$\int_0^1 \log(x^2 + 1) dx, \quad \int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx, \quad \int_0^1 \log x dx.$$

¹Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ' ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.