

## Απειροστικός Ι (Τμήμα Β)

### Διαγώνισμα Εξεταστικής Ιανουαρίου 2018

Διάρκεια 2.5 ώρες. Μπορείτε να φύγετε μετά μία ώρα.

Δεν επιτρέπεται να έχετε ηλεκτρονικές συσκευές δίπλα σας ή πάνω σας.<sup>1</sup>

Παρακαλώ αφήστε τα θέματα και το πρόχειρο. Καλή επιτυχία!

(1) (2 μονάδες) (i) Υπολογίστε τα όρια των ακολουθιών (καθώς  $n \rightarrow +\infty$ )

$$x_n = \frac{1}{n + \sqrt{1}} + \frac{1}{n + \sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n + \sqrt{n}}, \quad y_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

(ii) Έστω ότι η  $(z_n)$  ικανοποιεί  $z_1 = 2$  και  $z_{n+1} = 2z_n - 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Δείξτε ότι  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = +\infty$ .

(2) (2 μονάδες) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log(n^2 + 1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{2n} e^{-x^2} dx.$$

(3) (1.5 μονάδες) Για ποιές τιμές του  $a \in \mathbb{R}$  είναι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x^a) & x > 0, \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

(i) Συνεχής στο 0; (ii) Παραγωγίσιμη στο 0; (iii) Δύο φορές παραγωγίσιμη στο 0;

(4) (1.5 μονάδες) Δείξτε ότι η εξίσωση

$$\int_1^x e^{t^2} dt = x$$

έχει ακριβώς μία λύση.

(5) (1.5 μονάδες) (i) Δείξτε ότι η συνάρτηση  $f(x) = e^{\sqrt{x}}$  είναι κυρτή στο  $[1, +\infty)$ .

(ii) Δείξτε ότι για  $x \geq y \geq 1$  ισχύουν οι ανισότητες

$$\sqrt{\frac{x+y}{2}} \leq \log\left(\frac{e^{\sqrt{x}} + e^{\sqrt{y}}}{2}\right), \quad e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{y}} \leq \frac{1}{2} e^{\sqrt{x}} (x - y).$$

(6) (2.5 μονάδες) (i) Υπολογίστε τα αόριστα ολοκληρώματα

$$\int \frac{x+1}{x^2+1} dx, \quad \int e^{2x} \cos(e^x) dx.$$

(ii) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$\int_0^1 \frac{1}{x(x+1)(x+2)} dx, \quad \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

<sup>1</sup>Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ' ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.