ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Τελικό διαγώνισμα-Σεπτέμβρης 2012, Διδάσκων: Νίκος Φραντζικινάκης

Επιτρέπεται μόνο μία σελίδα με σημειώσεις. Διάρκεια 3 ώρες. Καλή επιτυχία!!

(**1**) (2 μονάδες) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *συνεχής* 2π-περιοδική συνάρτηση. Απαντήστε με σωστό/λάθος και αιτιολογήστε την απάντησή σας με μία-δύο περιεκτικές προτάσεις:

(**i**) Η σειρά *Fourier* της f συγκλίνει κατά σημείο στην f για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

(**ii**) Η σειρά *Fourier* της f συγκλίνει στην f στον $L^2([-\pi,\pi])$.

(**iii**) Εαν $\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(n)| < \infty$, τότε η σειρά *Fourier* της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

(**iv**) Εαν $f \in C^2(\mathbb{R})$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(n)| < \infty$.

(**2**) (1.5 μονάδες) Πάρτε ως δεδομένο ότι το ανάπτυγμα *Fourier* της συνάρτησης $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2$ είναι $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos(nx)$. Υπολογίστε το $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

(**3**) (2 μονάδες) Έστω $K_n\colon [-\pi,\pi] \to [0,\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, καλοί πυρήνες, δηλαδή ολοκληρώσιμες συναρτήσεις που ικανοποιούν τις συνθήκες (a) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\, dx = 1$, και (b) για κάθε $\delta > 0$ έχουμε $\lim_{\delta\to 0} \int_{\delta\le|x|\le\pi} K_n(x)\, dx = 0$. Δείξτε ότι για κάθε $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} (f * K_n)(x) = f(x).$$

Υπενθυμίζω $(f * K_n)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)K_n(y)\, dy$.

(**4**) (1.5 μονάδες) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση.

(**i**) Δείξτε ότι

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big(f(x) - f\big(x + \frac{\pi}{n}\big)\Big) e^{-inx}\, dx.$$

(**ii**) Εαν η f είναι *Lipschitz*-συνεχής, δείξτε ότι υπάρχει σταθερά C ώστε $|\hat{f}(n)| \le C/n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(**5**) (2.5 μονάδες) Με $\{t\}$ συμβολίζουμε το κλασματικό του t.

(**i**) Κάνοντας χρήση του κριτήριου ισοκατανομής του *Weyl* δείξτε ότι εάν η ακολουθία (x_n) είναι ισοκατανεμημένη στο $[0,1)$ και $\lim_{n\to\infty} y_n = c$, τότε η ακολουθία $(\{x_n + y_n\})$ είναι ισοκατανεμημένη στο $[0,1)$.

(**ii**) Δείξτε ότι η ακολουθία $(\{n^2\sqrt{2}/(n+1)\})$ είναι ισοκατανεμημένη στο $[0,1)$.

(**6**) (1.5 μονάδες) Έστω $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-y^2}e^{2xy}dy = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f \equiv 0$. (Πάρτε ως δεδομένο ότι $\hat{g}(\xi) \neq 0$ για $g(x) = e^{-x^2}$.)

Ορολογία: $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\ dx$, $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x}\ dx$, $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ εάν η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε φραγμένο διάστημα και υπάρχει $C \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \leq C/(1+x^2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f \in C^k(\mathbb{R})$ εάν η f είναι k φορές παραγωγίσιμη και η $f^{(k)}$ είναι συνεχής, η f είναι *Lipschitz*-συνεχής στο $\mathbb{R}$ εάν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.