ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Πρόοδος-Χειμερινό Εξάμηνο 2011, Διδάσκων: Νίκος Φραντζικινάκης

Επιτρέπεται μόνο μία σελίδα με σημειώσεις. Διάρκεια 1 ώρα και 45 λεπτά. Καλή επιτυχία!!

(1) (3.5 μονάδες) Για $a \in (0, \pi]$ έστω $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \mathbf{1}_{[-a,a]}(x)$.

(i) Δείξτε ότι $\hat{f}(0) = \frac{a}{\pi}$ και $\hat{f}(n) = \frac{\sin(na)}{\pi n}$ εάν $n \neq 0$.

(ii) Δείξτε ότι για κάθε $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{-a, a\}$ έχουμε

$$\mathbf{1}_{[-a,a]}(x) = \frac{a}{\pi} + \sum_{n \neq 0} \frac{\sin(na)}{\pi n} e^{inx}.$$

(iii) Υπολογίστε τα αθροίσματα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n} \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(na)}{n^2}.$$

(2) (3.5 μονάδες) **(i)** Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία μιγαδικών αριθμών και $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Δείξτε ότι υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\hat{f}(n) = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Δείξτε ότι *δεν* υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ για *κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Χρησιμοποιώντας το (i) δείξτε ότι υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ για *άπειρα* $n \in \mathbb{N}$.

(3) (3.5 μονάδες) Έστω V διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ορθοκανονική ακολουθία.

(i) Εάν $a_1, \ldots, a_N$ μιγαδικοί αριθμοί, δείξτε ότι

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} a_n\, e_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2.$$

(ii) Εάν $v \in V$, δείξτε ότι για κάθε $m \in \{1, \ldots, N\}$ τα διανύσματα $v - \sum_{n=1}^{N} < v, e_n > e_n$ και e_m είναι ορθογώνια.

(iii) Συνδυάζοντας τα (i), (ii), και το Πυθαγόρειο θεώρημα, δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{N} | < v, e_n > |^2 \leq \|v\|^2$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Συμπεράνεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} | < v, e_n > |^2$ συγκλίνει.