Αρμονική Ανάλυση (Μ 2115 ή Μ 210)

Φθινοπωρινό Εξάμηνο 2010-11 – Τελευταία τροποποίηση: April 10, 2011

Μιχάλης Κολουντζάκης

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης, Λεωφόρος Κνωσού, 714 09 Ηράκλειο, kolount AT gmail.com

Περιεχόμενα

Ωράριο

Τρίτη 3-5, στην αίθουσα Γ 104 και Πέμπτη 3-5 στην αίθουσα Θ 207. Έναρξη μαθημάτων: 20/9/10.

Ώρες γραφείου: Τρίτη 10-12 και γενικά μπορείτε να με βρίσκετε τα πρωινά 10-12 στο γραφείο μου (Γ 111, στο προκατασκευασμένο κτήριο της Κνωσού).

Περιγραφή του μαθήματος

Στο μάθημα αυτό, που γίνεται για πρώτη φορά σε προπτυχιακό επίπεδο στο τμήμα μας, θα δούμε κάποια βασικά πράγματα για την Αρμονική Ανάλυση (ανάλυση Fourier), κυρίως τη θεωρία των σειρών Φουριερ καθώς και ανάλυση Fourier σε πεπερασμένες κυκλικές ομάδες (αυτό συνήθως ονομάζεται πεπερασμένη ή διακριτή ανάλυση Fourier).

Η έμφαση του μαθήματος δεν είναι τόσο να εμβαθύνουμε στη "σκληρή" θεωρία των σειρών Fourier, πράγμα το οποίο δε μπορούμε να κάνουμε αφού δε μπορούμε να υποθέσουμε ως γνωστή τη θεωρία του ολοκληρώματος Lebesgue, αλλά να δούμε αρκετά παραδείγματα τόσο θεωρημάτων όσο και εφαρμογών (σε άλλα κομμάτια των

Μαθηματικών αλλά και σε άλλες επιστήμες) ώστε να αποκτήσουμε μια ευρύτερη αίσθηση για το που μπορεί να μας είναι χρήσιμη η Αρμονική Ανάλυση.

Βιβλίο

Δε θα ακολουθήσουμε κάποιο συγκεκριμένο βιβλίο μια και η ελληνική βιβλιογραφία δεν έχει κάτι το κατάλληλο.

Μπορείτε να συμβουλεύεστε τα βιβλία:

1. E. Stein and R. Shakarchi, *Fourier Analysis, and introduction*, Princeton Univ. Press, 2003
2. T. Körner, *Fourier Analysis*, Cambridge Univ. Press, 1988
3. A. Terras, *Fourier Analysis on Finite Groups and Applications*, Cambridge Univ. Press, 1999.

Η λίστα αυτή σε καμιά περίπτωση δε συμπεριλαμβάνει όλα τα καλά βιβλία που υπάρχουν για ανάλυση Fourier.

Επίσης εγώ θα γράφω κάποιες σύντομες σημειώσεις κατά τη διάρκεια του εξαμήνου τις οποίες και θα αναρτώ σε αυτή την ιστοσελίδα. Δε θα περιλαμβάνουν όμως τα πάντα τα οποία θα λέω μέσα στην τάξη γι΄ αυτό και συνιστώ να κρατάτε και δικές σας σημειώσεις.

Βαθμολογικό Σύστημα – Εξετάσεις

Εκτός από το τελικό διαγώνισμα που θα μετράει 70% του βαθμού θα υπάρχει και ένα ενδιάμεσο υποχρεωτικό διαγώνισμα που θα μετράει 30%. Αν κάποιος έχει σοβαρό λόγο να μη μπορεί να δώσει το ενδιάμεσο διαγώνισμα τότε παρακαλώ να μου το δηλώσει **μέχρι την Πα, 1 Οκτ. 2010**, ώστε να εξεταστεί αποκλειστικά με το τελικό διαγώνισμα. Για την περίοδο του Σεπτεμβρίου μετράει μόνο το διαγώνισμα Σεπτεμβρίου.

Ημερολόγιο Μαθήματος και σημειώσεις

Η σελίδα αυτή θα ενημερώνεται τουλάχιστον μετά από κάθε μάθημα και σκοπό έχει να μεταδίδει μερικές βασικές χρήσιμες πληροφορίες για το περιεχόμενο του μαθήματος (π.χ. τι να προσέξετε, υποδείξεις για λύσεις των ασκήσεων, κ.ά.) καθώς και για διαδικαστικά θέματα.

Επίσης θα φαίνονται σε αρκετή λεπτομέρεια αυτά που ειπώθηκαν στο μάθημα (ώστε να σας κατευθύνουν στο διάβασμά σας σε συνδυασμό και με τις δικές σας σημειώσεις).

Σπανίως θα βγαίνουν ανακοινώσεις που αφορούν το μάθημα σε χαρτί. **Παρακαλώ να συμβουλεύεστε αυτή τη σελίδα τουλάχιστον 2-3 φορές την εβδομάδα.**

1 Τρ, 21/9/10: Περιγραφή της Αρμονικής Ανάλυσης γενικά. Μιγαδικοί αριθμοί και μιγαδικές συναρτήσεις

Αρχίσαμε με μια γενική παρουσίαση του τι είναι Αρμονική Ανάλυση (ανάλυση Fourier) γενικά και περίπου τι πρόκειται να δούμε αυτό το εξάμηνο.

Έπειτα θυμίσαμε μερικά βασικά πράγματα για τους μιγαδικούς αριθμούς (πολλά από τα οποία μπορείτε να τα διαβάσετε σε διάφορα μέρη, για παράδειγμα στις σύντομες σημειώσεις του S. Boyd.

Συγκεκριμένα δώσαμε έμφαση στον τρόπο να εκφράζουμε τις βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\cos x, \sin x$ μέσω της εκθετικής συνάρτησης με μιγαδικό εκθέτη $z = x + iy$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y),$$

απλοποιώντας έτσι πολλούς υπολογισμούς με ημίτονα και συνημίτονα μετατρέποντάς τα σε εκθετικές συναρτήσεις με τους τύπους

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}). \tag{1.1}$$

Για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας τους άνω τύπους είναι πολύ εύκολο να υπολογίσει κανείς τα ημίτονα και συνημίτονα για το άθροισμα δύο τόξων $\cos(a + b), \sin(a + b)$, χωρίς να χρειάζεται να θυμάται τους τύπους.

✏ **1.1** *Χρησιμοποιώντας τους τύπους (1.1) βρείτε τύπους για τα* $\cos(a+b), \sin(a+b)$ *μέσω των τριγωνομετρικών αριθμών των* a, b.

Δείξαμε, με ένα απλό υπολογισμό, ότι

$$\int_0^{2\pi} e^{inx}\,dx = \begin{cases} 0 & (n \neq 0) \\ 2\pi & (n = 0) \end{cases}, \tag{1.2}$$

και έπειτα το χρησιμοποιήσαμε αυτό για να δείξουμε τις λεγόμενες σχέσεις ορθογωνιότητας ανάμεσα στις συναρτήσεις

$$1, \cos nx (n = 1, 2, 3, \ldots), \sin nx (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Δείξαμε δηλ. ότι αν f, g είναι δύο διαφορετικές από τις άνω συναρτήσεις τότε

$$\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx = 0.$$

✏ **1.2** *Δείξτε την ταυτότητα*

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\,dx = 0, \quad (m \neq n, m, n \geq 1)$$

χρησιμοποιώντας τους τύπους (1.1) όπως και το αποτέλεσμα (1.2).

Τέλος ορίσαμε τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα με περίοδο 2π: είναι οι πεπερασμένοι γραμμικοί συνδυασμοί των συναρτήσεων (μιγαδικά εκθετικά ή *χαρακτήρες*)

$$e_n(x) := e^{inx}, n \in \mathbb{Z}.$$

Ο *βαθμός* ενός τριγωνομετρικού πολυωνύμου $p(x)$ είναι ο ελάχιστος μη αρνητικός ακέραιος N τέτοιος ώστε να ισχύει

$$p(x) = \sum_{k=-N}^{N} p_k e^{ikx}, \tag{1.3}$$

για κάποια $p_k \in \mathbb{C}$. Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $f(x) = 1$ και $g(x) = \cos x$ είναι τριγωνομετρικά πολυώνυμα βαθμού 0 και 1 αντίστοιχα (χρησιμοποιώντας την (1.1)).

Αφού κάθε συνάρτηση $e_n(x) = e^{inx}$ είναι 2π-περιοδική (ισχύει δηλ. $e_n(x + 2\pi) = e_n(x)$ για κάθε x) είναι προφανές ότι κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι επίσης μια 2π-περιοδική συνάρτηση. Ένας από τους πρώτους μας στόχους στο μάθημα αυτό θα είναι να δείξουμε ότι "κάθε" 2π-περιοδική συνάρτηση μπορεί να προσεγγισθεί "οσοδήποτε καλά" από τριγωνομετρικά πολυώνυμα.

✏ **1.3** *Αν* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *είναι μια* 2π*-περιοδική συνάρτηση δείξτε ότι η συνάρτηση* $g(x) = f(Kx)$*, όπου* $K \in \mathbb{N}$*, έχει περίοδο* $2\pi/K$.

2 Πέ, 21/9/10: Τριγωνομετρικά Πολυώνυμα. Συντελεστές και σειρές Fourier.

Δοθέντος ενός τριγωνομετρικού πολυωνύμου $p(x) = \sum_{k=-N}^{N} p_k e^{ikx}$, πώς μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές του p_k που ονομάζονται επίσης και συντελεστές Fourier του πολυωνύμου $p(x)$;

Κλειδί για την απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι η (1.2).

Πράγματι, αν γράφουμε

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx \tag{2.1}$$

για το εσωτερικό γινόμενο δύο συναρτήσεων $f, g : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ τότε έχουμε

$$\langle p(x), e^{inx}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k=-N}^{N} p_k e^{ikx} e^{-inx}\, dx = \sum_{k=-N}^{N} p_k \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)x}\, dx = p_n, \tag{2.2}$$

χρησιμοποιώντας την (1.2).

Έχουμε λοιπόν δείξει ότι οι συντελεστές Fourier ενός τριγ. πολυωνύμου καθορίζονται από το πολυώνυμο. Αυτό συνεπάγεται τη μοναδικότητα: ένα τριγ. πολυώνυμο $p(x)$ δε μπορεί να γραφεί με δύο διαφορετικούς τρόπους στη μορφή (1.3). Πράγματι, αν

$$p(x) = \sum_{k=-N}^{N} p_k e^{ikx} = \sum_{k=-N}^{N} \widetilde{p}_k e^{ikx}$$

τότε, έχουμε

$$0 = \sum_{k=-N}^{N} (p_k - \widetilde{p}_k) e^{ikx}, \ \forall x \in [0, 2\pi]$$

και από την (2.2) προκύπτει ότι $p_k - \widetilde{p}_k = 0$ για κάθε k.

Ένας απολύτως ισοδύναμος τρόπος να εκφράσουμε τη μοναδικότητα των συντελεστών (Fourier) ενός τριγ. πολυωνύμου είναι να πούμε ότι το σύνολο συναρτήσεων $[0, 2\pi] \to \mathbb{C}$

$$\{e_n(x) = e^{inx} : \ n \in \mathbb{Z}\}$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Αυτό φυσικά σημαίνει ότι δε μπορούμε να βρούμε ένα πεπερασμένο γραμμικό συνδυασμό αυτών των συναρτήσεων που να είναι η μηδενική συνάρτηση, εκτός φυσικά αν επιλέξουμε όλους του συντελεστές να είναι 0. Η ισοδυναμία προκύπτει από το γεγονός ότι οι πεπερασμένοι γραμμικοί συνδυασμοί των συναρτήσεων $e_n(x)$ είναι ακριβώς τα τριγ. πολυώνυμα.

✏ **2.1** *Αποδείξαμε παραπάνω ότι οποιοσδήποτε πεπερασμένος $\mathbb{C}$-γραμμικός συνδυασμός των εκθετικών συναρτήσεων e^{inx}, με $n \in \mathbb{Z}$, δε μπορεί να είναι η μηδενική συνάρτηση εκτός αν όλοι οι συντελεστές είναι 0 (γραμμική ανεξαρτησία). Η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε είναι ότι δείξαμε πρώτα ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι μεταξύ τους ορθογώνιες στο διάστημα $[0, 2\pi]$, ισχύει δηλαδή*

$$\langle e^{imx}, e^{inx}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x}\, dx = 0$$

αν $m \neq n$. Αυτό παύει να ισχύει αν οι συχνότητες δεν είναι ακέραια πολλαπλάσια του ίδιου αριθμού. Αν λοιπόν $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί τότε χρειαζόμαστε κάποια άλλη μέθοδο για να δείξουμε ότι οι εκθετικές συναρτήσεις

$$e^{i\lambda_1 x}, e^{i\lambda_2 x}, \ldots, e^{i\lambda_n x}$$

είναι $\mathbb{C}$-γραμμικώς ανεξάρτητες. Δείξτε το αυτό υποθέτοντας ότι $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{i\lambda_j x} = 0$ και παίρνοντας N-οστές παραγώγους της f για N πολύ μεγάλο. Εξηγείστε γιατί δε μπορεί να μηδενίζεται ταυτοτικά η $f^{(n)}(x)$. Εξηγείστε επίσης γιατί η συνθήκη $0 < \lambda_1$ παραπάνω δε χρειάζεται και μπορούν τα λ_j να είναι οποιοιδήποτε διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί.

✏ **2.2** *Λέμε ότι ο πραγματικός αριθμός T είναι περίοδος της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ αν ισχύει $f(x+T) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε (α) ότι μια T-περιοδική συνάρτηση καθορίζεται πλήρως από τις τιμές της σε ένα διάστημα της μορφής $[\alpha, \alpha + T]$ και (β) ότι αν T_1 και T_2 είναι περίοδοι της f τότε και οι αριθμοί $T_1 \pm T_2$ είναι περίοδοι. Τι αλγεβρική δομή έχει το σύνολο των περιόδων μιας συνάρτησης; (Παρατηρείστε ότι το 0 πάντα θεωρείται περίοδος.)*

✏ **2.3** *Ένα υποσύνολο $G \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται (προσθετική) υποομάδα αν για κάθε $a, b \in G$ ισχύει $a - b \in G$. Π.χ. οι ακέραιοι είναι προσθετική υποομάδα του $\mathbb{R}$ και επίσης το σύνολο*

$$H = \left\{ m + n\sqrt{2} : m, n \in \mathbb{Z} \right\} \tag{2.3}$$

είναι υποομάδα. Έστω G υποομάδα του $\mathbb{R}$ που έχει κάποιο σημείο συσσώρευσης. Δείξτε ότι η G είναι πυκνή στο $\mathbb{R}$, ότι κάθε ανοιχτό διάστημα δηλαδή περιέχει στοιχεία της G.

💡 *Βρείτε, για κάθε $\epsilon > 0$, δύο διαφορετικά στοιχεία $g_1, g_2 \in G$ που αν απέχουν το πολύ ϵ. Τότε οι αριθμοί $k(g_1 - g_2)$, $k \in \mathbb{Z}$, ανήκουν στην G.*

Τέλος, δείξτε ότι η υποομάδα H στην (2.3) είναι πυκνή στο $\mathbb{R}$.

💡 *Το ότι $\sqrt{2}$ είναι άρρητος συνεπάγεται ότι διαφορετικά m, n μας δίνουν διαφορετικούς αριθμούς $m + n\sqrt{2}$. Δείξτε ότι η H έχει σημείο συσσώρευσης δείχνοντας ότι έχει άπειρα στοιχεία στο διάστημα $[0, 1]$.*

✏ **2.4** *Ένα αλγεβρικό πολυώνυμο είναι μια συνάρτηση της μορφής $p(z) = p_0 + p_1 z + \cdots + p_n z^n$, όπου $p_j \in \mathbb{C}$ και η μεταβλητή z είναι επίσης μιγαδική. Ένα πολυώνυμο Laurent είναι μια συνάρτηση της μορφής $q(z) = q_{-n} z^{-n} + q_{-n+1} z^{-n+1} + \cdots + q_n z^n$, η οποία βεβαίως δεν ορίζεται στο 0 αλλά στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ αν υπάρχουν αρνητικοί εκθέτες. Ποια σχέση υπάρχει ανάμεσα στα τριγωνομετρικά πολυώνυμα και στα πολυώνυμα Laurent περιορισμένα στον μοναδιαίο κύκλο $\{z : |z| = 1\} = \left\{ e^{it} : t \in \mathbb{R} \right\}$ του μιγαδικού επιπέδου;*

✏ **2.5** *Εξηγείστε ποια είναι η σχέση ανάμεσα στις 2π-περιοδικές συναρτήσεις $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ και στις μιγαδικές συναρτήσεις που ορίζονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο $\{|z| = 1\}$.*

✏ **2.6** *Έστω $p(x) = \sum_k p_k e^{ikx}$ και $q(x) = \sum_k q_k e^{ikx}$ δύο τριγωνομετρικά πολυώυμα. (Αυτό σημαίνει ότι οι δύο ακολουθίες συντελεστών p_k, q_k είναι τελικά μηδενικές, υπάρχει δηλ. ένας πεπερασμένος φυσικός αριθμός N τ.ώ. $p_k = q_k = 0$ όταν $|k| > N$.) Αν $r(x) = \sum_k r_k e^{ikx} = p(x)q(x)$ είναι το γινόμενό τους δείξτε ότι οι συντελεστές του $r(x)$ δίνονται μέσω των συντελεστών των $p(x)$ και $q(x)$ από τους τύπους*

$$r_k = \sum_n p_n q_{k-n} = \sum_n q_n p_{k-n}. \tag{2.4}$$

Η ακολουθία r_k ονομάζεται και συνέλιξη των ακολουθιών p_k και q_k. Παρατηρείστε ότι το άθροισμα στην (2.4) είναι πεπερασμένο ακριβώς επειδή οι ακολουθίες p_k και q_k είναι τελικά μηδενικές.

✏ **2.7** *Αν $p(x) = \sum_{n=-N}^{N} p_n e^{inx}$ είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο και $k \in \mathbb{Z}$ δείξτε ότι και η συνάρτηση $p(x)e^{ikx}$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο και βρείτε ποιοι είναι οι συντελεστές του.*

2.1 Ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

Σε αυτό το σημείο παραπέμπουμε το φοιτητή στις σύντομες σημειώσεις για τη χρήση του ολοκληρώματος Lebesgue.

Η έννοια του συντελεστή Fourier μπορεί να γενικευτεί από τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα σε μια πολύ ευρύτερη κλάση από συναρτήσεις $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, οι συναρτήσεις δηλ. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ που είναι 2π-περιοδικές και ταυτόχρονα $\int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx < \infty$.

2.2 Συντελεστές Fourier μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης και σειρά Fourier

Ας είναι τώρα $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε και η συνάρτηση $f(x)e^{ikx}$ είναι ολοκληρώσιμη (αφού έχει το ίδιο μέτρο με την f) όποιο και να είναι το k, και άρα μπορούμε να ορίσουμε το n-οστό συντελεστή Fourier της f από τον τύπο

$$\widehat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx. \tag{2.5}$$

Από την τριγωνική ανισότητα για το ολοκλήρωμα ($\left|\int g\right| \le \int |g|$) προκύπτει άμεσα η ανισότητα

$$\left|\widehat{f}(n)\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f|. \tag{2.6}$$

(συχνά θα παραλείπουμε να γράφουμε $\int f(x)\,dx$ και θα γράφουμε απλά $\int f$ όταν η μεταβλητή εννοείται ή όταν δεν έχει σημασία ποια είναι).

✏ **2.8** *Αν $f \ge 0$ δείξτε ότι $\widehat{f}(0) \ge \widehat{f}(k)$, $(k \in \mathbb{Z})$.*

Έχοντας ορίσει τους συντελεστές Fourier της f ορίζουμε τώρα και τη σειρά Fourier ως τη σειρά

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{inx}.$$

Στη σειρά αυτή το n απειρίζεται και προς τα δεξιά (το συνηθισμένο) και προς τα αριστερά. Τι σημαίνει για μια σειρά μιγαδικών αριθμών

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$$

ότι το άθροισμά της είναι ο αριθμός $L \in \mathbb{C}$; Πολύ απλά ότι το L είναι το όριο των συμμετρικών μερικών αθροισμάτων της σειράς

$$L = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} a_n.$$

Για να υποδηλώσουμε ότι μια σειρά είναι η σειρά Fourier της f γράφουμε συνήθως

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{inx}.$$

Δε χρησιμοποιούμε το σύμβολο = ακριβώς για να τονίσουμε ότι κατ' αρχήν δεν κάνουμε κανένα ισχυρισμό όσον αφορά τη σύγκλιση της σειράς και μάλιστα στην $f(x)$. Το μεγαλύτερο μέρος της κλασικής Αρμονικής Ανάλυσης αφορά ακριβώς το να ξεκαθαρίσουμε υπό ποιες συνθήκες (για την f) ισχύει μια τέτοια σύγκλιση ή σύγκλιση κάποιου άλλου είδους (π.χ. ομοιόμορφη σύγκλιση των μερικών αθροισμάτων της σειράς Fourier).

Τα συμμετρικά μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier της f όμως είναι τριγ. πολυώνυμα και άρα είναι ταυτόχρονα και συναρτήσεις (δεν τίθεται εδώ θέμα σύγκλισης):

$$S_N(f)(x) = \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k)e^{ikx}, \quad N = 0,1,2,\ldots, \ x \in \mathbb{R}.$$

(Προσέξτε ότι το όνομα της συνάρτησης είναι $S_N(f)$ και $S_N(f)(x)$ είναι η τιμή της συνάρτησης αυτής στο x. Σε άλλα βιβλία μπορεί να δείτε αντί για τον παραπάνω συμβολισμό να χρησιμοποιείται το $S_N(f,x)$ ή και κάτι σαν $S_N^f(x)$.)

Ένα κεντρικό πρόβλημα της Αρμονικής Ανάλυσης είναι λοιπόν το κατά πόσο τα μερικά αθροίσματα $S_N(f)(x)$ συγκλίνουν στη συνάρτηση $f(x)$ όταν $N \to \infty$ και με ποια έννοια συγκλίνουν (κατά σημείο, ομοιόμορφα, σε κάποια ολοκληρωτική νόρμα όπως θα δούμε αργότερα).

✏ **2.9** *Ποιοι οι συντελεστές Fourier της συνάρτησης $f(x) = 1$;*

✏ **2.10** *Η 2π-περιοδική συνάρτηση f ορίζεται στο διάστημα $[-\pi,\pi]$ από τον τύπο*

$$f(x) = x, \text{ αν } x \in (-\pi,\pi) \text{ και } 0 \text{ αν } x = \pm\pi.$$

Δείξτε (χρησιμοποιείστε ολοκλήρωση κατά μέρη) ότι οι συντελεστές Fourier της f είναι οι $\widehat{f}(n) = (-1)^{n+1}/(in)$ για $n \ne 0$ και $\widehat{f}(0) = 0$.

Παρατήρηση: Δεν έχει ιδιαίτερη σημασία το ποιες είναι οι τιμές της f στα άκρα του διαστήματος $[-\pi,\pi]$ αφού όπως και να οριστεί εκεί τα ολοκληρώματα που ορίζουν τα $\widehat{f}(n)$ δεν επηρεάζονται.

✏ **2.11** *Η συνάρτηση $f:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ δίνεται από τον τύπο $f(x)=(\pi-x)^2/4$. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι η*

$$f(x)\ \sim\ \frac{\pi^2}{12}+\sum_{n\neq 0}\frac{e^{inx}}{2n^2}\ =\ \frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}.$$

✏ **2.12** *Αν $0<\delta<\pi$ υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της συνάρτησης $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ με τριγωνικό γράφημα που δίνεται από τον τύπο*

$$f(x)=\begin{cases}1-\frac{|x|}{\delta} & (|x|\le\delta)\\ 0 & (\delta\le|x|\le\pi).\end{cases}$$

✏ **2.13** *Αν $a_n, b_n, n=1,2,\ldots,N$ είναι μιγαδικοί αριθμοί και $B_k=\sum_{n=1}^{k}b_n$ δείξτε τον τύπο της <u>άθροισης κατά μέρη</u> (που είναι το ανάλογο για αθροίσματα του τύπου της ολοκλήρωσης κατά μέρη)*

$$\sum_{n=M}^{N}a_nb_n=a_NB_N-a_MB_{M-1}-\sum_{n=M}^{N-1}(a_{n+1}-a_n)B_n. \tag{2.7}$$

✏ **2.14** *Αν $a_n\to 0$ είναι φθίνουσα ακολουθία και τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_n b_n$ είναι φραγμένα τότε η σειρά $\sum_n a_nb_n$ συγκλίνει.*

✏ **2.15** *Αν f_k, f είναι 2π-περιοδικές και ολοκληρώσιμες στο $[0,2\pi]$ και*

$$\int_0^{2\pi}|f_k(x)-f(x)|\,dx\to 0.\ \ (k\to\infty)$$

τότε έχουμε

$$\lim_{k\to\infty}\widehat{f_k}(n)\to\widehat{f}(n),$$

ομοιόμορφα για όλα τα $n\in\mathbb{Z}$.

2.3 Ο πυρήνας του Dirichlet

Κεντρικό αντικείμενο για τη μελέτη της κατά σημείο σύγκλισης

$$S_N(f)(x)\to f(x)$$

είναι ο λεγόμενος πυρήνας του Dirichlet τάξης N, το τριγ. πολυώνυμο δηλ. που ορίζεται ως

$$D_N(x)=\sum_{k=-N}^{N}e^{ikx}. \tag{2.8}$$

Δεν είναι δύσκολο να βρει κανείς ένα κλειστό τύπο για το $D_N(x)$:

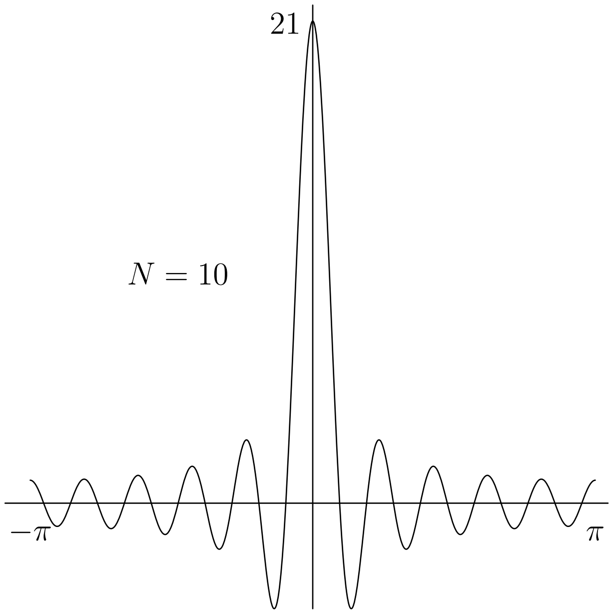
$$D_N(x)=\frac{\sin{(N+\frac{1}{2})x}}{\sin\frac{x}{2}}. \tag{2.9}$$

Για να δείξουμε την (2.9) χρησιμοποιούμε τον τύπο για το άθροισμα της πεπερασμένης γεωμετρικής σειράς

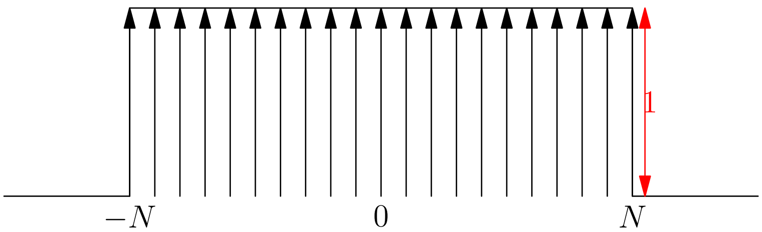
$$1+z+z^2+\cdots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z},\quad (z\neq 1), \tag{2.10}$$

(με e^{ix} στη θέση του z) και τον τύπο για τη διαφορά συνημιτόνων

$$\cos A-\cos B=2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2}. \tag{2.11}$$



Σχήμα 1: Ο πυρήνας του Dirichlet



Σχήμα 2: Οι συντελεστές Fourier του πυρήνα του Dirichlet $D_N(x)$ για $N = 10$

✏ **2.16** *Αποδείξτε τις (2.10) και (2.11).*

✏ **2.17** *Κάντε τις πράξεις μόνοι σας για εξάσκηση και αποδείξτε την (2.9). Θυμηθείτε ότι μια εν γένει καλή στρατηγική όταν έχετε ένα κλάσμα με μιγαδικό παρανομαστή είναι να πολλαπλασιάζετε αριθμητή και παρανομαστή με το συζυγή του παρανομαστή ώστε να γίνεται πραγματικός ο παρανομαστής.*

✏ **2.18** *Λέμε ότι μια ακολουθία $z_n \in \mathbb{C}$ συγκλίνει στο $z \in \mathbb{C}$ αν $|z - z_n| \to 0$ όταν $n \to \infty$. Δείξτε ότι $z_n \to z$ αν και μόνο αν $\Re z_n \to \Re z$ και $\Im z_n \to \Im z$.*

3 Τρ, 28/9/10: Μερικά παραδείγματα σειρών Fourier και τριγ. σειρών

Όταν μιλάμε για μια σειρά του τύπου $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$, με $a_n \in \mathbb{C}$, μια σειρά δηλαδή διπλής κατεύθυνσης, θα εννοούμε πάντα τη σύγκλισή της ως σύγκλιση των συμμετρικών μερικών αθροισμάτων της

$$S_N = \sum_{n=-N}^{N} a_n = a_{-N} + a_{-N+1} + \cdots + a_0 + \cdots + a_{N-1} + a_N,$$

όταν $N \to \infty$. Όταν μιλάμε για τριγωνομετρική σειρά εννοούμε μια σειρά συναρτήσεων του τύπου

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}, \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Οι σειρές Fourier ολοκληρωσίμων συναρτήσεων είναι λοιπόν ειδικές περιπτώσεις τριγωνομετρικών σειρών, όπου οι συντελεστές της σειράς ταυτίζονται με τους συντελεστές Fourier κάποιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης. Το γενικό ερώτημα του πότε μια τριγωνομετρική σειρά είναι σειρά Fourier είναι ένα δύσκολο ερώτημα που δεν έχει ουσιαστικά απαντηθεί. Η θεωρία των τριγωνομετρικών σειρών έχει αναπτυχθεί ιδιαίτερα σε σχέση με ερωτήματα τύπου συνόλων μοναδικότητας (sets of uniqueness), ερωτήματα που έχουν συμβάλλει πάρα πολύ στην ανάπτυξη της μαθηματικής ανάλυσης και όχι μόνο. Για παράδειγμα, η θεωρία συνόλων οφείλει τη δημιουργία της στον G. Cantor ο οποίος τη θεμελίωσε κατά κάποιο τρόπο για να απαντήσει ερωτήματα πάνω σε σύνολα μοναδικότητας τριγωνομετρικών σειρών. Σε αυτό το μάθημα δε θα ασχοληθούμε σχεδόν καθόλου με τριγωνομετρικές σειρές που δεν είναι σειρές Fourier.

Στην περίπτωση που οι συντελεστές μιας τριγωνομετρικής σειράς φθίνουν αρκετά γρήγορα η σειρά αυτή αναμένεται να έχει κάποιες καλές ιδιότητες. Το ακόλουθο είναι ένα τυπικό (και εύκολο) παράδειγμα ενός τέτοιου θεωρήματος (μικροί συντελεστές $\to$ ομαλή συνάρτηση).

Θεώρημα 3.1 *Αν $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty$ τότε η τριγωνομετρική σειρά $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση.*

Απόδειξη. Κατ' αρχήν η σειρά συγκλίνει σε μια συνάρτηση $f(x)$ επειδή συγκλίνει απόλυτα, λόγω της υπόθεσής μας. Το ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι 2π-περιοδική είναι προφανές. Ας είναι $S_N(x)$ τα μερικά αθροίσματα. Τότε

$$|f(x) - S_N(x)| = \left|\sum_{|n|>N} a_n e^{inx}\right| \le \sum_{|n|>N} \left|a_n e^{inx}\right| = \sum_{|n|>N} |a_n| =: t_N.$$

Όμως η ποσότητα t_N δεν εξαρτάται από το x και τείνει στο 0 αφού είναι η (διπλής κατεύθυνσης) ουρά μιας συγκλίνουσας σειράς. Έχουμε συνεπώς δείξει ότι

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - S_N(x)| \to 0 \quad \text{για } N \to \infty,$$

δηλαδή ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε όλο το $\mathbb{R}$. Τέλος, επειδή οι $S_N(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις (αφού η καθεμία τους είναι πεπερασμένο άθροισμα συνεχών) έπεται από την ομοιόμορφη σύγκλιση ότι και η $f(x)$ είναι συνεχής. ∎

Έστω $0 \le r < 1$. Τότε, από το Θεώρημα 3.1, η τριγωνομετρική σειρά

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση $P_r(x)$ την οποία ονομάζουμε πυρήνα Poisson και η οποία είναι πάρα πολύ σημαντική στη θεωρία των αρμονικών και αναλυτικών συναρτήσεων. Μπορούμε εύκολα να βρούμε ένα κλειστό τύπο για τον πυρήνα του Poisson αν γράψουμε τη σειρά στη μορφή $1+\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-inx}$ και εφαρμόσουμε τον τύπο για την άθροιση της άπειρης γεωμετρικής σειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad (|z| < 1), \tag{3.1}$$

ο οποίος είναι άμεση συνέπεια του (2.10). Καταλήγουμε στον τύπο

$$P_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx = \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2} \quad (0 \le r < 1). \tag{3.2}$$

Τι σχέση έχει η συνάρτηση που ορίζει η σειρά Fourier μιας συνάρτησης f με την ίδια την f; Ένα πρώτο βήμα για να το απαντήσουμε αυτό είναι το επόμενο Θεώρημα που αφορά και πάλι την περίπτωση που οι συντελεστές Fourier της f φθίνουν τόσο γρήγορα ώστε να είναι μια αθροίσιμη ακολουθία (το άθροισμα των απολύτων τιμών τους να είναι πεπερασμένο).

Θεώρημα 3.2 *Αν f είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\widehat{f}(n)\right| < \infty$ τότε η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση που έχει τους ίδιους συντελεστές Fourier με την f.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.1 προκύπτει ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση g, ισχύει δηλ. $g(x) = \lim_{N\to\infty} S_N(f)(x)$ και το όριο είναι ομοιόμορφο. Από την ομοιόμορφη σύγκλιση προκύπτει ότι για κάθε $n \in \mathbb{Z}$

$$\widehat{g}(n) = \lim_{N\to\infty} \widehat{S_N(f)}(n)$$

αφού

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{g}(n) - \widehat{S_N(f)}(n)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(g(x) - S_N(f)(x))e^{-inx}\,dx\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(x) - S_N(f)(x)|\,dx \\
&\le \sup_{x\in[0,2\pi]}|g(x) - S_N(f)(x)| \\
&\to 0 \ \ \text{(από την ομοιόμορφη σύγκλιση)}.
\end{aligned}$$

Αλλά οι συναρτήσεις $S_N(f)(x)$ είναι τριγωνομετρικά πολυώνυμα άρα

$$\widehat{S_N(f)}(n) = \widehat{f}(n) \ \ \text{για } |N| \ge |n|,$$

άρα, για n σταθερό, η ακολουθία $\widehat{S_N(f)}(n)$ είναι τελικά σταθερή αν το N είναι αρκετά μεγάλο και συνεπώς $\widehat{g}(n) = \widehat{f}(n)$. ∎

4 Πέ, 30/9/10: Απλές πράξεις πάνω σε μια συνάρτηση. Τάξη μεγέθους συντελεστών.

4.1 Απλές πράξεις πάνω στη συνάρτηση και στους συντελεστές Fourier ως τελεστές και σχέσεις μεταξύ τους

Αν είναι $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση που είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 2\pi]$. Αν $\alpha \in \mathbb{R}$ τότε και η συνάρτηση

$$(\tau_\alpha f)(x) = f(x - \alpha)$$

είναι επίσης 2π-περιοδική και ολοκληρώσιμη στο $[0, 2\pi]$. Ένας εύκολος υπολογισμός (ορισμός ακολουθούμενος από μια αλλαγή μεταβλητής) μας δίνει την εξής σχέση ανάμεσα στους συντελεστές Fourier της $\tau_\alpha f$ και της f:

$$\widehat{\tau_\alpha f}(n) = e^{-in\alpha}\widehat{f}(n). \tag{4.1}$$

✏ **4.1** *Αποδείξτε τη σχέση* (4.1).

Η απεικόνιση $f \to \tau_\alpha f$ ονομάζεται *τελεστής* (παραδοσιακά στα μαθηματικά ονομάζουμε *συναρτήσεις* τις απεικονίσεις που στέλνουν "σημεία" σε αριθμούς ενώ χρησιμοποιούμε τη λέξη *τελεστής* για μια απεικόνιση που στέλνει συναρτήσεις (ή άλλα "πολύπλοκα" αντικείμενα) σε συναρτήσεις) και είναι μάλιστα *γραμμικός* τελεστής, ικανοποιεί δηλ. τη σχέση

$$\tau_\alpha(\lambda f + \mu g) = \lambda\tau_\alpha f + \mu\tau_\alpha g, \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{C}).$$

Για να είμαστε ακριβείς θα πρέπει να καθορίσουμε και σε ποιο χώρο ανήκουν οι διάφορες συναρτήσεις στις οποίες αναφερόμαστε. Αυτό δεν έχει και τόση μεγάλη σημασία οπότε ας πούμε ότι όλες οι συναρτήσεις στις οποίες αναφερόμαστε ανήκουν στο χώρο X των συναρτήσεων $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ που είναι 2π-περιοδικές και συνεχείς.

Αν συμβολίσουμε και με Y το χώρο όλων των μιγαδικών ακολουθιών (με δείκτες $n \in \mathbb{Z}$) τότε μπορούμε να δούμε την απεικόνιση

$$f \to (f(n))_{n\in\mathbb{Z}}$$

ως ένα τελεστή από το χώρο X στο χώρο Y, τον οποίο συμβολίζουμε με $\mathcal{F}$:

$$(\mathcal{F}f)(n) = \widehat{f}(n).$$

Ορίζουμε τέλος τον τελεστή $m_\alpha : Y \to Y$ να είναι ο "πολλαπλασιαστής"

$$(m_\alpha a)_n = e^{-in\alpha} a_n.$$

Και οι τρεις αυτοί τελεστές που ορίσαμε είναι γραμμικοί.

Έχοντας ορίσει τους τελεστές και τους χώρους που εμφανίζονται στην (4.1) μπορούμε τώρα να ξαναγράψουμε τη σχέση αυτή ως μια σχέση αντιμετάθεσης τελεστών

$$\mathcal{F}\tau_\alpha = m_\alpha \mathcal{F}. \tag{4.2}$$

ή ως ένα αντιμεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\mathcal{F}} & Y \\ \big\downarrow{\scriptstyle \tau_\alpha} & & \big\downarrow{\scriptstyle m_\alpha} \\ X & \xrightarrow{\mathcal{F}} & Y \end{array} \tag{4.3}$$

Ο τρόπος που ερμηνεύουμε τη σχέση (4.2) καθώς και το διάγραμμα (4.3) είναι ότι το να εφαρμόσουμε σε μια συνάρτηση πρώτα τον τελεστή τ_α και μετά τον τελεστή Fourier $\mathcal{F}$ (αριστερό μέλος της (4.2) ή κάτω-και-μετά-δεξιά κίνηση στο διάγραμμα (4.3)) είναι το ίδιο με πρώτα να εφαρμόσουμε τον τελεστή Fourier $\mathcal{F}$ και μετά τον πολλαπλασιαστή m_α (δεξί μέλος της (4.2) ή δεξιά-και-μετά-κάτω κίνηση στο διάγραμμα (4.3)).

Μπορούμε να ορίσουμε τους τελεστές μετατόπισης τ πάνω στο χώρο Y και τους πολλαπλασιαστές m πάνω στο χώρο X:

$$(\tau_k a)_n = a_{n-k}, \quad \text{για κάθε ακολουθία } a \in Y,$$

και

$$(m_k f)(x) = e^{ikx} f(x), \quad \text{για κάθε συνάρτηση } f \in X.$$

Παρατηρείστε ότι για να έχουν νόημα αυτοί οι τελεστές πρέπει η παράμετρος της μετατόπισης να είναι ακέραια και η συχνότητα του εκθετικού με το οποίο πολλαπλασιάζουμε να είναι επίσης ακέραια (ώστε να μη χαλάει η περιοδικότητα της συνάρτησης).

✏ **4.2** *Δείξτε ότι $\mathcal{F}m_k = \tau_k \mathcal{F}$ αφού πρώτα γράψετε αυτή την ισότητα τελεστών σε μορφή παρόμοια με την σχέση* (4.1).

Δύο άλλοι γραμμικοί τελεστές που είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι, και οι οποίοι επίσης ορίζονται και πάνω σε συναρτήσεις και πάνω σε ακολουθίες (στους χώρους X και Y δηλαδή) είναι οι τελεστές της ανάκλασης A και συζυγίας C:

$$(Af)(x) = f(-x), \quad (Aa)_n = a_{-n}, \quad \text{για } f \in X, a \in Y,$$

και

$$(Cf)(x) = \overline{f(x)}, \quad (Ca)_n = \overline{a_n}, \quad \text{για } f \in X, a \in Y.$$

✏ **4.3** *Δείξτε τις ισότητες*

$$\mathcal{F}A = A\mathcal{F} \quad \text{και} \quad \mathcal{F}C = CA\mathcal{F},$$

αφού πρώτα τις γράψετε στη μορφή (4.1).

✏ **4.4** *Αν f είναι άρτια συνάρτηση ($f(-x) = f(x)$) δείξτε ότι η σειρά Fourier της f μπορεί να γραφεί ως σειρά συνημιτόνων $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$. Ποια η σχέση των a_n με τους συντελεστές Fourier της f;*

Ομοίως αν η f είναι περιττή ($f(-x) = -f(x)$) δείξτε ότι η σειρά Fourier της f μπορεί να γραφεί ως σειρά συνημιτόνων $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin nx$. Ποια η σχέση των a_n με τους συντελεστές Fourier της f;

✏ **4.5** *Αν η f είναι π-περιοδική τότε $\widehat{f}(n) = 0$ για κάθε περιττό n.*

✏ **4.6** *Δείξτε ότι αν η f παίρνει πραγματικές τιμές τότε $\widehat{f}(-n) = \overline{\widehat{f}(n)}$.*

✏ **4.7** *Αν f είναι 2π-περιοδική συνάρτηση και $k \in \mathbb{N}$ τι σχέση έχει το γράφημα της $g(x) = f(kx)$ με το γράφημα της f; Ποια η περίοδος της $g(x)$; Ποιο το ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} g(x)\, dx$ σε σχέση με αυτό της f; Ποιοι οι συντελεστές Fourier της $g(x)$;*

4.2 Οι χώροι συναρτήσεων $C^j(\mathbb{T})$ και $L^p(\mathbb{T})$

Οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ των οποίων παίρνουμε τους συντελεστές Fourier είναι πάντα 2π-περιοδικές και πρέπει επίσης να είναι ολοκληρώσιμες στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

✏ **4.8** *Δείξτε ότι αν μια συνάρτηση έχει περίοδο T τότε το ολοκλήρωμά της πάνω σε οποιοδήποτε διάστημα μήκους T είναι το ίδιο.*

✏ **4.9** *Δείξτε ότι μια 2π-περιοδική συνάρτηση που είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 2\pi]$ δε μπορεί να είναι ολοκληρώσιμη και στο $\mathbb{R}$ εκτός αν είναι ίση με μηδέν σχεδόν παντού.*

Σημαντική ειδική περίπτωση αυτών είναι οι συνεχείς 2π-περιοδικές συναρτήσεις, αφού κάθε συνεχής συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη σε οποιοδήποτε φραγμένο κλειστό διάστημα αφού είναι φραγμένη σε αυτό.

Ορισμός 4.1 *Θα λέμε ότι μια συνάρτηση ανήκει στο χώρο $C(\mathbb{T})$ αν είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ και 2π-περιοδική. Θα λέμε γενικότερα ότι μια συνάρτηση ανήκει στο χώρο $C^j(\mathbb{T})$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ αν είναι 2π-περιοδική και η j-τάξης παράγωγός της υπάρχει και είναι συνεχής παντού. (Ως μηδενικής τάξης παράγωγος της f θεωρείται η ίδια η f.)*

Εν γένει αν E είναι ένας χώρος πάνω στον οποίο ορίζονται συναρτήσεις (με πραγματικές ή μιγαδικές τιμές) τότε με $C(E)$ συμβολίζουμε εκείνες τις συναρτήσεις που είναι συνεχείς. Για να υπάρχει κάποια συμβατότητα αυτού του γενικού ορισμού με τον ορισμό για το $C(\mathbb{T})$ που δώσαμε παραπάνω θα πρέπει κατ᾽ αρχήν να δώσουμε ένα νόημα στο σύμβολο $\mathbb{T}$, να ορίσουμε δηλ. ένα χώρο τέτοιο ώστε οι συνεχείς συναρτήσεις πάνω σε αυτόν να "είναι" οι 2π-περιοδικές συναρτήσεις πάνω στο $\mathbb{R}$ που είναι συνεχείς.

Ο χώρος $\mathbb{T}$ (που τον ονομάζουμε και *κύκλο* και μιλάμε συχνά για συνεχείς συναρτήσεις πάνω στον κύκλο όταν θέλουμε να μιλήσουμε για συνεχείς και περιοδικές συναρτήσεις) ορίζεται να είναι εκείνος ο τοπολογικός χώρος που προκύπτει αν ορίσουμε τη σχέση ισοδυναμίας πάνω στο $\mathbb{R}$

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in (2\pi)\mathbb{Z},$$

(όπου με $(2\pi)\mathbb{Z}$ συμβολίζουμε όλα τα ακέραια πολλαπλάσια του 2π) και κατόπιν ταυτίσουμε μεταξύ τους όλα τα ισοδύναμα στοιχεία. Εύκολα βλέπει κανείς ότι η κλάση ισοδυναμίας του $x \in \mathbb{R}$ είναι οι αριθμοί $x + (2\pi)k$, $k \in \mathbb{Z}$, οπότε ανά δύο τα στοιχεία του $[0, 2\pi)$ δεν είναι μεταξύ τους ισοδύναμα και κάθε κλάση ισοδυναμίας έχει μοναδικό αντιπρόσωπο στο $[0, 2\pi)$. Οι δε αριθμοί 0 και 2π είναι μεταξύ τους ισοδύναμοι και άρα μπορούμε να βλέπουμε το χώρο $\mathbb{T}$ ως ένα κύκλο ή, με άλλα λόγια, να βλέπουμε το χώρο $\mathbb{T}$ ως το $[0, 2\pi]$ όπου όμως τα σημεία 0 και 2π είναι ίδια και αν κινηθούμε από τα αριστερά προς το 2π τότε μόλις το περάσουμε βρισκόμαστε στα δεξιά του 0.

Είναι φανερό ότι κάθε συνεχής και 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ορίζει μια συνεχή συνάρτηση πάνω στο χώρο $\mathbb{T}$ και αντίστροφα. Γι᾽ αυτό και χρησιμοποιούμε το σύμβολο $C(\mathbb{T})$.

Όμως όποιος δυσκολεύται να κατανοήσει τις τοπολογικές έννοιες που αναφέρουμε πιο πάνω μπορεί να κρατήσει τον Ορισμό 4.1 ο οποίος αρκεί για να δώσει νόημα σε όλες τις προτάσεις που θα μας απασχολήσουν.

Εντελώς αντίστοιχα ορίζουμε το σημαίνει να ανήκει μια συνάρτηση f στο χώρο $L^p(\mathbb{T})$. Μια τέτοια συνάρτηση πρέπει να είναι 2π-περιοδική και να ισχύει

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} < \infty, \quad \text{αν } 1 \le p < \infty,$$

και

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}|f(x)|, \quad \text{για } p = \infty.$$

Όπως και στους συνηθισμένους χώρους $L^p(A)$ (δείτε τις σημειώσεις για το μέτρο και το ολοκλήρωμα Lebesgue) το εύρος του p είναι το διάστημα $[1, +\infty]$, αλλιώς η νόρμα $\|\cdot\|_p$ που ορίζεται παραπάνω δεν ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα και άρα δε μπορεί να χρησιμεύσει ως έννοια απόστασης ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις

$$d(f, g) = \|f - g\|_p.$$

Επίσης όμοια με τους χώρους $L^p(A)$ δεν ξεχωρίζουμε μεταξύ τους δύο συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι ίδιες σχεδόν παντού, διαφέρουν δηλ. σε ένα σύνολο E με μέτρο Lebesgue $m(E) = 0$.

4.3 Ασυμπτωτικές σχέσεις ανάμεσα σε ποσότητες και συμβολισμός

Οι συμβολισμοί $O(\cdot)$ και $o(\cdot)$ που ορίζονται παρακάτω είναι πάρα πολύ κοινοί στην Ανάλυση αλλά και στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά και η χρησιμότητά τους έγκειται ότι καταφέρνουν να δηλώσουν κάτι για την "τάξη μεγέθους" μιας ακολουθίας κρύβοντας ταυτόχρονα πληροφοροφορία που δεν ενδιαφέρει και η παρουσία της οποίας θα έκανε αυτή τη δήλωση μεγέθους δυσανάγνωστη.

Ορισμός 4.2 *Αν $a_n \ge 0, b_n > 0$ τότε γράφουμε $a_n = O(b_n)$ αν η ακολουθία a_n/b_n είναι φραγμένη. Ομοίως γράφουμε $a_n = o(b_n)$ αν η ακολουθία a_n/b_n τείνει στο 0.*

✏ **4.10** *1. Τι σημαίνουν: $a_n = O(1)$, $a_n = o(1)$;*

2. Δείξτε (χωρίς να υπολογίσετε το άθροισμα) ότι για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots$ ισχύει

$$1^k + 2^k + 3^k + \cdots n^k = O(n^{k+1}).$$

3. Δείξτε $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = O(\log n)$.

Οι συμβολισμοί αυτοί έχουν νόημα ακόμη και όταν η παράμετρος δεν είναι ένας ακέραιος που τείνει στο άπειρο ($n \to \infty$ στον ορισμό 4.2) αλλά και μια πραγματική παράμετρος που συγκλίνει σε πεπερασμένο ή άπειρο όριο.

Ορισμός 4.3 *Αν $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και οι συναρτήσεις $f(x) \ge 0, g(x) > 0$ είναι ορισμένες σε μια γειτονιά του x_0 τότε λέμε $f(x) = O(g(x))$ και $f(x) = o(g(x))$ για $x \to x_0$ αν συνάρτηση $f(x)/g(x)$ είναι φραγμένη σε μια γειτονιά του x_0 ή συγκλίνει στο 0 για $x \to x_0$ αντίστοιχα.*

✏ **4.11** *Δείξτε ότι $|\sin x| = O(|x|)$ για $x \to 0$ και επίσης ότι $|x| = O(|\sin x|)$ στο ίδιο όριο.*

Καμιά φορά γράφουμε και $A = O(B)$ ή $A = o(B)$ και για προσημασμένες ποσότητες A, B και εννοούμε $|A| = O(|B|)$ και $|A| = o(|B|)$ αντίστοιχα.

4.4 Τάξη μεγέθους συντελεστών Fourier και ομαλότητα της συνάρτησης

Μπορούμε τώρα να δείξουμε ένα ακόμη Θεώρημα το οποίο συνδέει την ομαλότητα μιας συνάρτησης με το μέγεθος των συντελεστών Fourier της. Το πρώτο τέτοιο θεώρημα που είδαμε είναι το Θέωρημα 3.1.

Θεώρημα 4.1 *Αν $f \in C^1(\mathbb{T})$ τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$*

$$\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n). \tag{4.4}$$

Απόδειξη. Η μέθοδος είναι και πάλι η ολοκλήρωση κατά μέρη. Για $n \neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\left(\frac{e^{-inx}}{-in}\right)' dx \\
&= f(x)\frac{e^{-inx}}{-in}\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{in}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)e^{-inx}\,dx \\
&= \frac{1}{in}\widehat{f'}(n)
\end{aligned}$$

αφού ο πρώτος προσθετέος μηδενίζεται λόγω της περιοδικότητας της συνάρτησης. Επίσης $\widehat{f'}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\,dx = f(2\pi) - f(0) = 0$ και πάλι λόγω της περιοδικότητας. ∎

✏ **4.12** *Η απαίτηση στο Θεώρημα 4.1 να είναι συνεχής η παράγωγος της f είναι ισχυρότερη απ΄ ό,τι πραγματικά χρειάζεται. Υποθέστε ότι $f(x) = \int_0^x g(t)\,dt$, για $x \in [0, 2\pi]$, για μια συνάρτηση $g \in L^1(\mathbb{T})$ με $\int g = 0$ (ώστε να είναι η f περιοδική) και δείξτε ότι $\widehat{g}(n) = in\widehat{f}(n)$.*

💡 *Αντί για ολοκλήρωση κατά μέρη χρησιμοποιείστε το θεώρημα του Fubini (δείτε το φυλλάδιο για το μέτρο και ολοκήρωμα Lebesgue).*

Μπορούμε να εκφράσουμε το Θεώρημα 4.1 και με τη βοήθεια των κατάλληλων γραμμικών τελεστών:

$$(Df)(x) = f'(x) \quad \text{και} \quad (Ma)_n = ina_n$$

όπου ο διαφορικός τελεστής D είναι από το χώρο $C^1(\mathbb{T})$ στο χώρο $C(\mathbb{T})$ και ο πολλαπλασιαστής M είναι από το χώρο των διπλών (δηλ. $n \in \mathbb{Z}$) ακολουθιών στόν εαυτό του. Το Θεώρημα 4.1 παίρνει πολύ απλά τη μορφή

$$\mathcal{F}D = M\mathcal{F}.$$

Πόρισμα 4.1 *Αν $f \in C^j(\mathbb{T})$ τότε $\widehat{f}(n) = O\left(\frac{1}{n^j}\right)$ για $|n| \to \infty$.*

Απόδειξη. Αν $f \in C^j(\mathbb{T})$ τότε έχουμε από επαναλαμβανόμενη χρήση του Θεωρήματος 4.1

$$\widehat{f^{(j)}}(n) = (in)\widehat{f^{(j-1)}}(n) = (in)^2\widehat{f^{(j-2)}}(n) = \cdots = (in)^j\widehat{f}(n),$$

άρα έχουμε για $n \neq 0$ ότι

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{i^j n^j}\widehat{f^{(j)}}(n),$$

και χρησιμοποιώντας το προφανές φράγμα $\left|\widehat{f^{(j)}}(n)\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f^{(j)}\right|$ παίρνουμε

$$\left|\widehat{f}(n)\right| \le \frac{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f^{(j)}\right|}{n^j}.$$

Το ότι το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στον αριθμητή είναι πεπερασμένο είναι συνέπεια της συνέχειας της j-τάξης παραγώγου $f^{(j)}$. ∎

Άρα, αν $f \in C^2(\mathbb{T})$ έχουμε $\widehat{f}(n) = O(n^{-2})$ το οποίο συνεπάγεται

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\widehat{f}(n)\right| < \infty.$$

Έχουμε λοιπόν, ως συνέπεια του Πορίσματος 4.1 και του Θεωρήματος 3.2 το ακόλουθο.

Πόρισμα 4.2 *Αν $f \in C^2(\mathbb{T})$ τότε η σειρά Fourier της f συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση που έχει τους ίδιους συντελεστές Fourier με την f.*

5 Τρ, 5/10/10: Θεώρημα μοναδικότητας. Συνελίξεις.

5.1 Θεώρημα Μοναδικότητας

Μπορούν δύο διαφορετικές ολοκληρώσιμες 2π-περιοδικές συναρτήσεις να έχουν τους ίδιους συντελεστές Fourier; Θα δούμε ότι η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι όχι, αν και θα χρειαστεί σε αυτή τη φάση με επιβάλλουμε και κάποιες συνθήκες στις συναρτήσεις. Κατ΄ αρχήν είναι φανερό ότι κάποια συνθήκη πρέπει να επιβληθεί αφού μπορούμε να πάρουμε μια συνάρτηση f και να την αλλάξουμε σε ένα σημείο (ή σε ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων) πράξη η οποία δεν αλλάζει κανένα συντελεστή Fourier, αλλάζει όμως τη συνάρτηση, καταστρέφοντας τη μοναδικότητα.

Θεώρημα 5.1 *[Θεώρημα Μοναδικότητας] Έστω f μια 2π-περιοδική συνάρτηση, ολοκληρώσιμη στο $[0, 2\pi]$, και $x_0 \in [0, 2\pi]$ σημείο συνέχειας της f. Αν όλοι οι συντελεστές Fourier της f είναι μηδέν τότε $f(x_0) = 0$.*

Θα δούμε λίγο αργότερα ότι δε χρειάζεται να υποθέσουμε συνέχεια της f σε κάποιο σημείο. Δηλαδή θα αποδείξουμε ότι αν κάποια συνάρτηση $f \in L^1(\mathbb{T})$ έχει όλους τους συντελεστές Fourier της ίσους με το 0 τότε η f είναι σχεδόν παντού ίση με 0.

Πριν δώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 5.1 ας δώσουμε το σημαντικότερο πόρισμά του από το οποίο φαίνεται καθαρά γιατί το ονομάζουμε θεώρημα μοναδικότητας.

Πόρισμα 5.1 *Αν $f, g \in C(\mathbb{T})$ και $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ τότε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Η συνάρτηση $f - g$ είναι παντού συνεχής και έχει $\widehat{f-g}(n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.1 μηδενίζεται παντού. ∎

Το κεντρικό ερώτημα στο οποίο η Ανάλυση Fourier οφείλει την ύπαρξή της είναι το πότε μια συνάρτηση f μπορεί να "παρασταθεί" από τη σειρά Fourier της. Το επόμενο πόρισμα των Θεωρημάτων 5.1 και 3.2 είναι το πρώτο αποτέλεσμα που βλέπουμε που λέει ότι υπό κάποιες ευρείες συνθήκες αυτό όντως ισχύει.

Πόρισμα 5.2 *Αν $f \in C(\mathbb{T})$ και $\sum_n \left|\widehat{f}(n)\right| < \infty$ τότε η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.2 έχουμε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση g με τους ίδιους συντελεστές Fourier με την f. Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης η g είναι επίσης συνεχής παντού και άρα, από το Πόρισμα 5.1, προκύπτει ότι $f(x) = g(x)$ παντού. ∎

Οι συνθήκες του προηγούμενου Πορίσματος ισχύουν υπό κάποιες προϋποθέσεις ομαλότητας της f.

Πόρισμα 5.3 *Αν $f \in C^2(\mathbb{T})$ τότε η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.*

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 4.1 έχουμε $\left|\widehat{f}(n)\right| = O(1/|n|^2)$ το οποίο συνεπάγεται ότι $\sum_n \left|\widehat{f}(n)\right| < \infty$ και το αποτέλεσμα προκύπτει από το Πόρισμα 5.2. ∎

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.1. Μπορούμε κατ΄ αρχήν να υποθέσουμε ότι $x_0 = 0$ (αυτό θα απλουστεύσει λίγο τους συμβολισμούς στην απόδειξη που ακολουθεί) αντικαθιστώντας τη συνάρτηση f με τη συνάρτηση $f(x - x_0)$ στην οποία τώρα το 0 είναι σημείο συνέχειας. Επειδή

$$\widehat{f(\cdot - x_0)}(n) = \widehat{f}(n)e^{-inx_0}$$

προκύπτει ότι και η νέα μας συνάρτηση έχει μηδενικούς συντελεστές Fourier.

Αρνούμαστε τώρα το συμπέρασμά μας και υποθέτουμε ότι $f(0) \neq 0$, και χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε $f(0) > 0$. Λόγω της συνέχειας της f στο 0 προκύπτει ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x) \geq \frac{f(0)}{2}, \quad \text{για } x \in (-\delta, \delta). \tag{5.1}$$

Κάνουμε έπειτα την παρατήρηση ότι ο μηδενισμός όλων των συντελεστών Fourier συνεπάγεται το μηδενισμό του εσωτερικού γινομένου της f με οποιοδήποτε τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Πράγματι αν $p(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$ είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο τότε

$$\langle f, p\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{p(x)}\,dx = \sum_{n=-N}^{N} \overline{c_n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \sum_{n=-N}^{N} \overline{c_n}\widehat{f}(n) = 0.$$

Ο τρόπος να καταλήξουμε σε αντίφαση είναι να βρούμε ένα τριγ. πολυώνυμο $p(x)$ για το οποίο $\langle f, p\rangle > 0$. Για να το επιτύχουμε αυτό θα επιλέξουμε το $p(x)$ να είναι "μεγάλο" και θετικό κοντά στο 0 και "μικρό" μακριά από το 0. Ξεκινάμε κατ΄ αρχήν με το πολυώνυμο $\epsilon + \cos x$, όπου $\epsilon > 0$. Η συνάρτηση αυτή έχει γράφημα ίδιο με της $\cos x$ αλλά σπρωγμένο προς τα πάνω κατά ϵ. Επιλέγοντας

$$\epsilon = \frac{1 - \cos\delta}{2}$$

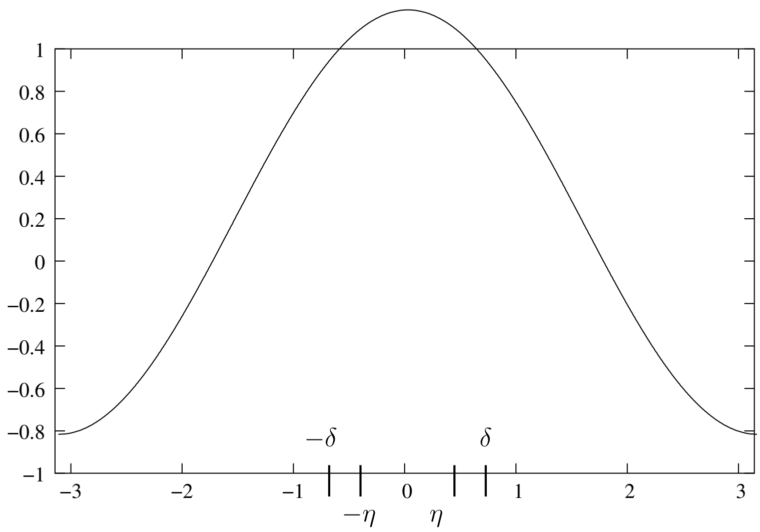
πετυχαίνουμε η συνάρτηση $q(x) = \epsilon + \cos x$ (επίσης τριγωνομετρικό πολυώνυμο) να έχει

$$\sup_{\delta \leq |x| \leq \pi} |q(x)| = 1 - \epsilon < 1 \tag{5.2}$$

Αφού $q(0) = 1 + \epsilon$ υπάρχει ένα $\eta \in (0, \delta)$ τ.ώ. να ισχύει

$$q(x) \geq 1, \quad \text{για } |x| \leq \eta. \tag{5.3}$$

Η συνάρτηση $q(x)$ φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.

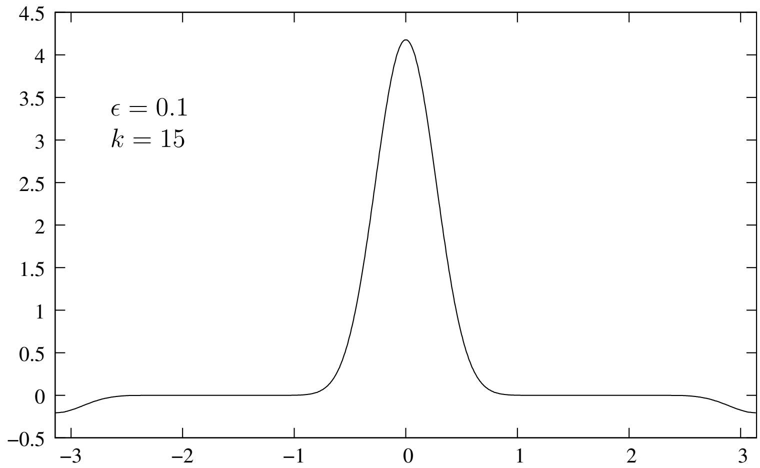


Σχήμα 3: Η συνάρτηση $q(x)$

Ορίζουμε τώρα το τριγωνομετρικό πολυώνυμο $p(x) = (q(x))^k$ όπου k ένας μεγάλος φυσικός αριθμός που μένει ακόμη να προσδιορισθεί (αφού γινόμενο τριγ. πολυωνύμων είναι επίσης τριγ. πολυώνυμο προκύπτει ότι και το $p(x)$ είναι τριγ. πολυώνυμο). Ο λόγος που υψώσαμε το $q(x)$ σε μια μεγάλη δύναμη είναι ότι θέλουμε να το κάνουμε πολύ μικρό στα δύο διαστήματα $[-\pi, -\delta]$ και $[\delta, \pi]$, ή, με άλλα λόγια, στο σύνολο $\delta \le |x| \le \pi$. Αυτό το επιτυγχάνουμε επειδή ισχύει η (5.2):

$$|p(x)| \le (1-\epsilon)^k, \quad \text{για } \delta \le |x| \le \pi. \tag{5.4}$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το πώς μοιάζει το πολυώνυμο $p(x)$ (παράμετροι: $\epsilon = 0.1, k = 15$).



Σχήμα 4: Το πολυώνυμο $p(x)$

Σπάμε τώρα το εσωτερικό γινόμενο $\langle f, p\rangle = 0$ σε τρία κομμάτια:

$$\begin{aligned} 0 = \langle f, p\rangle &= \int_{-\eta}^{\eta} f(x)p(x)\,dx + \int_{\eta\le|x|\le\delta} f(x)p(x)\,dx + \int_{\delta\le|x|\le\pi} f(x)p(x)\,dx \\ &= A + B + C. \end{aligned}$$

όπου η έκφραση $\int_{\eta\le|x|\le\delta}$ είναι απλά συντομογραφία για το άθροισμα των δύο ολοκληρωμάτων $\int_{-\delta}^{-\eta}$ και $\int_{\eta}^{\delta}$.

Κάνουμε τώρα την παρατήρηση ότι λόγω της (5.1) και επειδή $p(x) \ge 0$ στο $(-\pi/2, \pi/2)$ θα έχουμε ότι $B \ge 0$. Επίσης λόγω της (5.1) και της (5.3) ισχύει

$$A \ge \int_{-\eta}^{\eta} f(x)\,dx \ge \frac{f(0)}{2} 2\eta = \eta f(0).$$

Τέλος, λόγω της (5.4) έχουμε

$$\begin{aligned} |C| &= \left| \int_{\delta\le|x|\le\pi} f(x)p(x)\,dx \right| \\ &\le (1-\epsilon)^k \int_{\delta\le|x|\le\pi} |f(x)|\,dx \\ &\le (1-\epsilon)^k \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx. \end{aligned}$$

Αφού $(1-\epsilon)^k \to 0$ για $k \to \infty$, και επειδή η ποσότητα $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx$ είναι πεπερασμένη (ολοκληρωσιμότητα της f) έπεται ότι μπορούμε να επιλέξουμε το k τόσο μεγάλο ώστε να έχουμε $|C| \le \frac{1}{2}\eta f(0)$. Βάζοντας τις εκτιμήσεις αυτές για τα A, B, C μαζί παίρνουμε την επιθυμητή αντίφαση

$$0 = A + B + C \ge \eta f(0) + 0 + (-\frac{1}{2}\eta f(0)) = \frac{1}{2}\eta f(0) > 0.$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 5.1 είναι πλήρης. ∎

5.2 Συνέλιξη στην ευθεία

Ας είναι $R > 0$ και $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ δύο συνεχείς συναρτήσεις που είναι 0 έξω από το διάστημα $[-R, R]$. Σε αυτή την περίπτωση η συνέλιξη των δύο συναρτήσεων

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,dy \tag{5.5}$$

είναι χωρίς αμφιβολία καλώς ορισμένη αφού ο ολοκληρωτέος $f(y)g(x-y)$ είναι, για κάθε σταθερό x, μια συνεχής συνάρτηση του y που μηδενίζεται έξω από το διάστημα $[-R, R]$, και άρα το ολοκλήρωμα στον ορισμό (5.5) είναι το ίδιο με το $\int_{-R}^{R} f(y)g(x-y)\,dy$.

Εύκολα βλέπουμε σε αυτή την περίπτωση ότι η συνάρτηση $f * g(x)$ μηδενίζεται για $|x| > 2R$ αφού σε αυτή την περίπτωση δεν γίνεται ταυτόχρονα να έχουμε $y \in [-R, R]$ και $x - y \in [-R, R]$, και άρα ο ολοκληρωτέος μηδενίζεται ταυτοτικά.

Με την αλλαγή μεταβλητής $u = x - y$ στο ολοκλήρωμα (5.5) βλέπουμε ότι η συνέλιξη είναι αντιμεταθετική πράξη

$$f * g(x) = g * f(x).$$

Η συνέχεια των f και g που ζητήσαμε εδώ να έχουμε είναι κάπως περιοριστική. Μήπως θα μπορούσαν οι f και g να είναι απλώς ολοκληρώσιμες; Το απλό παράδειγμα των ολοκληρωσίμων συναρτήσεων

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x = 0 \text{ ή } |x| \ge 1 \\ \frac{1}{\sqrt{|x|}} & \text{για } 0 < |x| < 1 \end{cases}$$

μας δείχνει ότι τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά αφού ο υπολογισμός του $f * g(0)$ καταλήγει στο ολοκλήρωμα της $1/|x|$ στο $(-1, 1)$ το οποίο είναι $+\infty$.

✎ **5.1** *Δείξτε παρ' όλα αυτά ότι, για τις συναρτήσεις f και g που ορίσαμε παραπάνω ότι, η ποσότητα $f * g(x)$ είναι καλώς ορισμένη (η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη) για κάθε $x \ne 0$.*

Αν θέλουμε το ολοκλήρωμα στην (5.5) πάντα να συγκλίνει μια φυσιολογική συνθήκη για τις f και g είναι να έχουμε την μια από αυτές ολοκληρώσιμη και την άλλη φραγμένη. Αν για παράδειγμα η f είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ (δεν υποθέτουμε ότι μηδενίζεται έξω από κάποιο διάστημα) και $|g(x)| \le M < \infty$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε εύκολα βλέπουμε ότι η $f * g$ ορίζεται παντού και είναι μια φραγμένη συνάρτηση

$$|f * g(x)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,dy \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)g(x-y)|\,dy \le M \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|\,dy$$

και το δεξί μέλος της ανισότητας είναι μια πεπερασμένη σταθερά αφού η f έχει υποτεθεί ολοκληρώσιμη.

Αν όμως είμαστε διατεθειμένοι να αποδεχτούμε η συνάρτηση $f * g$ να ορίζεται σχεδόν παντού τότε αρκεί $f, g \in L^1(\mathbb{R})$.

Θεώρημα 5.2 *Αν $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ τότε σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $F(x, y) = f(y)g(x-y)$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς y και*

$$\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}\int\int |F(x,y)|\,dy\,dx &= \int\int |f(y)||g(x-y)|\,dx\,dy\\ &= \int |f(y)| \int |g(x-y)|\,dx\,dy\\ &= \int |f(y)|\,dy \int |g(x)|\,dx\\ &= \|f\|_1 \|g\|_1.\end{aligned}$$

Για την εναλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα του Fubini (δείτε τις σημειώσεις για το ολοκλήρωμα Lebesgue).

Άρα η ποσότητα $\int F(x,y)\,dy$ είναι πεπερασμένη σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπως θέλαμε να αποδείξουμε. ∎

5.3 Συνέλιξη στον κύκλο

Αν f, g είναι 2π-περιοδικές συναρτήσεις η συνέλιξή τους ορίζεται διαφορετικά από τον τύπο (5.5) ο οποίος δε θα έκανε νόημα σε αυτή την περίπτωση μια και οι 2π-περιοδικές συναρτήσεις δεν είναι ολοκληρώσιμες πάνω σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ (εκτός από τη μηδενική συνάρτηση). Ορίζουμε λοιπόν

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)g(x-y)\,dy. \tag{5.6}$$

Τι συνθήκες πρέπει να βάλουμε για τις f και g ώστε να κάνει νόημα το ολοκλήρωμα; Η εύκολη λύση κι εδώ είναι να απαιτήσουμε να είναι κι οι δύο συνεχείς, αλλά αυτό είναι περιοριστικό. Μια λύση κι εδώ είναι να ζητάμε η μια από αυτές να είναι ολοκληρώσιμη και η άλλη φραγμένη (άρα και ολοκληρώσιμη αφού μιλάμε για φραγμένο διάστημα ολοκλήρωσης).

Όπως και στην περίπτωση συνέλιξης συναρτήσεων ορισμένων πάνω σε όλο το $\mathbb{R}$ κι εδώ ορίζουμε τη συνέλιξη δύο οποιωνδήποτε συναρτήσεων στο $L^1(\mathbb{T})$ φτάνει να είμαστε διατεθειμένοι να αποδεχτούμε ότι η συνάρτησή μας ορίζεται απλά σχεδόν παντού, όχι παντού.

Σε αντίθεση με τη συνέλιξη στο $\mathbb{R}$, όπου οι συνθήκες για μια συνάρτηση να είναι στο $L^\infty(\mathbb{R})$ ή στο $L^1(\mathbb{R})$ δεν είναι μεταξύ τους συγκρίσιμες (δε συνεπάγεται η μια την άλλη), στην περίπτωση του κύκλου η συνθήκη το να είναι μια συνάρτηση στο $L^1(\mathbb{T})$ είναι η ευρύτερη δυνατή.

Θεώρημα 5.3 *Για τη συνέλιξη $f * g$ δύο συναρτήσεων $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ ισχύουν τα ακόλουθα.*

1. *Η συνέλιξη $f * g(x)$ ορίζεται σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και έχουμε*
$$\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1. \tag{5.7}$$
2. *Αν επιπλέον $g \in L^\infty(\mathbb{T})$ τότε η συνέλιξη $f * g(x)$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι ουσιωδώς φραγμένη ολοκληρώσιμη συνάρτηση και ισχύει*
$$\|f * g\|_\infty \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty. \tag{5.8}$$
Επίσης η συνάρτηση $f * g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.
3. *(Αντιμεταθετικότητα) Ισχύει $f * g(x) = g * f(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f * g$ είναι επίσης 2π-περιοδική αν την ορίσουμε κατάλληλα σε ένα σύνολο μέτρου 0.*
4. *(Γραμμικότητα) Η συνέλιξη είναι γραμμική και ως προς τα δύο ορίσματά της. Ισχύει δηλαδή, αν $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$*
$$f * (\lambda g + \mu h) = \lambda f * g + \mu f * h,$$
και ομοίως για γραμμικό συνδυασμό ως προς το πρώτο όρισμα, οποτεδήποτε ορίζεται καλώς το δεξί μέλος.

5. *(Προσεταιριστικότητα) Αν $f, g, h \in L^1(\mathbb{T})$ τότε*

$$(f * g) * h = f * (g * h).$$

Απόδειξη.
Απόδειξη του 5.3.1. Όπως στο Θεώρημα 5.2.
Απόδειξη του 5.3.2.

$$|f * g(x)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) g(x-y)\, dy \right| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(y)||g(x-y)|\, dy \le \|g\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(y)|\, dy = \|g\|_\infty \|f\|_1.$$

Για να δείξουμε τη συνέχεια της f παρατηρούμε ότι

$$|f * g(x+h) - f * g(x)| = |(\tau_h f - f) * g(x)| \le \|\tau_h f - f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Τέλος θυμόμαστε ότι ο τελεστής τ_h της μεταφοράς κατά h είναι συνεχής σε όλους τους χώρους L^p, και άρα η ποσότητα $\|\tau_h f - f\|_1$ μπορεί να γίνει όσο μικρή θέλουμε αρκεί το h να είναι αρκετά μικρό. Εφ' όσον δεν υπάρχει εξάρτηση από το x η συνέχεια είναι ομοιόμορφη στο $\mathbb{R}$.
Απόδειξη του 5.3.3. Για την αντιμεταθετικότητα κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $u = x - y$ στο ολοκλήρωμα (5.6) και χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι αν μια συνάρτηση είναι 2π-περιοδική τότε το ολοκλήρωμά της πάνω σε κάθε διάστημα μήκους 2π είναι το ίδιο. Η 2π-περιοδικότητα της $f * g$ είναι άμεση συνέπεια της περιοδικότητας της g (και ισχύει και στην περίπτωση της συνέλιξης στην ευθεία όταν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$ και η g είναι 2π-περιοδική).
Απόδειξη του 5.3.4. Αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη.
Απόδειξη του 5.3.5.

$$\begin{aligned}
(f * g) * h(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f * g(y) h(x-y)\, dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(y-t)\, dt\, h(x-y)\, dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(y-t) h(x-y)\, dy\, dt && \text{(εναλλαγή σειράς ολοκλήρωσης)} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(u) h(x-t-u)\, du\, dt && \text{(αλλαγή μεταβλητής } u = y - t\text{)} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g * h(x-t)\, dt \\
&= f * (g * h)(x).
\end{aligned}$$

Για να αιτιολογήσουμε την εναλλαγή σειράς ολοκλήρωσης παραπάνω αρκεί να δείξουμε (θ. Fubini) ότι το πολλαπλό ολοκλήρωμα

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)||g(y-t)|\, dt |h(x-y)|\, dy$$

είναι πεπερασμένο. Αυτό είναι συνέπεια διπλής εφαρμογής της ανισότητας (5.7).

∎

Δίνουμε ακόμη χωρίς απόδειξη την παρακάτω πολύ χρήσιμη ανισότητα.

Θεώρημα 5.4 (Ανισότητα Young) *Αν $p, q, r \in [1, +\infty]$ ικανοποιούν τη σχέση*

$$\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

τότε ισχύει

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{5.9}$$

Παρατηρείστε ότι οι περιπτώσεις 1 και 2 του Θεωρήματος 5.3 είναι ειδικές περιπτώσεις της ανισότητας του Young για $p = q = r = 1$ και $p = 1, q = \infty, r = \infty$.

Αξίζει επίσης να σημειώσουμε το εξής πόρισμα της ανισότητας του Young για $r = p$, $q = 1$.

Πόρισμα 5.4 *Αν $1 \leq p \leq \infty$ και $f \in L^p(\mathbb{T})$, $g \in L^1(\mathbb{T})$ τότε ισχύει*

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1. \tag{5.10}$$

Η ισχυρή σχέση που έχει η έννοια της συνέλιξης με την Ανάλυση Fourier οφείλεται στην επόμενη πολύ σημαντική πρόταση η οποία μας λέει ότι η πράξη της συνέλιξης στο πεδίο του "χρόνου" μεταφράζεται σε κατά σημείο πολλαπλασιασμό στο πεδίο "Fourier" ή στο πεδίο συχνοτήτων.

Θεώρημα 5.5 *Αν $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ τότε*

$$\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n) \cdot \widehat{g}(n) \tag{5.11}$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f * g(x) e^{-inx} \, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) g(x-y) \, dy \, e^{-inx} \, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) e^{-iny} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x-y) e^{-in(x-y)} \, dx \, dy && \text{(αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης)} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) e^{-iny} \, dy \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) e^{-int} \, dt && \text{(αλλαγή μεταβλητής } t = x - y) \\
&= \widehat{f}(n) \widehat{g}(n).
\end{aligned}$$

Η αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης αιτιολογείται από το θ. Fubini αφού το αντίστοιχο ολοκλήρωμα όπου οι συναρτήσεις έχουν αντικατασταθεί από το μέτρο τους συγκλίνει. ∎

✏ **5.2** *Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$, $g \in C(\mathbb{T})$ δείξτε ότι $f * g \in C(\mathbb{T})$.*

💡 *Γράψτε το $f * g(x_0) - f * g(x_0 + h)$ σαν ένα ολοκλήρωμα και χρησιμοποιείστε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης για να δείξετε ότι πάει στο 0 για $h \to 0$.*

5.3 *Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$, $g \in C^1(\mathbb{T})$ δείξτε ότι $f * g \in C^1(\mathbb{T})$ και ότι*

$$(f * g)' = f * g'. \tag{5.12}$$

Εκφράστε τη διαφορά $f * g'(x_0) - \frac{1}{h}(f * g(x_0 + h) - f * g(x_0))$ σαν ένα ολοκλήρωμα και χρησιμοποιείστε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης για να δείξετε ότι πάει στο 0 για $h \to 0$.

5.4 *Δείξτε ότι το συμπέρασμα του Προβλήματος 5.2 ισχύει ακόμη και αν υποθέσουμε μόνο ότι $g \in L^\infty(\mathbb{T})$.*
Χρησιμοποιείστε το ότι η μεταφορά είναι συνεχής στο $L^1(\mathbb{T})$, ότι δηλ. αν $F \in L^1(\mathbb{T})$ ισχύει

$$\|F(\cdot - h) - F(\cdot)\|_1 \to 0, \quad \text{για } h \to 0.$$

6 Πέ, 7/10/10: Εισαγωγή στο μέτρο Lebesgue

Δείτε τις σύντομες σημειώσεις εδώ.

7 Τρ, 12/10/10: Εισαγωγή στο μέτρο Lebesgue

Δείτε τις σύντομες σημειώσεις εδώ.

8 Πέ, 14/10/10: Εισαγωγή στο μέτρο Lebesgue

Δείτε τις σύντομες σημειώσεις εδώ.

9 Τρ, 19/10/10: Εισαγωγή στο μέτρο Lebesgue

Δείτε τις σύντομες σημειώσεις εδώ.

10 Πέ, 21/10/10: Εισαγωγή στο μέτρο Lebesgue

Δείτε τις σύντομες σημειώσεις εδώ.

11 Τρ, 26/10/10: Μέσοι όροι μερικών αθροισμάτων της σειράς Fourier

Όταν μελετάμε το κεντρικό ερώτημα της ανάλυσης Fourier που είναι το κατά πόσο, με ποιο τρόπο και υπό ποιες συνθήκες τα μερικά αθροίσματα μιας σειράς Fourier συγκλίνουν στη συνάρτηση, συχνά συναντάμε αρνητικές απαντήσεις.

Ένα πολύ βασικό αποτέλεσμα, για παράδειγμα, είναι ότι υπάρχουν συναρτήσεις $f \in C(\mathbb{T})$ που η σειρά Fourier τους δε συγκλίνει στη συνάρτηση παντού. Προς το παρόν δε θα περιγράψουμε τέτοια παραδείγματα αλλά θα επισημάνουμε ότι το φαινόμενο αυτό συνδέεται με το ότι οι ποσότητες

$$\|D_N\|_1$$

δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένες για όλα τα N (εδώ D_N είναι ο πυρήνας Dirichlet (2.8) τάξης N).

11.1 *Αποδείξτε ότι υπάρχει μια θετική σταθερά C (δεν έχει ιδιαίτερη σημασία ποια είναι) τ.ώ.*

$$\|D_N\|_1 \ge C \log N. \tag{11.1}$$

Σχεδιάστε πρώτα το γράφημα της D_N χρησιμοποιώντας τον τύπο (2.9). Δε χρειάζεται να είστε πολύ ακριβείς στο γράφημά σας, ούτε να βρείτε την καλύτερη σταθερά C στην (11.1).

Αν επιτρέψουμε $f \in L^1(\mathbb{T})$ τότε υπάρχουν παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων f των οποίων η σειρά Fourier δε συγκλίνει πουθενά (οφείλονται στον Kolmogorov).

Από την θετική πλευρά υπάρχει το θεώρημα του L. Carleson που λέει ότι για κάθε $f \in L^2(\mathbb{T})$ (άρα και για κάθε συνεχή συνάρτηση) η σειρά Fourier της f συγκλίνει στην f σχεδόν παντού. Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος (1966) θεωρήθηκε μια από τις μεγάλες επιτυχίες της ανάλυσης Fourier (απαντούσε σε μια εικασία του Lusin) και είναι πολύ δύσκολη για να παρουσιαστεί σε αυτές τις σημειώσεις.

Θυμίζουμε εδώ ότι έχουμε τους ακόλουθους εγκλεισμούς για τους συνηθισμένους χώρους συναρτήσεων πάνω στον κύκλο:

$$\cdots \subseteq C^j(\mathbb{T}) \subseteq C^{j-1}(\mathbb{T}) \subseteq \cdots \subseteq C^0(\mathbb{T}) = C(\mathbb{T}) \subseteq L^\infty(\mathbb{T}) \subseteq \cdots \subseteq L^2(\mathbb{T}) \subseteq \cdots \subseteq L^1(\mathbb{T}). \tag{11.2}$$

11.1 Μέσοι όροι αριθμητικής ακολουθίας

Για να παρακάμψουμε τα πολλά εμπόδια που υπάρχουν στη σύγκλιση των μερικών αθροισμάτων της σειράς Fourier μελετάμε τους μέσους όρους τους.

Θεώρημα 11.1 *Έστω $a_n \in \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots$, και*

$$\sigma_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

Αν $a_n \to a \in \mathbb{C}$ τότε και $\sigma_n \to a$. Αν όμως σ_n συγκλίνει δεν έπεται ότι και η a_n συγκλίνει.

Απόδειξη. Εύκολα βλέπει κανείς ότι μπορεί να υποθέσει $a = 0$. Έστω $\epsilon > 0$ και n_0 τ.ώ. αν $n \geq n_0$ να ισχύει $|a_n| < \epsilon$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{a_1 + \cdots + a_{n_0}}{n} + \frac{a_{n_0+1} + \cdots + a_n}{n} \\ &= \frac{a_1 + \cdots + a_{n_0}}{n} + \frac{n - n_0}{n}\frac{a_{n_0+1} + \cdots + a_n}{n - n_0} \\ &= I + II.\end{aligned}$$

Η ποσότητα I παραπάνω τείνει στο 0 (ο αριθμητής είναι σταθερός) για $n \to \infty$ ενώ για την ποσότητα II έχουμε

$$|II| \leq \left|\frac{a_{n_0+1} + \cdots + a_n}{n - n_0}\right|.$$

Όμως η ποσότητα στην απόλυτο τιμή στο δεξί μέλος είναι ο μέσος όρος των αριθμών $a_{n_0+1}, \ldots, a_n$ που όλοι βρίσκονται μέσα στον δίσκο $\{|z| \leq \epsilon\}$. Επειδή το χωρίο αυτό είναι κυρτό και ο μέσος όρος τους θα είναι μέσα στο δίσκο αυτό, άρα $|II| \leq \epsilon$. Έχουμε λοιπόν δείξει ότι $\limsup_{n\to\infty} |\sigma_n| \leq \epsilon$, κι αφού το ϵ είναι οτιδήποτε έχουμε δείξει $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.

Για να δούμε ότι η σύγκλιση της ακολουθίας σ_n δε συνεπάγεται τη σύγκλιση της a_n αρκεί να κοιτάξουμε το παράδειγμα της ακολουθίας $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ για την οποία οι μέσοι όροι συγκλίνουν στο $1/2$ ενώ η ίδια η ακολουθία δε συγκλίνει. ∎

✏ **11.2** *Κατασκευάστε μια ακολουθία $a_n \geq 0$ που οι μέσοι όροι της συγκλίνουν στο 0 αλλά η ίδια η ακολουθία να έχει το ∞ ως $\limsup$ της.*

11.2 Cesáro μέσοι όροι της σειράς Fourier και το θεώρημα του Fejér

Το Θεώρημα 11.1, εφαρμοσμένο στην ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς Fourier μιας συνάρτησης,

$$S_N(f)(x) = \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k) e^{ikx},$$

μας λέει ότι αν το όριο

$$\alpha = \lim_{N\to\infty} S_N(f)(x)$$

υπάρχει για κάποιο $x \in \mathbb{R}$ τότε υπάρχει και το όριο των μέσων όρων των $S_N f(x)$

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n(f)(x) \tag{11.3}$$

και είναι πάλι το α.

✏ **11.3** *Δείξτε ότι*

$$\sigma_N(f)(x) = \sum_{k=-N}^{N}\left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right)\widehat{f}(k)e^{ikx}. \tag{11.4}$$

Ενδέχεται όμως να υπάρχει το όριο των μέσων (11.3) (λέγονται συνήθως Cesáro μέσοι της f στο x) χωρίς να υπάρχει το όριο των $S_N(f)(x)$ και αυτό ακριβώς είναι που καθιστά τους Cesáro μέσους ένα χρήσιμο υποκατάστατο των μερικών αθροισμάτων. Στην περίπτωση που ισχύει

$$\alpha = \lim_{N\to\infty} \sigma_N(f)(x)$$

λέμε ότι η σειρά Fourier της f στο σημείο x είναι Cesáro αθροίσιμη στο α. Εν γένει περιμένουμε η φυσιολογική συμπεριφορά να είναι $\alpha = f(x)$. Η πρώτη περίπτωση που αυτό συμβαίνει είναι ακριβώς όταν $f \in C(\mathbb{T})$ και αυτό είναι το περιεχόμενο κλασικού θεωρήματος του Fejér.

Θεώρημα 11.2 (Fejér) *Αν $f \in C(\mathbb{T})$ τότε $\sigma_n(f)(x) \to f(x)$ ομοιόμορφα για $x \in \mathbb{R}$. Με άλλα λόγια*

$$\|\sigma_n(f) - f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \to 0 \quad (n\to\infty). \tag{11.5}$$

Το Θεώρημα του Fejér μας δίνει μια νέα απόδειξη του θεωρήματος της Μοναδικότητας 5.1 για συνεχείς συναρτήσεις.

Πόρισμα 11.1 *(Μοναδικότητα) Αν $f, g \in C(\mathbb{T})$ και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ τότε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*

Απόδειξη του Πορίσματος 11.1. Αφού οι δύο συναρτήσεις έχουν τους ίδιους συντελεστές Fourier οι ποσότητες $\sigma_n(f)(x)$ και $\sigma_n(g)(x)$ θα ταυτίζονται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού αυτές ορίζονται μέσω των συντελεστών Fourier της κάθε συνάρτησης. Αφού $f(x) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(f)(x)$ και $g(x) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(g)(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έπεται ότι $f(x) = g(x)$. ∎

Πόρισμα 11.2 (Μοναδικότητα στο $L^1(\mathbb{T})$) *Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\widehat{f}(n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ τότε $f = 0$ σχεδόν παντού.*

Απόδειξη. Από το μηδενισμό των συντελεστών Fourier προκύπτει ότι $\sigma_n(f) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα, από το Πόρισμα 13.1 για $p = 1$, προκύπτει ότι $f = 0$ σ.π. ∎

Ένα άλλο πολύ χρήσιμο πόρισμα του Θεωρήματος του Fejér 11.2 είναι το ακόλουθο ανάλογο του θεωρήματος του Weierstrass (ότι τα αλγεβρικά πολυώνυμα προσεγγίζουν ομοιόμορφα κάθε συνεχή συνάρτηση σε κλειστό και φραγμένο διάστημα).

Πόρισμα 11.3 *Τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στο χώρο $C(\mathbb{T})$ με την ομοιόμορφη (L^∞) μετρική.*

Απόδειξη του Πορίσματος 11.3. Αν $f \in C(\mathbb{T})$ τότε οι συναρτήσεις $\sigma_n(f)(x)$ είναι τριγωνομετρικά πολυώνυμα και προσεγγίζουν ομοιόμορφα την f. ∎

✏ **11.4** *Αν $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$, δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία τριγωνομετρικών πολυωνύμων p_n τ.ώ. $\|p_n - f\|_{L^p(\mathbb{T})} \to 0$.*

💡 *Χρησιμοποιείστε το Πόρισμα 11.3 και το γεγονός ότι οι συνεχείς συναρτήσεις είναι πυκνές στους χώρους $L^p(\mathbb{T})$ με τις αντίστοιχες μετρικές.*

12 Πέ, 28/10/10: Αργία

13 Τρ, 2/11/10: Απόδειξη του θεωρήματος του Fejér

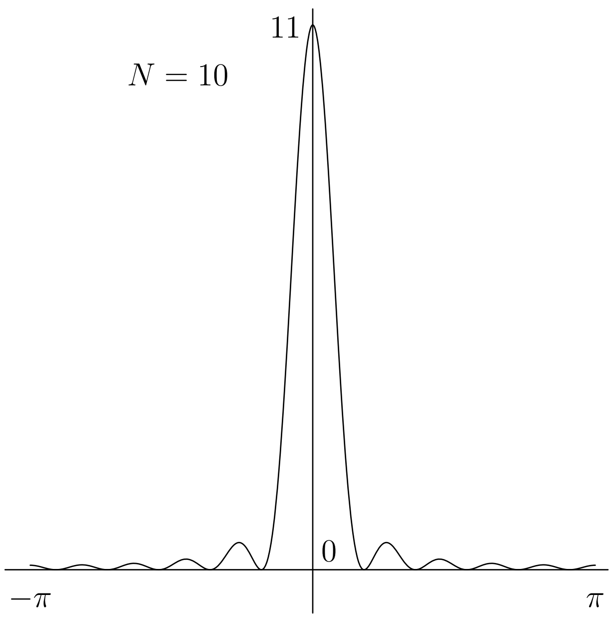
Σε αναλογία με τη σχέση $S_N(f)(x) = f * D_N(x)$ για τα μερικά αθροίσματα μπορούμε να γράψουμε $\sigma_N(f)(x) = f * K_N(x)$, όπου K_N είναι ο *πυρήνας του Fejér*

$$K_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) e^{ikx}. \tag{13.1}$$

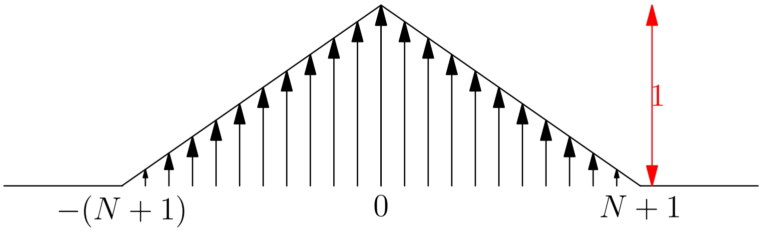
Αυτή η σχέση προκύπτει άμεσα από τη σχέση 11.4 και το γεγονός ότι οι συντελεστές Fourier μιας συνέλιξης είναι το γινόμενο των συντελεστών Fourier των δύο συνελικτικών παραγόντων (Θεώρημα 5.5).

✏ **13.1** *Δείξτε ότι*

$$K_N(x) = \frac{1}{N} \frac{\sin^2 \frac{Nx}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}}. \tag{13.2}$$



Σχήμα 5: Ο πυρήνας του Fejér για $N = 10$



Σχήμα 6: Οι συντελεστές Fourier του πυρήνα του Fejér $K_N(x)$ για $N = 10$

Είναι πολύ σημαντικό ότι, όπως φαίνεται από την (13.2), ο πυρήνας του Fejér είναι μη αρνητική συνάρτηση, της οποίας το ολοκλήρωμα είναι

$$\|K_N\|_1 = \int K_N = \widehat{K_N}(0) = 1.$$

Ο πυρήνας του Fejér είναι ειδική περίπτωση αυτο που ονομάζουμε *καλό πυρήνα*.

Ορισμός 13.1 *Μια ακολουθία συναρτήσεων $k_n \in L^1(\mathbb{T}), n \in \mathbb{N}$, ονομάζεται* καλός πυρήνας *αν*

1. *$\int k_n = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$,*
2. *Υπάρχει πεπερασμένη σταθερά M τ.ώ. $\|k_n\|_1 \le M$, για $n \in \mathbb{N}$, και*
3. *Για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει*
$$\int\limits_{|x|>\epsilon} |k_n(x)|\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{-\epsilon} + \int\limits_{\epsilon}^{\pi}\right)|k_n| \to 0.$$

Έχουμε ήδη δει ότι ο πυρήνας του Fejér ικανοποιεί τις δύο πρώτες ιδιότητες. Για να δείξουμε και την ιδιότητα 13.1.3 παρατηρούμε ότι ο τύπος (13.2) συνεπάγεται την ανισότητα

$$K_N(x) \le \frac{1}{N \sin^2(x/2)}.$$

✏ **13.2** *Συμπληρώστε την απόδειξη ότι ο πυρήνας $K_N(x)$ ικανοποιεί την 13.1.3.*

Το Θεώρημα του Fejér έπεται τώρα από το ακόλουθο γενικότερο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 13.1 *Αν k_n είναι ένας καλός πυρήνας και $f \in C(\mathbb{T})$ τότε $f * k_n \to f$ ομοιόμορφα.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι $|f * k_n(x) - f(x)| \to 0$ ομοιόμορφα ως προς x.

Έστω $\epsilon > 0$. Από την ομοιόμορφη συνέχεια της f έπεται ότι υπάρχει $\delta > 0$ τ.ώ. αν $|y| \le \delta$ τότε να ισχύει

$$|f(x-y) - f(x)| \le \epsilon. \tag{13.3}$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}
|f * k_n(x) - f(x)| &= \left|\int f(x-y)k_n(y)\,dy - \int f(x)k_n(y)\,dy\right| && (\text{αφού } \textstyle\int k_n = 1)\\
&\le \int |f(x-y) - f(x)| k_n(y)\,dy && (\text{τριγωνική ανισότητα})\\
&= \int\limits_{|y|\le\delta} + \int\limits_{|y|>\delta}\\
&= I + II.
\end{aligned}$$

Από την (13.3) έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_{|y|\le\delta} |f(x-y)-f(x)| k_n(y)\,dy \\ &\le \epsilon \int_{|y|\le\delta} k_n(y)\,dy \\ &\le \epsilon \int k_n \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε τώρα την ιδιότητα 13.1.3 που ισχύει για την k_n και παίρνουμε

$$\begin{aligned} II &= \int_{|y|>\delta} |f(x-y)-f(x)| k_n(y)\,dy \\ &\le \int_{|y|>\delta} |f(x-y)| k_n(y)\,dy + \int_{|y|>\delta} |f(x)| k_n(y)\,dy \\ &\le 2\|f\|_\infty \int_{|y|>\delta} k_n(y)\,dy \\ &\to 0. \end{aligned}$$

Έπεται ότι για n αρκετά μεγάλο έχουμε $I + II \le 2\epsilon$. ∎

Πόρισμα 13.1 (Fejér στους L^p) *Αν $1 \le p \le \infty$ και $f \in L^p(\mathbb{T})$ τότε $\|\sigma_n(f) - f\|_p \to 0$ για $n \to \infty$.*

Απόδειξη. Η περίπτωση $p = \infty$ είναι το Θεώρημα 11.2. Έστω $p < \infty$, $\epsilon > 0$ και $g \in C(\mathbb{T})$ τ.ώ. $\|f - g\|_p \le \epsilon$. Αυτό είναι εφικτό λόγω της πυκνότητας των συνεχών συναρτήσεων στους χώρους $L^p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$.

Έχουμε

$$\begin{aligned} \|\sigma_n(f) - f\|_p &= \|\sigma_n(f) - \sigma_n(g) + \sigma_n(g) - g + g - f\|_p \\ &\le \|\sigma_n(f-g)\|_p + \|\sigma_n(g) - g\|_p + \|g - f\|_p \\ &\le \|f-g\|_p \|K_n\|_1 + \|\sigma_n(g) - g\|_\infty + \|g - f\|_p \qquad \text{(από (5.10))} \\ &\le \epsilon + \|\sigma_n(g) - g\|_\infty + \epsilon. \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 11.2 έπεται ότι για n αρκετά μεγάλο ισχύει

$$\|\sigma_n(f) - f\|_p \le 3\epsilon.$$

∎

14 Πέ, 4/11/10: Εφαρμογή: Το θεώρημα ισοκατανομής του Weyl

Ορισμός 14.1 *Έστω $x \in \mathbb{R}$. Το ακέραιο μέρος του x ορίζεται ως εξής:*

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : \ n \le x\}.$$

Το κλασματικό μέρος του x είναι η ποσότητα $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Γράφουμε επίσης $x \bmod 1 = \{x\}$.

Προφανώς ισχύει $\{x\} \in [0, 1)$.

Ορισμός 14.2 *Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $0 \le x_n \le 1$, $n = 1, 2, \ldots$, λέγεται ισοκατανεμημένη αν για κάθε αριθμούς a, b με $0 \le a \le b \le 1$ ισχύει*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} |\{n : \; 1 \le n \le N \;\&\; x_n \in [a, b]\}| = b - a.$$

Αν $x_n \in \mathbb{R}$ λέμε ότι η x_n είναι ισοκατανεμημένη mod 1 αν η ακολουθία των κλασματικών μερών $\{x_n\}$ είναι ισοκατανεμημένη.

Το νόημα του προηγούμενου ορισμού είναι ότι μια ακολουθία είναι ισοκατανεμημένη στο διάστημα $[0, 1]$ αν το πλήθος των όρων της που πέφτουν μέσα σε ένα διάστημα $[a, b]$, αν κοιτάξουμε ένα μεγάλο αρχικό κομμάτι της ακολουθίας, είναι περίπου ανάλογο του μήκους του διαστήματος $b - a$.

14.1 *Δείξτε ότι η ακολουθία*

$$0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \ldots$$

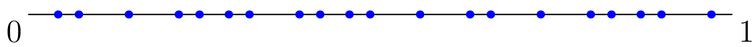
είναι ισοκατανεμημένη.

14.2 *Περιγράψτε μια ακολουθία $x_n \in [0, 1]$ που να μην είναι ισοκατανεμημένη.*

Σκοπός μας εδώ είναι αποδείξουμε το ακόλουθο πολύ σημαντικό θεώρημα.

Θεώρημα 14.1 (Weyl) *Αν α άρρητος τότε η ακολουθία $n\alpha$, $n = 1, 2, \ldots$, είναι ισοκατανεμημένη mod 1.*

Στο παρακάτω σχήμα μπορείτε να δείτε τα κλασματικά μέρη $\{i\sqrt{2}\}$, $i = 1, 2, \ldots, 20$.



Το θεώρημα 14.1 θα το αποδείξουμε χρησιμοποιώντας εργαλεία αρμονικής ανάλυσης. Υπάρχει και στοιχειώδης τρόπος να αποδειχτεί αλλά (α) αυτός δεν είναι σε καμία περίπτωση πιο εύκολος και (β) δεν έχει τις δυνατότητες επέκτασης που έχει η μέθοδος που θα δούμε. Το θεώρημα 14.1 είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 14.2.

Θεώρημα 14.2 (Κριτήριο ισοκατανομής του Weyl) *Έστω $x_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(α) Η x_n είναι ισοκατανεμημένη mod 1.
(β) Για κάθε συνεχή και 1-περιοδική συνάρτηση f ισχύει

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) \to \int_0^1 f(x)\, dx. \tag{14.1}$$

(γ) Για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ισχύει

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{i2\pi k x_n} \to 0. \tag{14.2}$$

14.3 *Δείξτε ότι το Θεώρημα 14.1 έπεται από το Θεώρημα 14.2.*
Επαληθεύστε την ιδιότητα (γ) του Θεωρήματος 14.2 για την ακολουθία $n\alpha$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

14.4 *Δείξτε ότι η ακολουθία $n\alpha$, $n = 1, 2, \ldots$, δεν είναι ισοκατανεμημένη mod 1 αν $\alpha \in \mathbb{Q}$.*

Απόδειξη του Θεωρήματος 14.2.
(α) ⇒ (β)

Παρτηρούμε ότι η ιδιότητα της ισοκατανομής mod 1 μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \chi_{[a,b]}(\{x_n\}), \quad (\text{για } 0 \le a \le b \le 1).$$

Αυτό συνεπάγεται ότι η (14.1) ισχύει για κάθε συνάρτηση f που γράφεται ως πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών κλειστών διαστημάτων, δηλ. για κάθε τμηματικά σταθερή συνάρτηση ορισμένη στο $[0,1]$. Όμως οι τμηματικά σταθερές συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα πυκνές στις συνεχείς συναρτήσεις στο $[0,1]$ και εύκολα προκύπτει ότι η ιδιότητα (14.1) μεταβιβάζεται και στα ομοιόμορφα όρια συναρτήσεων για τις οποίες ισχύει.

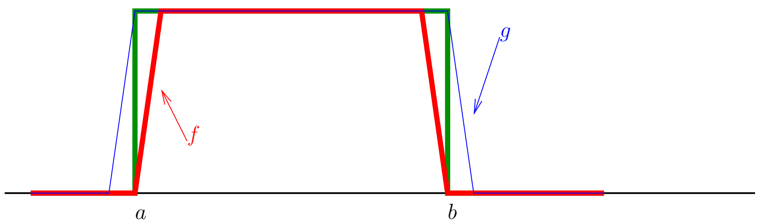
✏ **14.5** *Αποδείξτε με λεπτομέρεια τον ισχυρισμό της προηγούμενης παραγράφου, ότι δηλ. η (14.1) ισχύει για όλες τις συνεχείς συναρτήσεις επειδή ισχύει για ένα υποσύνολο αυτών που είναι ομοιόμορφα πυκνό.*

(β) ⇒ (α)

Έστω $[a,b] \subseteq (0,1)$ και $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό. Προσεγγίζουμε από πάνω και από κάτω τη συνάρτηση $\chi_{[a,b]}$ (που δεν είναι συνεχής)

$$f \le \chi_{[a,b]} \le g$$

από τις συνεχείς (τραπεζοειδείς) συναρτήσεις f και g όπως φαίνονται στο παρακάτω Σχήμα.



Η συνάρτηση f είναι ίση με 0 εκτός του $[a,b]$, είναι ίση με 1 στο διάστημα $[a+\epsilon, b-\epsilon]$ και είναι γραμμική και συνεχής στα δύο διαστήματα $[a, a+\epsilon]$ και $[b-\epsilon, b]$. Ομοίως η g είναι ίση με 1 εντός του $[a,b]$, είναι ίση με 0 εκτός του διαστήματος $[a-\epsilon, b+\epsilon]$ και είναι γραμμική και συνεχής στα δύο διαστήματα $[a-\epsilon, a]$ και $[b, b+\epsilon]$.

Εφαρμόζουμε την (14.1) για τις συνεχείς συναρτήσεις f και g και παίρνουμε ως συνέπεια ότι το liminf και το limsup της ποσότητας

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \chi_{[a,b]}(\{x_n\})$$

είναι ανάμεσα στις τιμές $\int f$ και $\int g$ οι οποίες, για $\epsilon \to 0$, συγκλίνουν στο $\int \chi_{[a,b]}$.

(β) ⇒ (γ)

Προφανές.

(γ) ⇒ (β)

Εδώ χρησιμοποιούμε το γεγονός (συνέπεια του Θεωρήματος του Fejér 11.2) ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα προσεγγίζουν ομοιόμορφα όλες τις συνεχείς και περιοδικές συναρτήσεις. Για να είμαστε λίγο πιο ακριβείς, το Θεώρημα 11.2 αναφέρεται σε 2π-περιοδικές συναρτήσεις και στα τριγωνομετρικά πολυώνυμα που είναι πεπερασμένοι γραμμικοί συνδυασμοί των συναρτήσεων e^{inx}, $n \in \mathbb{Z}$, ενώ εδώ αναφερόμαστε σε 1-περιοδικές συναρτήσεις και σε τριγωνομετρικά πολυώνυμα που είναι πεπερασμένοι γραμμικοί συνδυασμοί των συναρτήσεων $e^{2\pi inx}$, $n \in \mathbb{Z}$, αλλά είναι σχεδόν προφανές ότι το θεώρημα ισχύει και στην 1-περιοδική περίπτωση.

Αφού λοιπόν η (14.1) ισχύει για όλες τις μη σταθερές εκθετικές συναρτήσεις (αφού $\int e^{2\pi ikx}\,dx = 0$ για $k \ne 0$) και αφού προφανώς ισχύει και για τις σταθερές, έπεται ότι η (14.1) ισχύει για όλα τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα και, κατ' επέκταση σε όλες τις 1-περιοδικές συνεχείς συναρτήσεις, λόγω της πυκνότητας, στην ομοιόμορφη μετρική, των τριγωνομετρικών πολυωνύμων σε αυτές. ∎

✏ **14.6** *Έστω $a \neq 0$ ένας πραγματικός αριθμός και $0 < \rho < 1$. Δείξτε ότι η ακολουθία $\{an^\rho\}$ είναι ισοκατανεμημένη.*

💡 *Χρησιμοποιείστε το κριτήριο ισοκατανομήςτου Weyl (Θεώρημα 14.2). Εκτιμείστε το άθροισμα που εμφανίζεται από το αντίστοιχο ολοκλήρωμα, το οποίο υπολογίζεται ακριβώς, και δείξτε ότι το σφάλμα είναι $O(N^\rho)$.*

15 Τρ, 16/11/10: Η θεωρία L^2

Αν $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ το εσωτερικό τους γινόμενο είναι η ποσότητα

$$\langle f, g\rangle = \langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \int f\overline{g}. \tag{15.1}$$

Η ανισότητα Cauchy-Schwarz (δείτε το φυλλάδιο για το μέτρο Lebesgue)

$$\int |f||g| \le \left(\int |f|^2\right)^{1/2} \left(\int |g|^2\right)^{1/2} \tag{15.2}$$

μας εγγυάται ότι ο ολοκληρωτέος στο δεξί μέλος της (15.1) είναι στο $L^1(\mathbb{T})$ και άρα το ολοκλήρωμα που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο υπάρχει.

Ορισμός 15.1 *Οι συναρτήσεις $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ ονομάζονται* μεταξύ τους κάθετες (ή ορθογώνιες) *αν $\langle f, g\rangle = 0$.*
Μια ακολουθία $f_n \in L^2(\mathbb{T})$ ονομάζεται ορθογώνιο σύστημα *αν τα στοιχεία της είναι ανά δύο κάθετα. Λέγεται* ορθοκανονικό σύστημα *αν τα στοιχεία της έχουν επιπλέον νόρμα 1.*

Το εσωτερικό γινόμενο είναι μια *διγραμμική μορφή*, είναι δηλ. γραμμικό ως προς το πρώτο και το δεύτερο μέλος χωριστά:

$$\begin{aligned}
\langle \lambda f + \mu g, h\rangle &= \lambda\langle f, h\rangle + \mu\langle g, h\rangle, && (\lambda, \mu \in \mathbb{C}, f, g, h \in L^2(\mathbb{T}))\\
\langle h, \lambda f + \mu g\rangle &= \overline{\lambda}\langle h, f\rangle + \overline{\mu}\langle h, g\rangle, && (\lambda, \mu \in \mathbb{C}, f, g, h \in L^2(\mathbb{T}))\\
\langle f, g\rangle &= \overline{\langle g, f\rangle} && (f, g \in L^2(\mathbb{T})).
\end{aligned}$$

Άμεσα βλέπουμε ότι

$$\langle f, f\rangle = \|f\|_2^2.$$

Αυτή η ιδιότητα μας επιτρέπει να κάνουμε πάρα πολλούς υπολογισμούς που αφορούν νόρμες συναρτήσεων (οι οποίες δεν είναι καθόλου απλές στη χρήση τους σε υπολογισμούς) περνώντας στα αντίστοιχα εσωτερικά γινόμενα.

✏ **15.1** *Δείξτε το* Πυθαγόρειο θεώρημα*: αν $f_1, \ldots, f_n \in L^2(\mathbb{T})$ είναι ανά δύο κάθετα τότε*

$$\|f_1 + \cdots + f_n\|_2^2 = \|f_1\|_2^2 + \cdots + \|f_n\|_2^2.$$

Αν τα f_k είναι επιπλέον ορθοκανονικό σύστημα και $u = \sum_{k=1}^N a_k f_k$, $a_k \in \mathbb{C}$, δείξτε ότι

$$\|u\|_2^2 = |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2.$$

✏ **15.2** *Αν ϕ_n, $n = 1, 2, \ldots, N$, είναι ορθοκανονικό σύστημα και $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ τότε*

$$\left\langle \sum_{n=1}^N a_n\phi_n, \sum_{n=1}^N b_n\phi_n \right\rangle = \sum_{n=1}^N a_n\overline{b_n}.$$

Ειδικότερα, παίρνοντας $a_n = b_n$, έχουμε

$$\left\| \sum_{n=1}^N a_n\phi_n \right\|_2^2 = \sum_{n=1}^N |a_n|^2.$$

✏ **15.3** *Αποδείξτε την τριγωνική ανισότητα για την L^2 νόρμα:*

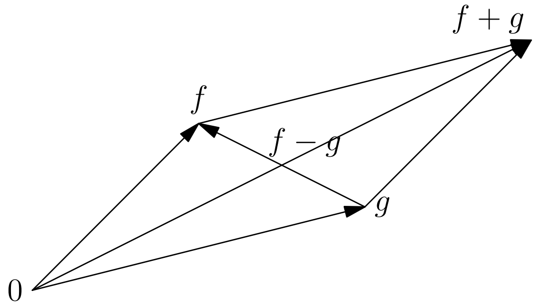
$$\|f+g\|_2 \le \|f\|_2 + \|g\|_2, \quad (f,g \in L^2(\mathbb{T})).$$

💡 *Τετραγωνίστε και χρησιμοποιείστε την ανισότητα Cauchy-Schwarz.*

✏ **15.4** *Αν $f, f_n \in L^2(\mathbb{T})$ και $\|f_n - f\|_2 \to 0$ δείξτε ότι $\|f_n\|_2 \to \|f\|_2$.*

💡 *Χρησιμοποιείστε την τριγωνική ανισότητα στη μορφή*

$$\|f_n\|_2 \le \|f_n - f\|_2 + \|f\|_2, \quad \|f\|_2 \le \|f - f_n\|_2 + \|f_n\|_2.$$



Σχήμα 7: Το άθροισμα δύο διανυσμάτων f και g και η διαφορά τους ως οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου

✏ **15.5** *Δείξτε τον κανόνα του παραλληλογράμου: αν $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ τότε*

$$2\|f\|_2^2 + 2\|g\|_2^2 = \|f+g\|_2^2 + \|f-g\|_2^2.$$

Τι λέει αυτή η ταυτότητα για τα μήκη των πλευρών και των διαγωνίων ενός παραλληλογράμου; (Δείτε το Σχήμα 7.)

Το εσωτερικό γινόμενο είναι συνεχές ως πρός τα δύο ορίσματά του στην τοπολογία της νόρμας L^2. Αυτό σημαίνει ότι αν $\|f_n - f\|_2 \to 0$ και $\|g_n - g\|_2 \to 0$ τότε και

$$\langle f_n, g_n \rangle \to \langle f, g \rangle.$$

Για να το δείξουμε αυτό παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} |\langle f_n, g_n \rangle - \langle f, g \rangle| &= |\langle f_n, g_n \rangle - \langle f_n, g \rangle + \langle f_n, g \rangle - \langle f, g \rangle| \\ &\le |\langle f_n, g_n - g \rangle| + |\langle f_n - f, g \rangle| \\ &\le \|f_n\|_2 \|g_n - g\|_2 + \|f_n - f\|_2 \|g\|_2 && \text{(από Cauchy-Schwarz)} \\ &\to 0 \end{aligned}$$

από τις υποθέσεις μας και από το Πρόβλημα 15.4.

Ο γραμμικός χώρος $L^2(\mathbb{T})$ με τη μετρική που ορίζεται από την L^2 νόρμα είναι πλήρης χώρος (αυτό δεν το αποδεικνύουμε εδώ· δείτε το φυλλάδιο για το μέτρο Lebesgue). Συνέπεια της πληρότητας είναι το παρακάτω.

Λήμμα 15.1 *Αν $\phi_n \in L^2(\mathbb{T})$ είναι ορθοκανονικό σύστημα και $\sum_n |a_n|^2 < \infty$ για κάποια ακολουθία μιγαδικών αριθμών a_n, τότε η σειρά*

$$\sum_n a_n \phi_n$$

συγκλίνει στη νόρμα L^2. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $f \in L^2(\mathbb{T})$ τ.ώ. $\left\| f - \sum_{n=1}^N a_n \phi_n \right\|_2 \to 0$ για $N \to \infty$.

Απόδειξη. Λόγω της πληρότητας αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \phi_n$$

είναι Cauchy. Έστω $\epsilon > 0$. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει ένας δείκτης n_0 ώστε αν $m > n \geq n_0$ τότε να ισχύει

$$\|S_m - S_n\|_2 \leq \epsilon.$$

Αλλά

$$\|S_m - S_n\|_2^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \phi_k \right\|_2^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |a_k|^2 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|^2.$$

Το δεξί μέλος στην παραπάνω ανισότητα είναι η "ουρά" της συγκλίνουσας σειράς $\sum_n |a_n|^2$, άρα πάει στο 0 για $n \to \infty$. Άρα μπορούμε να επιλέξουμε n_0 αρκετά μεγάλο ώστε για $n_0 \leq n < m$ να ισχύει $\|S_m - S_n\|_2 \leq \epsilon$. ∎

Είναι εύκολο να δούμε με απλές πράξεις ότι οι εκθετικές συναρτήσεις

$$e_n(x) = e^{inx}, \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

είναι ένα ορθοκανονικό σύστημα.

✏ **15.6** *Αποδείξτε οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις*

$$1, \quad \sqrt{2}\sin kx, \quad \sqrt{2}\cos kx, \quad (k \in \mathbb{N}),$$

είναι ορθοκανονικό σύστημα στον $L^2(\mathbb{T})$.
💡 *Μπορείτε να εκφράσετε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις μέσω των εκθετικών και να χρησιμοποιήσετε το γεγονός ότι οι εκθετικές συναρτήσεις αποτελούν ορθοκανονικό σύστημα.*

Παρατηρείστε επίσης ότι για $f \in L^2$ έχουμε

$$\langle f, e_n \rangle = \widehat{f}(n)$$

και

$$S_N(f) = \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(n) e_n.$$

Θεώρημα 15.1 (Ανισότητα Bessel) *Αν $f \in L^2(\mathbb{T})$ και τα ϕ_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύστημα τότε, αν $g = \sum_{k=1}^{N} \langle f, \phi_k \rangle \phi_k$, ισχύει*

$$\|g\|_2^2 = \sum_{k=1}^{N} |\langle f, \phi_k \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2. \tag{15.3}$$

Απόδειξη.

$$
\begin{aligned}
0 &\le \|f-g\|_2^2 \\
&= \langle f-g, f-g\rangle \\
&= \|f\|_2^2 - \langle g, f\rangle - \langle f, g\rangle + \langle g, g\rangle \\
&= \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^N \langle f, \phi_k\rangle\langle \phi_k, f\rangle - \sum_{k=1}^N \overline{\langle f, \phi_k\rangle}\langle f, \phi_k\rangle + \sum_{k=1}^N |\langle f, \phi_k\rangle|^2 \qquad \text{(γραμμικότητα, Πρόβλημα 15.2)} \\
&= \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^N \langle f, \phi_k\rangle\overline{\langle f, \phi_k\rangle} - \sum_{k=1}^N \overline{\langle f, \phi_k\rangle}\langle f, \phi_k\rangle + \sum_{k=1}^N |\langle f, \phi_k\rangle|^2 \\
&= \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^N |\langle f, \phi_k\rangle|^2.
\end{aligned}
$$

Αυτό συνεπάγεται

$$\sum_{k=1}^N |\langle f, \phi_k\rangle|^2 \le \|f\|_2^2.$$

∎

Ορισμός 15.2 *Ένα ορθογώνιο σύστημα $\phi_n \in L^2(\mathbb{T})$ λέγεται πλήρες αν η μόνη συνάρτηση στο $L^2(\mathbb{T})$ που είναι ορθογώνια σε όλες τις ϕ_n είναι η μηδενική.*

Οι εκθετικές συναρτήσεις $e_n(x) = e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$, αποτελούν πλήρες ορθοκανονικό σύστημα. Πράγματι, αν $f \in L^2$ είναι κάθετη σε κάθε e_n αυτό σημαίνει ότι $\widehat{f}(n)$ είναι 0 για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, και από το Θεώρημα Μοναδικότητας στο $L^1(\mathbb{T})$ (Πόρισμα 11.2) προκύπτει $f = 0$.

✏ **15.7** *Δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $\phi_n \in L^2(\mathbb{T})$ είναι ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα αν και μόνο αν οι πεπερασμένοι γραμμικοί συνδυασμοί των ϕ_n είναι πυκνοί στο χώρο $L^2(\mathbb{T})$.*

💡 *Για την κατεύθυνση "αν" (πυκνότητα γραμμικών συνδυασμών συνεπάγεται τη μη ύπαρξη μη μηδενικού διανύσματος ορθογώνιου ως προς όλα τα ϕ_k) χρειάζεστε απλά τη συνέχεια του εσωτερικού γινομένου. Για την άλλη κατεύθυνση, υποθέστε ότι δεν ισχύει η πυκνότητα και χρησιμοποιείστε την ανισότητα του Bessel για να κατασκευάσετε ένα μη μηδενικό διάνυσμα ορθογώνιο ως προς όλα τα ϕ_k.*

✏ **15.8** *Αν $\phi_n \in L^2(\mathbb{T})$ είναι ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα δείξτε ότι μια συνάρτηση $f \in L^2(\mathbb{T})$ είναι πλήρως καθορισμένη αν γνωρίζουμε τις ποσότητες $\langle f, \phi_n\rangle$ για όλα τα n.*

✏ **15.9** *Έστω ϕ_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, ένα ορθοκανονικό σύστημα και $f \in L^2(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι η ποσότητα*

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N x_k \phi_k \right\|_2$$

ελαχιστοποιείται όταν $x_k = \langle f, \phi_k\rangle$ και μόνο γι' αυτή την τιμή.

Θεώρημα 15.2 (Parseval) *Αν ϕ_n είναι ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα τότε για κάθε $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ έχουμε*

$$\langle f, g\rangle = \sum_n \langle f, \phi_n\rangle\overline{\langle g, \phi_n\rangle}, \quad \|f\|_2^2 = \sum_n |\langle f, \phi_n\rangle|^2. \tag{15.4}$$

Ειδικότερα, παίρνοντας στη θέση των ϕ_n τις εκθετικές συναρτήσεις e_n, $n \in \mathbb{Z}$, παίρνουμε

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)}, \quad \|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(n)\right|^2. \tag{15.5}$$

Απόδειξη. Από την ανισότητα του Bessel προκύπτει ότι οι συναρτήσεις

$$\widetilde{f} = \sum_n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n, \quad \widetilde{g} = \sum_n \langle g, \phi_n \rangle \phi_n,$$

είναι καλώς ορισμένες αφού οι σειρές που τις ορίζουν συγκλίνουν στο L^2. Από την πυκνότητα των πεπερασμένων γραμμικών συνδυασμών των ϕ_n (Πρόβλημα 15.7) προκύπτει ότι $f = \widetilde{f}, g = \widetilde{g}$, και το πρώτο κομμάτι της (15.4) προκύπτει από τη συνέχεια του εσωτερικού γινομένου. Οι ισότητες (15.5) είναι άμεση συνέπεια των (15.4). ∎

Μπορεί κανείς να δει το Θεώρημα 15.2 ως μια ισομετρία

$$(f(x), x \in \mathbb{T}) \quad \to \quad (\widehat{f}(n), n \in \mathbb{Z}),$$

(που απεικονίζει δηλ. μια συνάρτηση f στους συντελεστές Fourier της) ανάμεσα στο χώρο $L^2(\mathbb{T})$ και το χώρο $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Ο χώρος $\ell^2(\mathbb{Z})$ είναι ο γραμμικός χώρος όλων των ακολουθιών a_n, $n \in \mathbb{Z}$, για τις οποίες ισχύει

$$\|a_n\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

Η ποσότητα $\|a_n\|_2$ που ορίζει η προηγούμενη εξίσωση αποτελεί μια νόρμα στο χώρο αυτό και ορίζει τη απόσταση $d(a,b) = \|a-b\|_2$ ανάμεσα στις ακολουθίες a_n και b_n.

Δεν υπάρχει αντίστοιχο τέτοιο θεώρημα για χώρους L^p με $p \neq 2$. Υπό μία έννοια ο χώρος L^2 είναι ο μόνος στον οποίο η νόρμα της συνάρτησης είναι τόσο προφανής αν κανείς γνωρίζει τους συντελεστές Fourier της συνάρτησης. Η ύπαρξη της ισότητας του Parseval είναι που κάνει την περίπτωση του $L^2(\mathbb{T})$ τόσο πιο "εύκολη" από τους άλλους χώρους (μιλάμε για την ανάλυση Fourier πάντα αν και αυτό είναι μάλλον γενικότερη διαπίστωση).

✏ **15.10** *Αν $f \in C^1(\mathbb{T})$ και $\int f = 0$ δείξτε ότι $\int |f|^2 \le \int |f'|^2$.*

💡 *Χρησιμοποιείστε την ισότητα του Parseval.*

✏ **15.11** *Αν $f \in C^1(\mathbb{T})$ δείξτε ότι $\sum_n \left|\widehat{f}(n)\right| < \infty$.*

💡 *Χρησιμοποιείστε την ταυτότητα Parseval για να βρείτε, μέσω της ανισότητας Cauchy-Schwarz, ένα κατάλληλο άνω φράγμα για την ποσότητα $\sum \left|\widehat{f}(n)\right|$.*

16 Πέ, 18/11/10: Εφαρμογή: Η ισοπεριμετρική ανισότητα

Σε αυτή την παράγραφο θα δώσουμε μια απόδειξη που βασίζεται σε σειρές Fourier της "ισοπεριμετρικής ανισότητας"

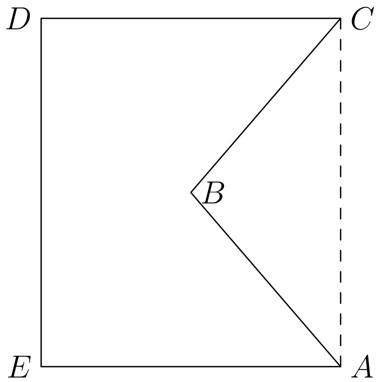
$$A \le \frac{\ell^2}{4\pi}. \tag{16.1}$$

Εδώ ℓ είναι το μήκος μιας απλής κλειστής καμπύλης γ στο επίπεδο και A είναι το εμβαδό που περικλείει αυτή η καμπύλη. Ένας άλλος τρόπος να διατυπώσει κανείς την ισοπεριμετρική ανισότητα είναι να πει ότι από όλες τις απλές κλειστές καμπύλες του επιπέδου με δεδομένο μήκος ο κύκλος είναι αυτός που περικλείει το μεγαλύτερο εμβαδό. Με αυτό τον τρόπο είχε διατυπωθεί το πρόβλημα από την αρχαιότητα. Η λύση που θα περιγράψουμε δεν είναι η πρώτη χρονικά. Οφείλεται στον Hurwitz και δόθηκε το 1901, ενώ η πρώτη αυστηρή απόδειξη οφείλεται στον Steiner στα μέσα του 19ου αιώνα, ο οποίος χρησιμοποίησε αυτό που σήμερα ονομάζουμε "συμμετρικοποίηση Steiner".

✏ **16.1** *Ένα πολύγωνο ονομάζεται κυρτό αν για κάθε πλευρά του η ευθεία που αυτή ορίζει χωρίζει το επίπεδο σε δύο ανοιχτά ημιεπίπεδα ένα από τα οποία δεν τέμνει το πολύγωνο.*

Δείξτε ότι αν ένα πολύγωνο με μήκος ℓ δεν είναι κυρτό τότε υπάρχει ένα άλλο πολύγωνο με το ίδιο μήκος και με μεγαλύτερο εμβαδό.

💡 *Δείτε το παράδειγμα που δίνεται στο Σχήμα 8 και τροποποιείστε κατάλληλα το πολύγωνο $ABCDE$ χρησιμοποιώντας μια συμμετρία γύρω από τη διακεκομμένη γραμμή AC.*



Σχήμα 8: Το $ABCDE$ είναι ένα μη κυρτό πολύγωνο

Η λύση αυτού του προβλήματος στη μέγιστη γενικότητα προϋποθέτει ότι έχουμε πρώτα ξεκαθαρίσει τις έννοιες του μήκους και του περικλειόμενου εμβαδού για μια καμπύλη στο επίπεδο. Αλλά, και μόνο το γεγονός ότι μια απλή (όχι αυτοτεμνόμενη δηλαδή) κλειστή καμπύλη, μια συνεχής δηλ. συνάρτηση

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(a) = \gamma(b),$$

χωρίζει το επίπεδο σε δύο συνεκτικά κομμάτια, το εσωτερικό της καμπύλης (το φραγμένο κομμάτι) και το εξωτερικό της, αποτελεί το Θεώρημα του Jordan το οποίο δεν είναι καθόλου απλό στην απόδειξή του, και πρόκειται να το πάρουμε ως δεδομένο. Επίσης το ποιες καμπύλες "έχουν μήκος" δεν είναι καθόλου φανερό γενικά, είναι όμως ξεκάθαρο αν υποθέσουμε, όπως θα κάνουμε από δω και πέρα, ότι η γ είναι κατά τμήματα C^∞. Σε αυτή την περίπτωση το μήκος L της καμπύλης $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ δίδεται από τον τύπο

$$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

όπως μαθαίνουμε στα μαθήματα Απειροστικού Λογισμού. Το διάνυσμα $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ είναι το διάνυσμα της ταχύτητας τη χρονική στιγμή t όταν κινούμαστε πάνω στην καμπύλη με τρόπο ώστε η θέση μας στο χρόνο t να είναι η $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Το μέτρο της ταχύτητας $|\gamma'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ είναι η ποσότητα που ολοκληρώνουμε ως προς το χρόνο για να βρούμε το μήκος που διανύσαμε.

Ένα άλλο πολύ βασικό θεώρημα Απειροστικού Λογισμού το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε είναι το θεώρημα του Green για τη μετατροπή διπλών ολοκληρωμάτων σε επικαμπύλια.

Θεώρημα 16.1 (Green) *Αν η κατά τμήματα C^∞, απλή, κλειστή καμπύλη γ περικλείει το χωρίο $\Omega \in \mathbb{R}^2$ και $P(x, y), Q(x, y)$ είναι C^1 συναρτήσεις ορισμένες σε ένα ανοιχτό σύνολο του επιπέδου που περιέχει το Ω, τότε ισχύει*

$$\iint_\Omega Q_x - P_y\, dx\, dy = \oint_\gamma P dx + Q dy.$$

Οι ποσότητες Q_x και P_y είναι οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων ως προς τις αντίστοιχες μεταβλητές και το ολοκλήρωμα δεξιά είναι επικαμπύλιο ολοκλήρωμα το οποίο δίνεται από τον τύπο

$$\oint_\gamma P dx + Q dy = \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) - Q(x(t), y(t))y'(t)]\, dt.$$

Υποθέτουμε πάντα ότι η καμπύλη διανύεται κατά την θετική (αριστερόστροφη) φορά. Όταν κινούμαστε δηλ. πάνω στην καμπύλη γ σύμφωνα με την παραμέτριση $(x(t), y(t))$, με το t να αυξάνει, τότε έχουμε το χωρίο Ω στα αριστερά μας (δείτε το Σχήμα 9).

Με $Q(x,y) = x, P(x,y) = 0$ παίρνουμε από το Θεώρημα 16.1

$$A = \iint_\Omega 1\, dx\, dy = \oint_\gamma x\, dy = \int_a^b x(t) y'(t)\, dt.$$

Ομοίως παίρνοντας $Q(x,y) = 0, P(x,y) = -y$ παίρνουμε

$$A = \iint_\Omega 1\, dx\, dy = -\oint_\gamma y\, dx = -\int_a^b y(t) x'(t)\, dt.$$

Συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω παίρνουμε την πιο συμμετρική έκφραση για το εμβαδό

$$A = \frac{1}{2} \oint_\gamma x\, dy - y\, dx = \int_a^b x(t) y'(t) - y(t) x'(t)\, dt. \tag{16.2}$$

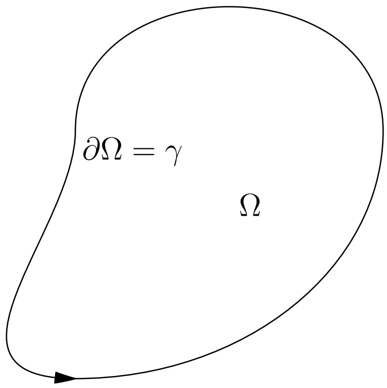
✏ **16.2** *Δίδεται ένα πολυγωνικό χωρίο στο επίπεδο μέσω των συντεταγμένων των κορυφών του*

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{N-1}, y_{N-1}),$$

όπου η κορυφή (x_j, y_j) έπεται της (x_{j-1}, y_{j-1}) και προηγείται της (x_{j+1}, y_{j+1}) όταν διανύουμε αριστερόστροφα την πολυγωνική γραμμή που αποτελεί το σύνορο του χωρίου (τα $j \pm 1$ τα ερμηνεύουμε $\bmod N$).

Δώστε ένα (όσο γίνεται πιο απλό) τύπο για το εμβαδό του χωρίου μέσω των αριθμών x_j, y_j, $j = 0, 1, \ldots, N-1$.

💡 *Χρησιμοποιείστε το Θεώρημα 16.1 και υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας μια απλή παραμέτριση για καθένα από τα ευθύγραμμα τμήματα (x_j, y_j)–(x_{j+1}, y_{j+1}) που απαρτίζουν το σύνορο.*



Σχήμα 9: Η καμπύλη γ περικλείει το χωρίο Ω, του οποίου είναι το σύνορο $\gamma = \partial\Omega$

Τώρα πλέον έχουμε μια αναλυτική έκφραση για το μήκος της καμπύλης και μια για το εμβαδό που αυτή περικλείει. Κάνουμε τώρα την επιπλέον υπόθεση ότι χρονικό διάστημα κίνησης είναι το $[a,b] = [0, 2\pi]$ και ότι η ταχύτητα κίνησης έχει σταθερό μέτρο ίσο με 1 καθόλη τη διάρκεια της κίνησης. Η δεύτερη αυτή υπόθεση μαζί με την πρώτη έχουν ως συνέπεια ότι το συνολικό μήκος της καμπυλης είναι

$$L = \int_0^{2\pi} \left|\gamma'(t)\right| dt = 2\pi. \tag{16.3}$$

Όσον αφορά την πρώτη υπόθεση αυτή φυσικά δεν αποτελεί βλάβη της γενικότητας αφού μπορούμε να αναπαραμετρίσουμε την καμπύλη σε όποιο χρονικό διάστημα θέλουμε. Αλλά και η δεύτερη υπόθεση δεν αποτελεί βλάβη της γενικότητας αφού η ισοπεριμετρική ανισότητα που πάμε να αποδείξουμε είναι αναλλοίωτη ως προς την αλλαγή κλίμακας στο επίπεδο (δε θα μπορούσε να είναι διαφορετικά), στο μετασχηματισμό δηλ. $(x,y) \to (\lambda x, \lambda y)$, όπου $\lambda > 0$. Πράγματι μετά από αυτό τον μετασχηματισμό το εμβαδό της καμπύλης πολλαπλασιάζεται επί λ^2 ενώ το μήκος της πολλαπλασιάζεται με λ. Άρα η ισοπεριμετρική ανισότητα ισχύει για μια καμπύλη αν και μόνο αν ισχύει για την καμπύλη αυτή σε οποιαδήποτε κλίμακα $\lambda > 0$, αφού το μήκος ℓ εμφανίζεται στην ανισότητα τετραγωνισμένο ενώ το εμβαδό στην πρώτη δύναμη. Παίρνουμε λοιπόν την καμπύλη μας να έχει συνολικό μήκος $L = 2\pi$ και την ταχύτητά μας να έχει μέτρο 1 για κάθε $t \in [0, 2\pi]$. Η ισοπεριμετρική ανισότητα παίρνει τώρα τη μορφή

$$A \le \pi.$$

Υπό αυτές τις (αβλαβείς) υποθέσεις οι συναρτήσεις $x(t), y(t)$ που καθορίζουν την καμπύλη μας είναι 2π-περιοδικές συναρτήσεις που είναι τμηματικά C^∞, και άρα είναι και στο $L^2(\mathbb{T})$ όπως και οι παράγωγοί τους $x'(t), y'(t)$. Στις συναρτήσεις αυτές και στις παραγώγους τους αντιστοιχούν οι σειρές Fourier

$$x(t) \sim \sum_n \widehat{x}(n) e^{int},\ y(t) \sim \sum_n \widehat{y}(n) e^{int},$$

και

$$x'(t) \sim \sum_n in\widehat{x}(n) e^{int},\ y'(t) \sim \sum_n in\widehat{y}(n) e^{int}.$$

Η υπόθεση $|\gamma'(t)| = 1$ συνεπάγεται ότι $|\gamma'(t)|^2 = |\gamma'(t)|$, οπότε

$$\int_0^{2\pi} x'(t)^2 + y'(t)^2\, dt = 2\pi,$$

και χρησιμοποιώντας την ισομετρία του Parseval (Θεώρημα 15.2) παίρνουμε

$$\sum_n |n|^2 (|\widehat{x}(n)|^2 + |\widehat{y}(n)|^2) = 1. \tag{16.4}$$

Το ολοκλήρωμα (16.2), επίσης χρησιμοποιώντας την ισομετρία του Parseval, γράφεται

$$A = -i\pi \sum_n n(\widehat{x}(n)\overline{\widehat{y}(n)} - \widehat{y}(n)\overline{\widehat{x}(n)}). \tag{16.5}$$

Παρατηρούμε τώρα την ανισότητα

$$\left|\widehat{x}(n)\overline{\widehat{y}(n)} - \widehat{y}(n)\overline{\widehat{x}(n)}\right| \le 2|\widehat{x}(n)||\widehat{y}(n)| \le |\widehat{x}(n)|^2 + |\widehat{y}(n)|^2$$

και, χρησιμοποιώντας ότι $|n| \le |n|^2$, παίρνουμε

$$A \le \pi \sum_n |n|^2 (|\widehat{x}(n)|^2 + |\widehat{y}(n)|^2) \le \pi,$$

λόγω της (16.4), το οποίο συμπληρώνει την απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας.

✏ **16.3** *Αποδείξτε ότι αν για μια κατά τμήματα C^∞ καμπύλη ισχύει $A = \ell^2/(4\pi)$ τότε η καμπύλη είναι κύκλος.*

💡 *Στην προηγούμενη απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας δείτε που χρησιμοποιήσαμε κάποιες ανισότητες και τι συμπέρασμα βγαίνει αν αυτές ισχύουν ως ισότητες. Αρχίστε από την ανισότητα $|n| \le |n|^2$, $n \in \mathbb{Z}$.*

17 Τρ, 23/11/10: Εφαρμογή: Μια συνεχής συνάρτηση, πουθενά παραγωγίσιμη

Είναι πολύ εύκολο να φτιάξει κανείς μια συνάρτηση που δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμη: η χαρακτηριστική συνάρτηση των ρητών $\chi_{\mathbb{Q}}$ είναι μια τέτοια συνάρτηση. Όμως η συνάρτηση αυτή δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμη για ένα κάπως τετριμμένο (όχι ενδιαφέροντα δηλ.) λόγο: δεν είναι πουθενά συνεχής, αφού το άνω όριο σε κάθε σημείο είναι 1 και το κάτω είναι 0. Είναι πολύ πιο ενδιαφέρον να έχουμε παντού συνέχεια της συνάρτησης και πουθενά παραγωγισιμότητα, και σε αυτή την παράγραφο θα δούμε ένα παράδειγμα, που λίγο-πολύ οφείλεται στον Weierstrass, τέτοιας συνάρτησης χρησιμοποιώντας τεχνικές της αρμονικής ανάλυσης.

Θεώρημα 17.1 *Έστω $0 < \alpha < 1$. Τότε η σειρά*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\alpha n} e^{i 2^n x} \tag{17.1}$$

συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f \in C(\mathbb{T})$ που δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμη.

Η ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς είναι φανερή αφού $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\alpha n} < \infty$ αφού $\alpha > 0$. Πριν αποδείξουμε τη μη παραγωγισιμότητα ας δοκιμάσουμε να παραγωγίσουμε τη σειρά όρο προς όρο. Προκύπτει η σειρά

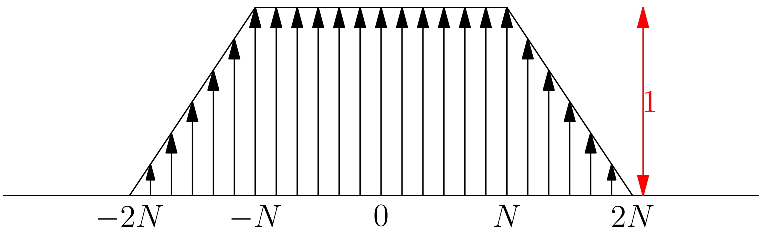
$$\sum_{n=0}^{\infty} i 2^{(1-\alpha)n} e^{i 2^n x}. \tag{17.2}$$

Παρατηρείστε ότι, λόγω της υπόθεσης $\alpha < 1$, οι συντελεστές των συναρτήσεων $e^{i2^n x}$ πάνε στο άπειρο, άρα η σειρά (17.2) δε συγκλίνει για κανένα $x \in \mathbb{R}$. Αυτός ο υπολογισμός δεν αποδεικνύει φυσικά το θεώρημα (αφού θα μπορούσε να υπάρχει η παράγωγος αλλά να μην είναι ίδια με την (17.2)) αλλά αποτελεί μια ισχυρή ένδειξη ότι το Θεώρημα 17.1 είναι σωστό.

Ορίζουμε πρώτα το λεγόμενο πυρήνα του de la Vallée Poussin ο οποίος ορίζεται μέσω του πυρήνα του Fejér ως εξής:

$$V_N(x) = 2K_{2N}(x) - K_N(x). \tag{17.3}$$

Οι συντελεστές Fourier του $V_N(x)$ φαίνονται στο Σχήμα 10. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $\widehat{V_N}(k) = 1$ για $|k| \le N$, $\widehat{V_N}(k) = 0$ για $|k| \ge 2N$ και ότι η $\widehat{V_N}(k)$ πέφτει γραμμικά ως προς k για $|k| = N, N+1, \ldots, 2N$.



Σχήμα 10: Οι συντελεστές Fourier του πυρήνα του de la Vallée Poussin $V_N(x)$ για $N = 6$

✏ **17.1** *Δείξτε ότι $\|V_N\|_1 \le 3$.*

✏ **17.2** *Τελείως ανάλογα με τα μερικά αθροίσματα μιας σειράς Fourier $S_N(f)(x) = f * D_N(x)$ και τους Cesáro μέσους της σειράς $\sigma_N(f)(x) = f * K_N(x)$ ορίζονται και οι de la Vallée Poussin μέσοι*

$$\tau_N(f)(x) = f * V_N(x) = 2\sigma_{2N}(f)(x) - \sigma_N(f)(x). \tag{17.4}$$

Δείξτε ότι και για τους de la Vallée Poussin μέσους ισχύει το θεώρημα του Fejér: αν $f \in C(\mathbb{T})$ τότε $\tau_N(f)(x) \to f(x)$ ομοιόμορφα.

Το ότι οι συντελεστές Fourier της V_N είναι ίσοι με 1 μέχρι το N και φθίνουν γραμμικά μέχρι το $2N$ κάνει τους de la Vallée Poussin μέσους $\tau_N(f)(x)$ να μοιάζουν αφενός με τα μερικά αθροίσματα $S_N(f)(x)$ αλλά να έχουν και κάποιες από τις καλές ιδιότητες των Cesáro μέσων $\sigma_N(f)(x)$.

✏ **17.3** *Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\widehat{f}(n) = 0$ αν ο ακέραιος n δεν είναι της μορφής $\pm 3^k$ ($k \in \mathbb{N}$). Δείξτε ότι για μια τέτοια f η ακολουθία $S_N(f)(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.*

💡 *Εκφράστε το $S_N(f)(x)$ ως ένα μέσο de la Vallée Poussin της f και χρησιμοποιείστε το Πρόβλημα 17.2.*

Λήμμα 17.1 *Αν $g \in C(\mathbb{T})$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε*

$$\sigma_N(g)'(x_0) = O(\log N), \quad \tau_N(g)'(x_0) = O(\log N), \quad \text{για } N \to \infty. \tag{17.5}$$

Απόδειξη. Παραγωγίζοντας την ταυτότητα $\tau_N(g) = 2\sigma_{2N}(g) - \sigma_N(g)$ βλέπουμε ότι αρκεί να δείξουμε την πρώτη από τις δύο εκτιμήσεις.

Εφαρμόζοντας το Πρόβλημα 5.3 βλέπουμε ότι

$$\sigma_N(g)'(x_0) = (K_N * g)'(x_0) = K_N' * g(x_0) = \int K_N'(t) g(x_0 - t)\, dt.$$

Αφού $\int K_N' = 0$ έχουμε επίσης

$$\sigma_N(g)'(x_0) = \int K_N'(t)\, [g(x_0 - t) - g(x_0)]\, dt.$$

Η παραγωγισιμότητα στο x_0 μας δίνει ότι υπάρχει πεπερασμένη σταθερά $C > 0$ τ.ώ.

$$|g((x_0 - t) - g(x_0)| \le C|t|, \quad (t \in \mathbb{R}),$$

και συνεπώς

$$\left|\sigma_N(g)'(x_0)\right| \le C \int \left|K_N'(t)\right| |t|\, dt. \tag{17.6}$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (13.2), που μετά από παραγώγιση μας δίνει

$$K_N'(t) = \frac{\sin\frac{Nt}{2}\cos\frac{NT}{2}}{\sin^2(t/2)} - \frac{1}{N}\frac{\cos\frac{t}{2}\sin^2\frac{Nt}{2}}{\sin^3(t/2)}, \tag{17.7}$$

καθώς και το γεγονός ότι το K_N είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού N με συντελεστές φραγμένους από 1, παίρνουμε την ανισότητα

$$\left|K_N'(t)\right| \le A \min\left\{N^2, \frac{1}{t^2}\right\}, \quad \text{για } |t| \le \pi \text{ και για κάποια πεπερασμένη σταθερά } A. \tag{17.8}$$

✏ **17.4** *Αποδείξτε με όλη τη λεπτομέρεια την ανισότητα (17.8) και βρείτε μια τιμή για τη σταθερά A ώστε η ανισότητα αυτή να ισχύει για κάθε αρκετά μεγάλο N.*

Από την (17.6) και την (17.8) παίρνουμε

$$\begin{aligned} bs\sigma_N(g)'(x_0) &\le C \int\limits_{|t|\ge(1/N)} \left|K_N'(t)\right| |t|\, dt + \int\limits_{|t|\le(1/N)} \left|K_N'(t)\right| |t|\, dt \\ &\le CA \int\limits_{|t|\ge(1/N)} \frac{1}{|t|}\, dt + CAN \int\limits_{|t|\le(1/N)} dt \\ &= O(\log N), \end{aligned}$$

το οποίο συμπληρώνει την απόδειξη του Λήμματος. ∎

✏ **17.5** *Αποδείξτε ότι $\tau_{2^n}(f)(x) - \tau_{2^{n-1}}(f)(x) = 2^{-\alpha n} e^{i 2^n x}$ για κάθε x και άρα, παραγωγίζοντας,*

$$\tau_{2^n}(f)'(x) - \tau_{2^{n-1}}(f)'(x) = 2^{(1-\alpha)n}. \tag{17.9}$$

💡 *Χρησιμοποιείστε το Σχήμα 10.*

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το $f'(x_0)$ υπάρχει, για τη συνάρτηση (17.1). Χρησιμοποιώντας το Πρόβλημα 17.5 παίρνουμε αντίφαση ανάμεσα στην (17.9) και στο συμπέρασμα του Λήμματος 17.1, για $g = f$ και $N = 2^n, 2^{n-1}$, αφού με βάση το Λήμμα 17.1 η ποσότητα (17.9) είναι $O(\log N)$ ενώ από το Πρόβλημα 17.5 είναι ίση με $N^{1-\alpha}$, που δεν είναι $O(\log N)$. Η απόδειξη του Θεωρήματος 17.1 είναι πλήρης.

18 Πέ, 25/11/10: Σύγκλιση των μερικών αθροισμάτων της σειράς Fourier, I

Θα εξετάσουμε το ερώτημα του κατά πόσο μπορούμε να περιμένουμε τη σύγκλιση της σειράς Fourier μιας συνάρτησης $f(x)$ σε ένα σημείο x_0 στην τιμή $f(x_0)$. Φυσικά υπάρχουν περιπτώσεις όπου αυτό είναι εξασφαλισμένο, για παράδειγμα όταν η συνάρτηση είναι συνεχής και η σειρά συγκλίνει απόλυτα

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(n)\right| < \infty$$

(δείτε Πόρισμα 5.2), συνθήκη η οποία ισχύει όταν, π.χ. $f \in C^2(\mathbb{T})$, αφού σε αυτή την περίπτωση εύκολα βλέπουμε ότι $\left|\widehat{f}(n)\right| = O(1/n^2)$. Όμως θα θέλαμε να εξετάσουμε το ερώτημα της κατά σημείο σύγκλισης με όσο το δυνατό λιγότερες προϋποθέσεις για τη συνάρτηση f γίνεται.

Το να υποθέσουμε μόνο ότι $f \in L^1(\mathbb{T})$ (η γενικότερη περίπτωση για την οποία μπορούμε να μιλάμε για συντελεστές και σειρά Fourier) είναι πολύ λίγο, αφού δύο συναρτήσεις $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ οι οποίες διαφέρουν σε ένα σύνολο μέτρου 0 έχουν την ίδια σειρά Fourier και δε μπορεί φυσικά αυτή η σειρά να συγκλίνει και στο $f(x_0)$ και στο $g(x_0)$, όταν το x_0 ανήκει σε αυτό το σύνολο μέτρου 0 στο οποίο οι f και g διαφέρουν. Θα πρέπει λοιπόν η τιμή της συνάρτησης σε ένα οποιοδήποτε σημείο να είναι συνάρτηση των συντελεστών Fourier της συνάρτησης και ο γενικότερος φυσιολογικός χώρος όπου αυτό ισχύει (από το θεώρημα της μοναδικότητας) είναι ο χώρος $C(\mathbb{T})$ των συνεχών 2π-περιοδικών συναρτήσεων.

Έστω λοιπόν $f \in C(\mathbb{T})$ και $x_0 = [0, 2\pi)$. Ισχύει αναγκαστικά ότι $S_N(f)(x_0) \to f(x_0)$ για $N \to \infty$; Η απάντηση είναι αρνητική.

Θεώρημα 18.1 *Για κάθε $x_0 \in [0, 2\pi]$ υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τ.ώ. τα μερικά αθροίσματα $S_N(f)(x_0)$ δε συγκλίνουν.*

Θα δούμε ότι αυτό είναι συνέπεια ουσιαστικά του γεγονότος ότι ο πυρήνας του Dirichlet D_N δεν έχει φραγμένη L^1-νόρμα (για $N \to \infty$).

Λήμμα 18.1 *Ισχύει $\|D_N\|_1 \ge C \log N$ για κάποια σταθερά $C > 0$.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (2.9)

$$D_N(x) = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin(x/2)}. \tag{18.1}$$

Δείτε και το Σχήμα 1 για καλύτερη εποπτεία. Παρατηρούμε πρώτα ότι η $D_N(x)$ μηδενίζεται (και αλλάζει πρόσημο) στο διάστημα $[0, \pi]$ στα σημεία $x_k = 2k\pi/(2N + 1)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, που απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση ίση με

$$\ell = \frac{2\pi}{2N + 1}.$$

Ο αριθμητής του κλάσματος (18.1) είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο $\frac{2}{2N+1}$ και συνεπώς στο μεσαίο ένα τρίτο του κάθε διαστήματος $[x_k, x_{k+1}]$ ο αρθμητής φράσσεται κάτω κατ' απόλυτο τιμή από μια σταθερά $A =$

$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Έχουμε, χρησιμοποιώντας και την ανισότητα $|\sin x| \le x$ για $x \ge 0$,

$$\begin{aligned}
\|D_N\|_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)|\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} |D_N(x)|\,dx \\
&\ge \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\pi} \int_{x_k+(\ell/3)}^{x_k+(2\ell/3)} \frac{2A}{x}\,dx \\
&\ge \frac{2A\ell}{3\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{x_k} \\
&= \frac{2A\ell}{3\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2N+1}{2\pi}\frac{1}{k} \\
&= \frac{A\ell(2N+1)}{3\pi^2} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} \\
&\ge C\log N,
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το ότι $\ell(2N+1) = 2\pi$ και ότι $\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k} \ge C_1 \log N$, όπου $C_1 > 0$ μια σταθερά. (Την τελευταία εκτίμηση μπορεί κανείς να πάρει συγκρίνοντας το άθροισμα με το αντίστοιχο ολοκλήρωμα. Ισχύει παρόμοια εκτίμηση προς τα πάνω αλλά δεν τη χρειαζόμαστε εδώ.) ∎

Γιατί όμως το Λήμμα 18.1 έχει ως συνέπεια, όπως προαναφέραμε, τη μη αναγκαστική σύγκλιση της σειράς Fourier; Κάνουμε κατ΄ αρχήν, για απλότητα, την επιλογή $x_0 = 0$, και έπειτα παρατηρούμε ότι η απεικόνιση

$$T_N : f \to S_N(f)(0)$$

είναι μια γραμμική απεικόνιση από το χώρο $C(\mathbb{T})$ στον οποίο ενδιαφερόμαστε να δουλέψουμε στο $\mathbb{C}$. Τέτοιες απεικονίσεις ονομάζονται *γραμμικά συναρτησοειδή* και είναι πολύ σημαντικά σε ολόκληρη τη Μαθηματική Ανάλυση. Η γραμμικότητα είναι απλά η ιδιότητα $T_N(\lambda f + \mu g) = \lambda T_N(f) + \mu T_N(g)$, για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $f, g \in C(\mathbb{T})$.

Οι δύο χώροι $C(\mathbb{T})$ και $\mathbb{C}$ είναι εφοδιασμένοι με μετρική (νόρμα) την L^∞ μετρική για τον πρώτο και τη συνηθισμένη Ευκλείδια μετρική (απόλυτη τιμή) για το μιγαδικό επίπεδο. Εύκολα προκύπτει ότι ένα γραμμικό συναρτησοειδές T είναι συνεχής συνάρτηση (ως προς τις δύο μετρικές) αν και μόνο αν είναι συνεχής στο 0, το οποίο συμβαίνει αν και μόνο αν αυτό είναι *φραγμένο*, ισχύει δηλ. για κάποια πεπερασμένη σταθερά M η ανισότητα

$$|T(f)| \le M\|f\|_\infty, \quad \text{για κάθε } f \in C(\mathbb{T}).$$

Για ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές T το infimum των αριθμών M για τους οποίους ισχύει η παραπάνω ανισότητα συμβολίζεται με $\|T\|$ και ονομάζεται νόρμα του γραμμικού συναρτησοειδούς (και μπορούμε στη θέση του M στην παραπάνω ανισότητα να πάρουμε τη νόρμα $\|T\|$). Το σύνολο των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών πάνω σε ένα χώρο με νόρμα, όπως ο $C(\mathbb{T})$ που εξετάζουμε εδώ, είναι γραμμικός χώρος και η ποσότητα $\|T\|$ είναι μια νόρμα πάνω στο γραμμικό αυτό χώρο. Χωρίς να μπούμε σε ιδιαίτερες λεπτομέρειες, αυτό σημαίνει ότι η ποσότητα $\|T_1 - T_2\|$ είναι μια μετρική πάνω στο χώρο των συναρτησοειδών.

Το πολύ σημαντικό θεώρημα που θα χρησιμοποιήσουμε για να δείξουμε τη μη (αναγκαστική) σύγκλιση των $S_N(f)(0)$ στο $f(0)$ όταν η μόνη υπόθεση για την f είναι ότι $f \in C(\mathbb{T})$, είναι το Θεώρημα Banach-Steinhaus ή Αρχή Ομοιόμορφου Φράγματος, το οποίο διατυπώνουμε εδώ μόνο για τους χώρους που μας ενδιαφέρει. Για την απόδειξη παραπέμπουμε σε οποιοδήποτε καλό βιβλίο Συναρτησιακής Ανάλυσης.

Θεώρημα 18.2 (Banach-Steinhaus) *Αν $T_N : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ είναι μια ακολουθία φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών τότε η ακολουθία των νορμών των συναρτησοειδών, $\|T_N\|$, είναι φραγμένη αν και μόνο αν για κάθε $f \in C(\mathbb{T})$ η ακολουθία $T_N(f) \in \mathbb{C}$ είναι φραγμένη.*

Το ίδιο ισχύει και αν το πεδίο τιμών των T_N δεν είναι οι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί αλλα οποιοσδήποτε γραμμικός χώρος με νόρμα Y, και το πεδίο ορισμού των T_N είναι οποιοσδήποτε πλήρης γραμμικός χώρος με νόρμα X (ένας χώρος Banach όπως λέμε): αν για κάθε $f \in X$ ισχύει

$$\sup_N \|T_N(f)\|_Y < \infty$$

τότε υπάρχει $M < \infty$ ώστε για κάθε $f \in X$ να ισχύει

$$\|T_N f\|_Y \le M\|f\|_X.$$

Αν $\|T_N\| \le M < \infty$ τότε είναι φανερό ότι

$$|T_N(f)| \le \|T_N\| \|f\|_\infty \le M\|f\|_\infty$$

και αυτή είναι η τετριμμένη κατεύθυνση του Θεωρήματος 18.2. Η σημαντική κατεύθυνση, την οποία και θα χρησιμοποιήσουμε εδώ, είναι η αντίστροφη, ότι δηλ. αν οι νόρμες $\|T_N\|$ δεν είναι φραγμένες τότε σίγουρα υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ για το οποίο η ακολουθία $|T_N(f)|$ δεν είναι φραγμένη, και συνεπώς η ακολουθία $T_N(f)$ δε μπορεί και να συγκλίνει σε κάποιο μιγαδικό αριθμό. Επειδή θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα 18.2 για τα συναρτησοειδή

$$T_N(f) = S_N(f)(0)$$

προκύπτει άμεσα ως συμπέρασμα η ύπαρξη συνεχούς συνάρτησης f της οποίας τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier δε συγκλίνουν στο 0 (όχι μόνο δε συγκλίνουν στο $f(0)$ αλλά δε συγκλίνουν πουθενά).

Απομένει λοιπόν να δείξουμε ότι οι νόρμες των T_N δεν είναι φραγμένες. Θυμόμαστε τώρα ότι

$$T_N(f) = S_N(f)(0) = f * D_N(0) = \int D_N(x)f(x)\,dx$$

και το ζητούμενο έπεται από το Λήμμα 18.1 και το Πρόβλημα 18.1 που ακολουθεί.

✏ **18.1** *Αν η συνάρτηση $D \in C(\mathbb{T})$ έχει πεπερασμένο πλήθος από μηδενικά στο $[0, 2\pi]$ τότε η νόρμα του συναρτησοειδούς T που απεικονίζει*

$$f \to \int D(x)f(x)\,dx$$

ισούται με $\|D\|_1 = \int |D|$.

💡 *Η ανισότητα $\|T\| \le \int |D|$ έπεται από την προφανή ανισότητα $\left|\int Df\right| \le \|f\|_\infty \int |D|$. Απομένει να δείξει κανείς ότι ισχύει $\left|\int Df\right| \ge (1-\epsilon)\int |D|$ για κάθε $\epsilon > 0$ και για κάποια συνεχή f με $|f| \le 1$. Αν μπορούσαμε να πάρουμε $f(x) = \operatorname{sgn} D(x)$ ($\operatorname{sgn} x$ είναι $+1$ αν $x > 0$, -1 αν $x < 0$ και 0 αν $x = 0$) θα είχαμε την ανισότητα αυτή ακόμη και με $\epsilon = 0$ αλλά μια τέτοια συνάρτηση είναι ασυνεχής εν γένει και άρα δεν είναι επιτρεπτή στον έλεγχο της νόρμας του συναρτησοειδούς. Μπορούμε όμως να προσεγγίσουμε τη συνάρτηση αυτή με μια συνεχή συνάρτηση φραγμένη από το 1 με τρόπο ώστε να μην επηρεάζουμε το ολοκλήρωμα $\int Df$ παρά ελάχιστα.*

Η απόδειξη του Θεωρήματος 18.1 είναι πλήρης με το Πρόβλημα 18.1.

19 Τρ, 30/11/10: Σύγκλιση των μερικών αθροισμάτων της σειράς Fourier, II

Δώσαμε μια απόδειξη του αποτελέσματος της προηγούμενης διάλεξης (ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση της οποίας η σειρά Fourier δε συγκλίνει για $x = 0$) αλλά χωρίς να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Banach-Steinhaus (Θεώρημα 18.2). Κατασκευάσαμε μια συγκεκριμένη συνάρτηση με αυτή την ιδιότητα (η απόδειξη με το Θεώρημα 18.2 είναι υπαρξιακή). Ακολουθήσαμε την απόδειξη στο [1, σ. 51].

20 Πέ, 2/12/10: Σύγκλιση των μερικών αθροισμάτων της σειράς Fourier, III.

Θα ασχοληθούμε τώρα με το κατά πόσον

$$S_N(f) \to f$$

όταν η σύγκλιση δεν είναι κατά σημείο, περίπτωση την οποία εξετάσαμε στην §18 και στην §19, αλλά κατά νόρμα. Εξετάζουμε δηλ. αν ισχύει

$$\|S_N(f) - f\| \to 0,$$

όταν στη θέση της νόρμας $\|\cdot\|$ είναι μια από τις γνωστές μας L^p νόρμες και η f ανήκει σε ένα αντίστοιχο L^p χώρο.

20.1 Όχι σύγκλιση κατά L^∞

Η πρώτη περίπτωση που θα κοιτάξουμε είναι η περίπτωση που $f \in C(\mathbb{T})$ και η νόρμα είναι η $\|\cdot\|_\infty$. Το ερώτημα, με άλλα λόγια, είναι αν η σειρά Fourier μιας συνεχούς συνάρτησης συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση. Γνωρίζοντας τα αποτελέσματα των §18-19, ότι δηλ. δεν ισχύει κατ᾽ ανάγκη ούτε η κατά σημείο σύγκλιση, είναι φανερό ότι η απάντηση είναι όχι. Αξίζει ίσως να επαναλάβουμε την απόδειξη χωρίς αναφορά στην κατά σημείο σύγκλιση.

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $\|S_N(f) - f\|_\infty \to 0$ για κάθε $f \in C(\mathbb{T})$, τότε οι τελεστές

$$S_N : C(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{T})$$

είναι φραγμένοι κατά σημείο, ισχύει δηλαδή για κάθε $f \in C(\mathbb{T})$:

$$\sup_N \|S_N(f)\|_\infty < \infty$$

αφού ισχύει $\|S_N(f)\|_\infty \to \|f\|_\infty$ (αποδείξτε το αυτό). Από το Θεώρημα Banach-Steinhaus (Θεώρημα 18.2) προκύπτει τότε ότι οι τελεστές S_N είναι ομοιόμορφα φραγμένοι, υπάρχει δηλ. $M < \infty$ τ.ώ. να ισχύει

$$\|S_N(f)\|_\infty \le M\|f\|_\infty, \quad \text{για κάθε } f \in C(\mathbb{T}) \text{ και για κάθε } N. \tag{20.1}$$

Από το Πρόβλημα 18.1 όμως και το Λήμμα 18.1 προκύπτει ότι για κάθε N υπάρχει συνάρτηση $f_N \in C(\mathbb{T})$, με $\|f_N\|_\infty \le 1$ (μια συνεχής συνάρτηση που "προσεγγίζει" τη συνάρτηση $\operatorname{sgn} D_N(x)$), τ.ώ.

$$S_N(f_N)(0) = f_N * D_N(0) = \int f_N D_N \ge C \log N$$

όπου $C > 0$ μια σταθερά (της οποίας η τιμή δεν έχει καμία σημασία για το πρόβλημα που εξετάζουμε). Άρα $\|S_N(f_N)\|_\infty \ge |S_N(f_N)(0)| \ge C \log N$, το οποίο αντιφάσκει με την υπόθεση (20.1).

✏ **20.1** *Γιατί δεν εξετάζουμε καθόλου το ερώτημα αν συγκλίνει στην L^∞ νόρμα η ακολουθία $S_N(f)$ στην f για κάθε $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ αλλά περιορίζουμε αμέσως την f να είναι συνεχής;*

20.2 Όχι σύγκλιση κατά L^1

Δείχνουμε τώρα ότι δεν ισχύει απαραίτητα ούτε $\|S_N(f) - f\|_1 \to 0$ για κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$.

Πράγματι, αν ίσχυε κάτι τέτοιο, όπως και στην περίπτωση της σύγκλισης κατά L^∞, θα είχαμε ότι για κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$ η ακολουθία $\|S_N(f)\|_1$ είναι φραγμένη και άρα από το Θεώρημα Banach-Steinhaus (Θεώρημα 18.2) θα υπήρχε $M < \infty$ τ.ώ. να ισχύει

$$\|S_N(f)\|_1 \le M\|f\|_1, \quad \text{για κάθε } f \in L^1(\mathbb{T}) \text{ και για κάθε } N. \tag{20.2}$$

Παίρνοντας όμως $f = K_n$ να είναι ένας πυρήνας του Fejér με μεγάλο n (πολύ μεγαλύτερο του N) έχουμε εύκολα ότι η συνάρτηση $S_N(K_n)$ είναι πολύ κοντά στον πυρήνα του Dirichlet D_N. Πράγματι και οι δύο συναρτήσεις $S_N(K_n)$ και D_N είναι τριγωνομετρικά πολυώνυμα βαθμού N και οι συντελεστές Fourier της $S_N(K_n)$ συγκλίνουν σε αυτούς της D_N για $n \to \infty$. Αυτό αρκεί για να δείξει ότι $\|S_N(K_n) - D_N\|_\infty \to 0$ για $n \to \infty$ το οποίο συνεπάγεται ότι $\|S_N(K_n) - D_N\|_1 \to 0$ για $n \to \infty$ και άρα ότι

$$\|S_N(K_n)\|_1 \to \|D_N\|_1 \ge C \log N, \quad \text{για } n \to \infty.$$

✏ **20.2** *Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες στον προηγούμενο ισχυρισμό και δείξτε ότι για κάθε N ισχύει ότι $\|S_N(K_n) - D_N\|_\infty \to 0$ για $n \to \infty$.*

Επειδή όμως $\|K_n\|_1 = 1$ αυτό το κάτω φράγμα αντιφάσκει με την (20.2) αφού η ποσότητα $C \log N$ μπορεί να γίνει οσοδήποτε μεγάλη.

✏ **20.3** *Σκοπός αυτού του Προβλήματος είναι να αποδείξουμε ότι δε συγκλίνει κατ᾽ ανάγκη η $S_N(f)$ στην f κατά L^1 για όλες τις $f \in L^1(\mathbb{T})$, χωρίς χρήση του Θεωρήματος Banach-Steinhaus.*

Έστω

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} K_{N_j}(x)$$

όπου N_j είναι μια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών και K_M δηλώνει τον πυρήνα του Fejér βαθμού M. Δείξτε ότι $f \in L^1(\mathbb{T})$ όποια και να είναι η ακολουθία $N_1 < N_2 < \ldots$ και ότι αν αυτή η ακολουθία αυξάνει αρκετά γρήγορα τότε η ακολουθία $S_N(f)$ δε συγκλίνει στην f στην L^1 νόρμα.

💡 *Αν η ακολουθία N_j αυξάνει αρκετά γρήγορα τότε για άπειρες τιμές του N μπορούμε να πετύχουμε να υπάρχει ένας μόνο από τους όρους*

$$\left\|2^{-j} S_N(K_{N_j})\right\|_1$$

ο οποίος να είναι (α) μεγάλος και (β) μεγαλύτερος από όλους τους άλλους μαζί.

20.3 Σύγκλιση κατά L^2

Από τη θεωρία L^2 που έχουμε δει στην §15 εύκολα προκύπτει ότι στην περίπτωση του χώρου $L^2(\mathbb{T})$ η απάντηση είναι καταφατική: $\|S_N(f) - f\|_2 \to 0$ για κάθε $f \in L^2(\mathbb{T})$. Αυτό αποδεικνύεται πολύ εύκολα χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Parseval (Θεώρημα 15.2):

$$\begin{aligned}
\|S_N(f) - f\|_2^2 &= \sum_k \left|(S_N(f) - f)^\wedge(k)\right|^2 \\
&= \sum_{|k|>N} \left|\widehat{f}(k)\right|^2 \\
&\to 0 \quad \text{για } N \to \infty
\end{aligned}$$

αφού η σειρά $\sum_k \left|\widehat{f}(k)\right|^2$ είναι συγκλίνουσα.

Αναφέρουμε χωρίς απόδειξη το γεγονός ότι έχουμε σύγκλιση κατά νόρμα και στην περίπτωση των χώρων $L^p(\mathbb{T})$ με $1 < p < \infty$. Με αυτά που έχουμε δείξει μέχρι στιγμής δε μπορούμε να δείξουμε αυτό το αποτέλεσμα.

21 Τρ, 7/12/10: Αρχή τοπικότητας (localization) για την κατά σημείο σύγκλιση. Τάξη μεγέθους των συντελεστών Fourier, I

22 Πέ, 9/12/10: Αρχή τοπικότητας (localization) για την κατά σημείο σύγκλιση. Τάξη μεγέθους των συντελεστών Fourier, II

23 Τρ, 14/12/10: Αρχή τοπικότητας (localization) για την κατά σημείο σύγκλιση. Τάξη μεγέθους των συντελεστών Fourier, III

23.1 Αρχή τοπικότητας

Θεώρημα 23.1 *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ τ.ώ. υπάρχει η παράγωγος $f'(\theta_0)$. Τότε τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier της f συγκλίνουν στην f στο θ_0*

$$S_N(f)(\theta_0) \to f(\theta_0), \quad \text{για } N \to \infty.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$F(t) = \begin{cases} \frac{f(\theta_0 - t) - f(\theta_0)}{t} & (0 < |t| < \pi) \\ -f'(\theta_0) & (t = 0). \end{cases}$$

Η συνάρτηση F είναι φραγμένη κοντά στο 0 και ολοκληρώσιμη στο χωρίο $|t| > \delta$, για κάθε θετικό δ, άρα $F \in L^1(\mathbb{T})$. Έχουμε επίσης

$$\begin{aligned} S_N(f)(\theta_0) - f(\theta_0) &= f * D_N(\theta_0) - f(\theta_0) \\ &= \int (f(\theta_0 - t) - f(\theta_0)) D_N(t)\, dt && (\text{αφού } \textstyle\int D_N = 1) \\ &= \int F(t) \cdot t \cdot D_N(t)\, dt. \end{aligned}$$

Αλλά

$$\begin{aligned} tD_N(t) &= \frac{t}{\sin\frac{t}{2}} \sin\left(N + \frac{1}{2}\right) t && (\text{από την } (2.9)) \\ &= \frac{t}{\sin\frac{t}{2}} \left(\sin Nt \cos\frac{t}{2} + \cos Nt \sin\frac{t}{2}\right). \end{aligned}$$

Άρα

$$S_N(f)(\theta_0) - f(\theta_0) = \int \left(F(t) \frac{t}{\sin(t/2)} \cos(t/2)\right) \sin Nt\, dt + \int (F(t)t) \cos Nt\, dt,$$

και καθένα από τα δύο αυτά ολοκληρώματα είναι της μορφής $\int g(t) \sin Nt\, dt$ ή $\int g(t) \cos Nt\, dt$ με $g \in L^1(\mathbb{T})$, άρα συγκλίνει στο 0 από το Λήμμα Riemann-Lebesgue (Θεώρημα 23.4). ∎

Παρατήρηση 23.1 *Με την ίδια απόδειξη του Θεωρήματος 23.1 έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα αν αντί για παραγωγισιμότητα της f στο θ_0 υποθέσουμε απλά ότι ισχύει στο θ_0 μια συνθήκη Lipschitz: υπάρχει δηλ. $\delta > 0$ τ.ώ.*

$$|f(\theta) - f(\theta_0)| \le M|\theta - \theta_0|, \quad \text{για κάθε } \theta \in (\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta). \tag{23.1}$$

✏ **23.1** *Αποδείξτε ότι αν $f'(\theta_0)$ υπάρχει τότε ισχύει η (23.1) για κάποια $M, \delta > 0$.*

Πόρισμα 23.1 (Αρχή τοπικότητας) *Αν $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ και οι f, g ταυτίζονται σε ένα ανοιχτό διάστημα I τότε για κάθε $\theta_0 \in I$ ισχύει η ισοδυναμία*

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(\theta_0) = f(\theta_0) \Longleftrightarrow \lim_{N\to\infty} S_N(g)(\theta_0) = g(\theta_0). \tag{23.2}$$

Δεν εξαρτάται δηλ. η σύγκλιση της $S_N(f)(x)$ παρά μόνο από τις τιμές της f σε μια οσοδήποτε μικρή γειτονιά του x.

Απόδειξη. Η $f - g$ είναι ολοκληρώσιμη και ταυτοτικά 0 στο I, άρα και παραγωγίσιμη στο $\theta_0 \in I$. Από το Θεώρημα 23.1 προκύπτει ότι $S_N(f-g)(\theta_0) \to 0$ και η ισοδυναμία (23.2) προκύπτει από την ισότητα $S_N(f)(\theta_0) = S_N(g)(\theta_0) + S_N(f-g)(\theta_0)$. ∎

Αν μια L^1 συνάρτηση f ικανοποιεί την (23.1) τότε, και μόνο τότε, η συνάρτηση $\frac{1}{t}(f(\theta_0 - t) - f(\theta_0))$ είναι φραγμένη σε μια περιοχή του μηδενός. Το επόμενο αποτέλεσμα μας λέει ότι ουσιαστικά αρκεί η ολοκληρωσιμότητα αυτής της συνάρτησης, που είναι βέβαια μια γενικότερη ιδιότητα.

Θεώρημα 23.2 (Το κριτήριο του Dini) *Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\int \left|\frac{1}{t}(f(\theta_0 + t) - f(\theta_0))\right| dt < \infty$ τότε $S_N(f)(\theta_0) \to f(\theta_0)$.*

Απόδειξη. Μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να προσθέσουμε μια σταθερά στην f, την $-f(\theta_0)$, και να μεταφέρουμε το θ_0 στο 0, ώστε η συνθήκη μας να γίνει $\int \left|\frac{f(t)}{t}\right| dt < \infty$, $f(0) = 0$, και θέλουμε να αποδείξουμε ότι $S_N(f)(0) \to 0$.

Έχουμε

$$\begin{aligned}
S_N(f)(0) &= \int f(t) D_N(t)\, dt \\
&= \int \frac{f(t)}{\sin(t/2)} \sin(N + \frac{1}{2})t\, dt \quad (\text{από την } (2.9)) \\
&= \int g(t) \sin(N + \frac{1}{2})t\, dt \quad (\text{όπου θέσαμε } g(t) = f(t)/\sin(t/2) \in L^1(\mathbb{T}) \text{ από την υπόθεσή μας}) \\
&= \int g(t)(\sin(t/2)\cos Nt + \cos(t/2)\sin Nt)\, dt \\
&= \int f(t)\cos Nt\, dt + \int [g(t)\cos(t/2)] \sin Nt\, dt,
\end{aligned}$$

και από το Λήμμα Riemann-Lebesgue (Θεώρημα 23.4) έχουμε ότι και τα δύο ολοκληρώματα τείνουν στο 0. ∎

23.2 Άλλες συνθήκες που εγγυώνται σύγκλιση κατά σημείο

Η σύγκλιση των Cesáro μέσων της f στην ίδια την f είναι εξασφαλισμένη απλά και μόνο από τη συνέχεια της f από το Θεώρημα του Fejér (Θεώρημα 11.2). Το επόμενο θεώρημα μας συνδέει, υπό συνθήκες, τη σύγκλιση των μερικών αθροισμάτων της σειράς Fourier με τη σύγκλιση των Cesáro μέσων.

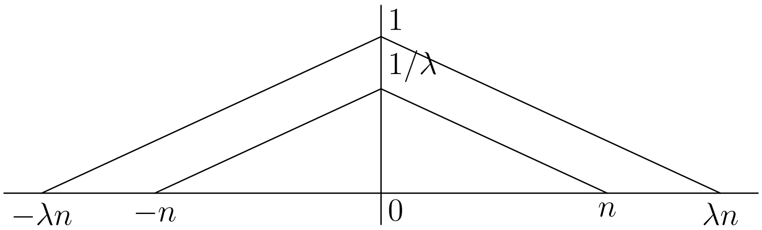
Θεώρημα 23.3 (Hardy) *Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\left|\widehat{f}(n)\right| = O(1/n)$ τότε οι ακολουθίες $S_N(f)(x)$ και $\sigma_N(f)(x)$ συγκλίνουν για τα ίδια x και στο ίδιο όριο. Αν η $\sigma_N(f)(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $x \in E$ το ίδιο κάνει και η $S_N(f)(x)$ (εδώ $E \subseteq [0, 2\pi)$ είναι ένα οποιοδήποτε μετρήσιμο σύνολο).*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 11.1 έχουμε ότι οποτεδήποτε $S_N(f)(x) \to \alpha$ τότε και $\sigma_N(f)(x) \to \alpha$ αφού η ακολουθία $\sigma_N(f)(x)$ αποτελείται από τους αριθμητικούς μέσους της ακολουθίας $S_N(f)(x)$. Άρα αρκεί να υποθέσουμε ότι $\sigma_N(f)(x) \to \alpha$ και να αποδείξουμε από αυτό ότι $S_N(f)(x) \to \alpha$.

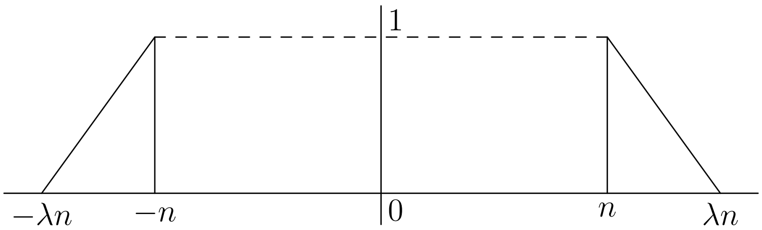
Η συνθήκη $\left|\widehat{f}(n)\right| = O(1/n)$ συνεπάγεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\lambda > 1$ τ.ώ. να ισχύει

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{n\le|j|\le\lambda n} \left|\widehat{f}(j)\right| < \epsilon. \tag{23.3}$$

✏ **23.2** *Αποδείξτε τον προηγούμενο ισχυρισμό.*
💡 *Αρκεί να το δείξετε με $1/|j|$ στη θέση της ακολουθίας $\left|\widehat{f}(j)\right|$. Εκτιμείστε τώρα το άθροισμα με ολοκλήρωμα.*



Σχήμα 11: Οι συντελεστές Fourier των πυρήνων του Fejér $K_{\lambda n}$ και K_n



Σχήμα 12: Οι συντελεστές Fourier της $G_n(x)$

Ισχύει τώρα η ταυτότητα (υποθέστε για απλότητα ότι λn είναι ακέραιος· δεν αλλάζει τίποτε ουσιαστικό αν δεν είναι και περιπλέκεται πολύ το γράψιμο)

$$K_{\lambda n}(x) - \frac{1}{\lambda}K_n(x) = (1-\frac{1}{\lambda})D_n(x) + (1-\frac{1}{\lambda})G_n(x) \tag{23.4}$$

όπου

$$G_n(x) = \sum_{n\le k\le\lambda n}\left(1 - \frac{k-n}{(\lambda-1)n}\right)(e^{ikx} + e^{-ikx})$$

(οι συντελεστές Fourier της $G_n(x)$ φαίνονται στο Σχήμα 12). Η ταυτότητα (23.4) μπορεί πολύ εύκολα να αποδειχτεί με αναφορά στο Σχήμα 11 όπου φαίνονται οι συντελεστές Fourier των πυρήνων του Fejér που εμφανίζονται στο αριστερό μέλος.

Παίρνοντας συνέλιξη με την f η ταυτότητα (23.4) μας δίνει την

$$S_n(f)(x) = \frac{\lambda}{\lambda-1}\sigma_{\lambda n}(f)(x) - \frac{1}{\lambda-1}\sigma_n(f)(x) - f*G_n(x). \tag{23.5}$$

Έχουμε

$$f*G_n(x) = \sum_{n\le|j|\le\lambda n}\widehat{f}(j)\widehat{G_n}(j)e^{ijx}$$

άρα, αφού $\left|\widehat{G_n}(j)\right| \le 1$,

$$|f*G_n(x)| \le \sum_{n\le|j|\le\lambda n}\left|\widehat{f}(j)\right| \le \epsilon,$$

αρκεί το n να είναι αρκετά μεγάλο. Αν τώρα υποθέσουμε ότι $\sigma_n(x) \to \alpha$ (και άρα και ότι $\sigma_{\lambda n}(x) \to \alpha$) προκύπτει από την (23.5) ότι $\limsup S_n(f)(x) \le \alpha + \epsilon$ και $\liminf S_n(f)(x) \ge \alpha - \epsilon$. Αφού το ϵ μπορεί να είναι οποιοσδήποτε θετικός αριθμός προκύπτει ότι

$$\lim S_n(f)(x) = \alpha.$$

∎

✏ **23.3** *Συμπληρώστε την απόδειξη του Θεωρήματος 23.3. Βεβαιωθείτε ότι η προηγούμενη απόδειξη δίνει και την ομοιόμορφη σύγκλιση στο E της $S_n(f)(x)$ αν υποθέσουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση στο E της $\sigma_n(f)(x)$.*

Πόρισμα 23.2 *Αν $f \in C^1(\mathbb{T})$ τότε $S_N(f)(x) \to f(x)$ ομοιόμορφα.*

Απόδειξη. Ισχύει $\left|\widehat{f}(n)\right| \le \frac{\|f'\|_1}{|n|} = O(1/|n|)$ λόγω της παραγωγισιμότητας της f (αφού $\widehat{f}(n) = \widehat{f'}(n)/(in)$ και $\left|\widehat{f'}(n)\right| \le \|f'\|_1$) άρα από το Θεώρημα 23.3 η $S_N(f)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f αφού η $\sigma_N(f)$ συγκλίνει στην f ομοιόμορφα. ∎

Το Πόρισμα 23.2 είναι επίσης συνέπεια του αποτελέσματος του Προβλήματος 15.11: κάθε C^1 συνάρτηση έχει σειρά Fourier που είναι απολύτως συγκλίνουσα, άρα και ομοιόμορφα συγκλίνουσα.

23.3 Ρυθμός μείωσης των συντελεστών Fourier

Το πρώτο και βασικότερο αποτέλεσμα που αφορά τους συντελεστές Fourier μιας L^1 συνάρτησης είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα 23.4 (Λήμμα Riemann-Lebesgue) *Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ τότε $\lim_{|k|\to\infty} \widehat{f}(k) = 0$.*

Έχουμε δώσει απόδειξη αυτού στις σημειώσεις για το ολοκλήρωμα Lebesgue και δε θα την επαναλάβουμε εδώ παρά θα πούμε ότι ισχύει για τους παρακάτω λόγους: (α) σίγουρα ισχύει για τριγωνομετρικά πολυώνυμα (η ακολουθία των συντελεστών Fourier τους όχι μόνο συγκλίνει στο 0 αλλά είναι και τελικά ίση με μηδέν) (β) τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στο χώρο $L^1(\mathbb{T})$ (Πρόβλημα 11.4) και (γ) οι συντελεστές Fourier μιας συνάρτησης φράσσονται από την L^1 νόρμα της συνάρτησης. (Αυτή η απόδειξη είναι κάπως διαφορετική από αυτή που δίνεται στις σημειώσεις για το ολοκλήρωμα Lebesgue όπου δε χρησιμοποιείται το θεώρημα του Fejér ούτε τριγωνομετρικά πολυώνυμα αλλά μόνο η πυκνότητα των συνεχών συναρτήσεων στο L^1.)

Γενικά όσο πιο "ομαλή" είναι μια συνάρτηση (όσο πιο "συνεχής", όσο πιο παραγωγίσιμη, κλπ) τόσο πιο γρήγορα φθίνουν οι συντελεστές Fourier της. Τα αποτελέσματα που θα δούμε παρακάτω κάνουν την παραπάνω γενική αρχή πιο συγκεκριμένη.

Θεώρημα 23.5 (Συντελεστές C^k συναρτήσεων) *Αν $f \in C^k(\mathbb{T})$ τότε $\left|\widehat{f}(n)\right| = o(1/|n|^k)$.*

Απόδειξη. Αυτό αποτελεί βελτίωση του Θεωρήματος 4.1 που λέει ότι $\left|\widehat{f}(n)\right| = O(1/|n|^k)$. Η βελτίωση οφείλεται σε χρήση του Λήμματος Riemann-Lebesgue (Θεώρημα 23.4). Αφού έχουμε από το Θεώρημα 4.1 για $n \neq 0$

$$\widehat{f}(n) = \frac{\widehat{f^{(k)}}(n)}{(in)^k}$$

και $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{T})$ (αφού είναι συνεχής) έπεται ότι $\lim_{|n|\to\infty} \widehat{f^{(k)}(n)} = 0$ που συνεπάγεται το ζητούμενο. ∎

Το Πρόβλημα 15.11 αποτελεί επίσης μια έκφραση της αρχής "ομαλότητα συνεπάγεται μείωση των συντελεστών Fourier": αν $f \in C^1(\mathbb{T})$ τότε ισχύει

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(n)\right| < \infty.$$

Το να είναι μια συνάρτηση $f \in C(\mathbb{T})$ Lipschitz, το να υπάρχει δηλ. πεπερασμένος αριθμός $M > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x) - f(y)| \le M|x - y|, \quad \text{για κάθε } x, y, \tag{23.6}$$

είναι μια συνθήκη ασθενέστερη από το να είναι η συνάρτηση παραγωγίσιμη (π.χ. η $f(x) = |x|$ είναι Lipschitz με σταθερά $M = 1$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0).

Θεώρημα 23.6 (Συντελεστές Lipschitz συναρτήσεων) *Αν η $f \in C(\mathbb{T})$ είναι Lipschitz τότε $\left|\widehat{f}(n)\right| = O(1/|n|)$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι $\int f(x + (\pi/n))e^{-inx}\,dx = -\int f(x)e^{-inx}\,dx = -\widehat{f}(n)$. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{f}(n)\right| &= \left|\frac{1}{4\pi}\int (f(x) - f(x + (\pi/n)))e^{-inx}\,dx\right| \\
&\le \frac{1}{4\pi}\int M(\pi/|n|)\,dx \quad \text{(από την ιδιότητα Lipschitz)} \\
&\le \frac{\pi M}{2|n|}.
\end{aligned}$$

∎

Αν $\alpha \in (0, 1]$ λέμε ότι μια συνάρτηση $f \in C(\mathbb{T})$ είναι Lipschitz-α αν υπάρχει πεπερασμένη σταθερά $M > 0$ τ.ώ. να ισχύει

$$|f(x) - f(y)| \le M|x - y|^{\alpha}, \quad \text{για κάθε } x, y. \tag{23.7}$$

✏ **23.4** *(α) Αν $0 < \alpha < \beta \le 1$ και μια συνάρτηση f είναι Lipschitz-β τότε είναι και Lipschitz-α. Για κάθε τέτοιο ζεύγος αριθμών α και β δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση g που είναι Lipschitz-α αλλά όχι Lipschitz-β.*

(β) Αν μια συνάρτηση $f \in C(\mathbb{T})$ ικανοποιεί την (23.7) για κάποιο $\alpha > 1$ δείξτε ότι η συνάρτηση είναι αναγκαστικά σταθερή (και άρα δεν έχει ιδιαίτερη χρησιμότητα να μιλάμε για συναρτήσεις που είναι Lipschitz-α με $\alpha > 1$).

💡 *Για το (β), αν $x \ne y$ δείξτε ότι $g(x) = g(y)$ γράφοντας*

$$|g(x) - g(y)| \le |g(x) - g(x + \delta)| + |g(x + \delta) - g(x + 2\delta)| + \cdots + |g(x + (n - 1)\delta) - g(y)|,$$

όπου $\delta = (y - x)/n$ και παίρνοντας $n \to \infty$ αφού χρησιμοποιήσετε την (23.7).

Θεώρημα 23.7 (Συντελεστές Lipschitz-α συναρτήσεων) *Αν η $f \in C(\mathbb{T})$ είναι Lipschitz-α (για κάποιο $\alpha \in (0, 1]$) τότε $\left|\widehat{f}(n)\right| = O(1/|n|^{\alpha})$.*

✏ **23.5** *Αποδείξτε το Θεώρημα 23.7.*

💡 *Τροποποιήσετε ελάχιστα την απόδειξη του 23.6.*

Στο επόμενο θεώρημα η μείωση των συντελεστών Fourier είναι αποτέλεσμα της μονοτονίας της συνάρτησης (η οποία πρέπει συνεπώς να θεωρείται κάποιο είδος ομαλότητας).

Θεώρημα 23.8 (Συντελεστές μονοτόνων συναρτήσεων) *Αν η f είναι μονότονη στο διάστημα $(-\pi, \pi)$ τότε $\left|\widehat{f}(n)\right| = O(1/|n|)$. Πιο συγκεκριμένα, αν $B = \lim_{x\to\pi-} f(x)$ και $A = \lim_{x\to(-\pi)+} f(x)$ είναι τα πλευρικά όρια στα άκρα (πάντα υπάρχουν λόγω μονοτονίας) τότε*

$$\left|\widehat{f}(n)\right| \le \frac{|B-A|}{\pi|n|}. \tag{23.8}$$

Απόδειξη. Το δείχνουμε πρώτα όταν η συνάρτηση f είναι κλιμακωτή και αύξουσα (ή φθίνουσα· αυτό δεν έχει καμιά σημασία οπότε περιοριζόμαστε από δω και πέρα σε αύξουσες). Αν η συνάρτηση είναι της μορφής

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \chi_{[x_k, x_{k+1})}(t)$$

όπου $-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = \pi$ και $c_k \le c_{k+1}$, τότε μπορούμε να γράψουμε και

$$f(x) = c_0 + (c_1 - c_0)\chi_{[x_1,\pi]}(x) + (c_2 - c_1)\chi_{[x_2,\pi]}(x) + \cdots + (c_{N-1} - c_{N-2})\chi_{[x_{N-1},\pi]}(x). \tag{23.9}$$

Για τη χαρακτηριστική ενός διαστήματος έχουμε μετά από πολύ εύκολο υπολογισμό

$$\widehat{\chi_{[a,b]}}(n) = \frac{i}{2\pi n}(e^{-ibn} - e^{-ian})$$

και άρα

$$\left|\widehat{\chi_{[a,b]}}(n)\right| \le \frac{1}{\pi|n|}. \tag{23.10}$$

Από την (23.9) και την (23.10) και το ότι οι ποσότητες $c_{j+1} - c_j$ είναι μη αρνητικές προκύπτει ότι

$$\left|\widehat{f}(n)\right| \le \frac{c_{N-1} - c_0}{\pi|n|} \tag{23.11}$$

για $n \ne 0$, που αποδεικνύει το ζητούμενο για μονότονες κλιμακωτές συναρτήσεις αφού $A = c_0, B = c_{N-1}$.

Για να δείξουμε το ζητούμενο για οποιαδήποτε $f \in L^1(\mathbb{T})$ που είναι αύξουσα στο $(-\pi, \pi)$ χρειαζόμαστε το ακόλουθο αποτέλεσμα προσέγγισης.

✏ **23.6** *Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ είναι αύξουσα στο $(-\pi, \pi)$ και τα A, B είναι όπως στην εκφώνηση του Θεωρήματος 23.8 τότε, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει αύξουσα κλιμακωτή συνάρτηση $g(x)$ τέτοια ώστε $\|f - g\|_1 \le \epsilon$ και επιπλέον $A \le \lim_{x\to(-\pi)+} g(x)$ και $B \ge \lim_{x\to\pi-} g(x)$.*

💡 *Για κάθε φυσικό N ορίζουμε τη διαμέριση $x_0 = -\pi < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = \pi$ με*

$$x_j = \inf\left\{x \in (-\pi, \pi) : \ f(x) \ge A + \frac{j}{N}(B - A)\right\}, \quad j = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Η αύξουσα κλιμακωτή συνάρτηση $g(x)$ ορίζεται να παίρνει τιμή $A + \frac{j}{N}(B - A)$ στο διάστημα $[x_j, x_{j+1})$ για $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Δείξτε τις ζητούμενες ιδιότητες για αυτή τη συνάρτηση $g(x)$ αν το N είναι αρκετά μεγάλο. Παρατηρείστε ότι δε χρειαζόμαστε κανένα θεώρημα πυκνότητας στον $L^1(\mathbb{T})$ (π.χ. δε χρειαζόμαστε το ότι οι συνεχείς συναρτήσεις είναι πυκνές ή ότι οι κλιμακωτές συναρτήσεις είναι πυκνές).

Με δεδομένο το αποτέλεσμα του Προβλήματος 23.6 η απόδειξη του Θεωρήματος 23.8 συμπληρώνεται ως εξής. Αν η f είναι όπως στην εκφώνηση του Θεωρήματος και η g όπως στο Πρόβλημα 23.6 τότε

$$\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n) + \widehat{f-g}(n)$$

και $\left|\widehat{f-g}(n)\right| \le \|f-g\|_1 \le \epsilon$ ενώ για την g έχουμε από το πρώτο μέρος της απόδειξης ότι $|\widehat{g}(n)| \le |B-A|/(\pi|n|)$. Αφού το $\epsilon > 0$ είναι οτιδήποτε προκύπτει το ζητούμενο. ∎

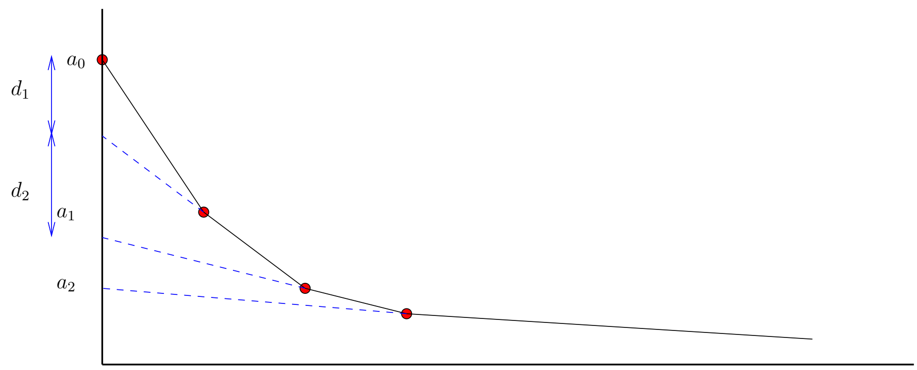
Έχουμε δει, σε διάφορες μορφές της, την αρχή ότι η ομαλότητα της συνάρτησης συνεπάγεται ένα ρυθμό μείωσης των συντελεστών Fourier. Φυσιολογικά γεννιέται το ερώτημα αν υπάρχει όριο στο πόσο αργά μπορεί μια ακολουθία συντελεστών Fourier να συγκλίνει στο 0, όπως προβλέπει το Λήμμα Riemann-Lebesgue (Θεώρημα 23.4). Συνέπεια του επόμενου Θεωρήματος 23.9 και του Προβλήματος 23.7 είναι ότι δεν υπάρχει τέτοιο όριο και ότι υπάρχουν L^1 συναρτήσεις των οποίων οι συντελεστές Fourier συγκλίνουν στο 0 όσο αργά θέλουμε.

Θεώρημα 23.9 *Αν $a_{-n} = a_n$, $n \in \mathbb{Z}$, $a_n \ge 0$, $\lim_{|n|\to\infty} a_n = 0$ και η ακολουθία a_n, $n \ge 0$ είναι κυρτή, ισχύει δηλ.*

$$a_n \le \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}), \quad (n \ge 1), \tag{23.12}$$

τότε υπάρχει $f \in L^1(\mathbb{T})$ (μάλιστα ισχύει $f \ge 0$) τ.ώ. $\widehat{f}(n) = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι οι συντελεστές Fourier ενός πυρήνα του Fejér K_N είναι μια άρτια



Σχήμα 13: Πώς γράφουμε μια κυρτή ακολουθία σαν άθροισμα "τριγώνων"

κυρτή ακολουθία, όπως και η a_n. Έπειτα δείχνουμε ότι η ακολουθία a_n μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα

$$a_n = d_1\widehat{K_1}(n) + d_2\widehat{K_2}(n) + d_3\widehat{K_3}(n) + \cdots$$

όπου $d_j \ge 0$, για $j \ge 1$ και $\sum_{j=1}^{\infty} d_j = a_0$.

Ο ευκολότερος τρόπος είναι να δει κανείς ότι ισχύει κάτι τέτοιο είναι να παρατηρήσει (δείτε Σχήμα 13) ότι μια κυρτή πολυγωνική γραμμή (όπως αυτή που ορίζουν τα σημεία (j, a_j), $j \ge 0$) μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα από τρίγωνα όπως φαίνεται στο Σχήμα. Οι αριστερές πλευρές των τριγώνων είναι πάνω στον άξονα των y και έχουν μήκος d_j και οι πλευρές τους προκύπτουν αν προεκτείνουμε τις πλευρές $(j-1, a_{j-1})$–(j, a_j) της πολυγωνικής γραμμής προς τα αριστερά μέχρι να τμήσουν τον άξονα των y.

Αν τώρα θέσουμε

$$f(x) = d_1 K_1(x) + d_2 K_2(x) + d_3 K_3(x) + \cdots$$

παίρνουμε μια μη αρνητική συνάρτηση στο L^1 (αφού $\|K_N\|_1 = 1$ και $\sum_{j=1}^{\infty} d_j = a_0 < \infty$) της οποίας οι συντελεστές είναι οι a_n. ∎

✏ **23.7** *Έστω $b_n \ge 0$, $n \ge 0$, μια φθίνουσα ακολουθία που συγκλίνει στο 0. Δείξτε ότι υπάρχει κυρτή (ικανοποιεί δηλ. την (23.12)) ακολουθία a_n, $n \ge 0$, τ.ώ. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ και*

$$a_n \ge b_n, \quad (n \ge 0).$$

💡 *Το να είναι η ακολουθία a_n, $n \ge 0$, κυρτή ισοδυναμεί με το να είναι η μη αρνητική ακολουθία*

$$\Delta a_n = a_{n-1} - a_n, \quad n \ge 1,$$

φθίνουσα. Έστω

$$D = \{\Delta b_k : \ k = 1, 2, \ldots, \& \Delta b_k > 0\}.$$

(Εξαιρούμε δηλ. από την ακολουθία Δb_n τους μηδενικούς της όρους.) Αποδείξτε ότι το σύνολο αυτό μπορεί να ταξινομηθεί σε φθίνουσα σειρά και έστω d_n, $n \ge 1$, το σύνολο D σε φθίνουσα σειρά. Ορίστε τώρα την ακολουθία a_n ως εξής:

$$a_0 = b_0, \ a_k = a_{k-1} - d_k \ (k \ge 1)$$

και δείξτε ότι έχει τις ιδιότητες που ζητάμε.

Αντίθετα με την περίπτωση του Θεωρήματος 23.9 όπου η ακολουθία a_n είναι άρτια, αν μια συνάρτηση έχει περιττή ακολουθία συντελεστών Fourier τότε αυτοί υπόκεινται σε κάποια ελάχιστη ταχύτητα σύγκλισης στο 0.

Θεώρημα 23.10 *Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\widehat{f}(-n) = -\widehat{f}(n) \ge 0$ για $n \ge 0$, τότε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}(n)}{n} < \infty. \tag{23.13}$$

Απόδειξη. Αφού $\widehat{f}(0) = \int f = 0$ έπεται ότι η συνάρτηση

$$F(t) = \int_0^t f(s)\, ds$$

είναι συνεχής (από την ολοκληρωσιμότητα της f· δείτε τις σημειώσεις για το ολοκλήρωμα Lebesgue) και 2π-περιοδική. Από το Πρόβλημα 4.12 έχουμε

$$\widehat{F}(n) = \frac{1}{in}\widehat{f}(n), \quad (n \ne 0).$$

Το Θεώρημα του Fejér (Θεώρημα 11.2) για τη συνεχή συνάρτηση iF μας λέει ότι $\sigma_N(iF)(0) \to iF(0) = 0$. Αλλά

$$\begin{aligned}\sigma_N(iF)(0) &= i\widehat{F}(0) + 2\sum_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{n}{N+1}\right)\frac{\widehat{f}(n)}{n} \\ &\to i\widehat{F}(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\widehat{f}(n)}{n},\end{aligned}$$

άρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}(n)}{n} = -i\int F$. ∎

Το επόμενο εύκολο πόρισμα του Θεωρήματος 23.10 είναι το πρώτο αποτέλεσμα που συναντάμε από το οποίο φαίνεται ότι υπάρχουν ακολουθίες που συγκλίνουν στο 0 και οι οποίες δεν είναι ακολουθίες συντελεστών Fourier κάποιας L^1 συνάρτησης. Πάρτε για παράδειγμα $a_n = \frac{1}{\log n}$ στο Πόρισμα 23.3.

Πόρισμα 23.3 *Αν* $a_n \ge 0$ *και* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = \infty$ *τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nt$ *δεν είναι σειρά Fourier κάποιας* L^1 *συνάρτησης.*

24 Πέ, 16/12/10: Η ανισότητα Bernstein.

Θεώρημα 24.1 *Αν* $P(x) = \sum_{k=-N}^{N} \widehat{P}(k) e^{ikx}$ *είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού* $\le N$ *τότε ισχύει*

$$\left\|P'\right\|_\infty \le N \|P\|_\infty. \tag{24.1}$$

✏ **24.1** *Δείξτε ότι υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο* $P(x)$*, βαθμού* N*, για το οποίο η* (24.1) *ισχύει ως ισότητα.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε πρώτα την ασθενέστερη ανισότητα

$$\left\|P'\right\|_\infty \le 2N \|P\|_\infty. \tag{24.2}$$

Έπειτα θα δείξουμε πώς τροποποιείται η απόδειξη ώστε να δείξουμε την ανισότητα (24.1).

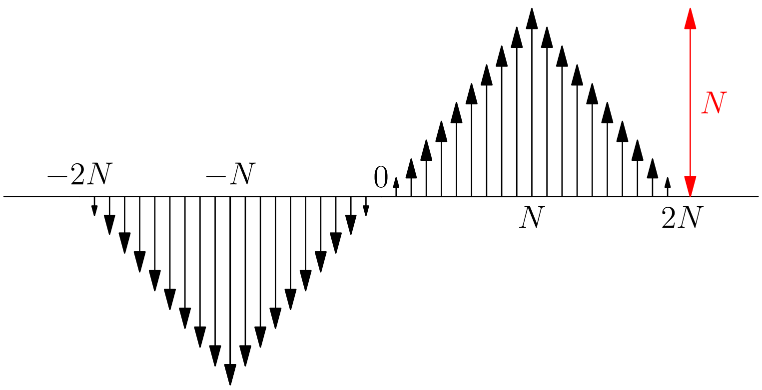
Ας είναι $F(x) \in L^1(\mathbb{T})$ τ.ώ. να ισχύει

$$\widehat{F}(k) = k, \quad (\text{για } |k| \le N). \tag{24.3}$$

Τότε $P'(x) = iP * F(x)$ αφού τα δυο μέλη της ισότητας αυτής έχουν ίδιους συντελεστές Fourier (θυμηθείτε ότι $\widehat{P'}(k) = ik\widehat{P}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, και ότι οι συντελεστές Fourier της συνέλιξης $a * b$ είναι οι $\widehat{a}(k)\widehat{b}(k)$). Άρα έχουμε

$$\left\|P'\right\|_\infty \le \|P\|_\infty \|F\|_1. \tag{24.4}$$

Αρκεί λοιπόν να βρούμε μια συνάρτηση F που να ικανοποιεί την (24.3) και να έχει όσο γίνεται πιο μικρή L^1 νόρμα. Μια καλή επιλογή είναι η συνάρτηση F της οποίας οι συντελεστές Fourier φαίνονται στο Σχήμα 14.



Σχήμα 14: Οι συντελεστές Fourier της $F(x)$

Η συνάρτηση αυτή μπορεί να γραφεί ως

$$F(x) = NK_{N-1}(x)e^{iNx} - NK_{N-1}(x)e^{-iNx},$$

(δείτε και το Σχήμα 6) και άρα $\|F\|_1 \le 2N$ από την τριγωνική ανισότητα και το γεγονός ότι ο πυρήνας του Fejér $K_M(x)$ έχει $\|K_M\|_1 = \int K_M = 1$ για κάθε φυσικό αριθμό M. Χρησιμοποιώντας λοιπόν αυτή τη συνάρτηση στην (24.4) έχουμε αποδείξει την (24.2).

Για να αποδειξουμε την (24.1) θα χρειαστεί να βρούμε μια άλλη συνάρτηση $F(x)$ η οποία να ικανοποιεί την (24.3) και να έχει L^1 νόρμα οσοδήποτε κοντά στο N (αντί για $2N$ που έχουμε ήδη καταφέρει).

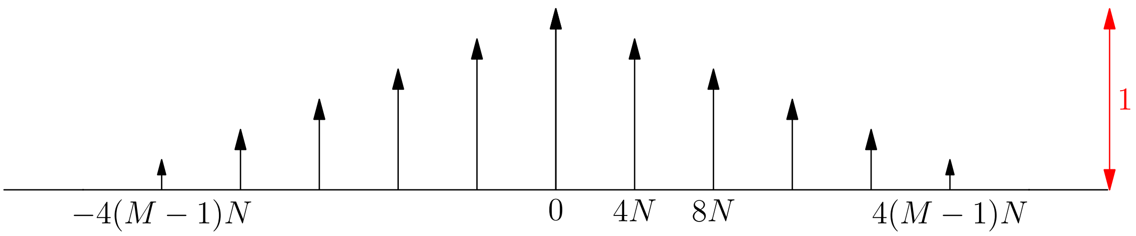
Έστω λοιπόν $\epsilon > 0$. Ορίζουμε μια νέα συνάρτηση $G(x)$ τ.ώ. να ισχύει $P' = iG * P$ όπως πριν (αυτό ισοδυναμεί με το ότι $\widehat{G}(n) = n$ για $|n| \le N$) και τέτοια ώστε

$$\|G\|_1 \le (1+\epsilon)N. \tag{24.5}$$

Αφού $\|P'\|_\infty \le \|G\|_1 \|P\|_\infty$ και $\epsilon > 0$ μπορεί να είναι οσοδήποτε μικρό προκύπτει η (24.1). Μια συνάρτηση G για την οποία ισχύουν τα παραπάνω είναι η

$$\begin{aligned} G(x) &= N K_{N-1}(x)(K_M(4Nx)e^{iNx} - K_M(4Nx)e^{-iNx}) \\ &= N K_{N-1}(x)\left((2i \sin Nx) K_M(4Nx)\right), \end{aligned}$$

όπου $M > N$ είναι αρκετά μεγάλο (ανάλογα με το πόσο μικρό είναι το ϵ). Αρκεί να δείξουμε ότι ότι $\|K_{N-1}(x)K_M(4Nx)\sin Nx\|_1$ γίνεται οσοδήποτε κοντά στο $1/2$ όταν το M γίνεται αρκετά μεγάλο. Αυτό είναι το αντικείμενο του Προβλήματος 24.3 με το οποίο συμπληρώνεται η απόδειξη της (24.1).



Σχήμα 15: Οι συντελεστές Fourier της $K_M(4Nx)$ είναι αυτοί της $K_M(x)$ "ανοιγμένοι" κατά $4N$

24.2 *Σχεδιάστε το γράφημα της $\widehat{G}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Αυτό είναι πολύ σημαντικό για να καταλάβετε γιατί η $G(x)$ έχει $\widehat{G}(n) = n$ για $|n| \le N$.*

Σχεδιάστε πρώτα τους συντελεστές Fourier της συνάρτησης $K_{N-1}(x)K_M(4Nx)e^{iNx}$, χρησιμοποιώντας το Σχήμα 15 και τα Προβλήματα 2.6 και 2.7.

24.3 *Αποδείξτε ότι $\limsup_{M\to\infty} \|K_{N-1}(x)K_M(4Nx)\sin Nx\|_1 \le 1/2$.*

Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες στα παρακάτω.

(α) Η μάζα του πυρήνα $K_M(x)$ "συγκεντρώνεται" κοντά στο 0 (δείτε Ορισμό 13.1 του τι σημαίνει "καλός πυρήνας", ιδιότητα 3) άρα η μάζα του $K_M(4Nx)$ συγκεντρώνεται στα σημεία $x = (\ell/4N)2\pi$, $\ell = 0, 1, \ldots, 4N-1$. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι για ένα ολοκλήρωμα της μορφής

$$\int K_M(4Nx)\phi(x)\,dx,$$

όπου $\phi(x) \in C(\mathbb{T})$, σημασία έχουν, για μεγάλες τιμές του M, μόνο οι τιμές της $\phi(x)$ στα σημεία $(\ell/4N)2\pi$, $\ell = 0, 1, \ldots, 4N-1$.

(β) Για $x \in [0, 2\pi]$ "κοντά" σε ένα σημείο της μορφής $(\ell/4N)2\pi$ το $|\sin Nx|$ είναι κοντά στο 0 ή στο 1. (Αν $\ell = 0$ ή $2 \bmod 4$ τότε είναι κοντά στο 0 και είναι κοντά στο 1 αν $\ell = 1$ ή $3 \bmod 4$.) Άρα, λόγω της παρατήρησης στο (α), το ολοκλήρωμα

$$\|K_{N-1}(x)K_M(4Nx)\sin Nx\|_1 = \int K_{N-1}(x)K_M(4Nx)|\sin Nx|\,dx$$

προσεγγίζεται από το

$$\int K_{N-1}(x)K_M(4Nx)\sin^2 Nx\,dx. \tag{24.6}$$

(γ) Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\sin^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta$ *και γράφουμε το προηγούμενο ολοκλήρωμα ως*

$$\frac{1}{2}\int K_{N-1}(x)K_M(4Nx)\,dx - \frac{1}{2}\int K_{N-1}(x)K_M(4Nx)\cos 2Nx\,dx. \tag{24.7}$$

Όλοι οι συντελεστές Fourier των συναρτήσεων $K_{N-1}(x)$, $K_M(4Nx)$ *και* $\cos 2Nx$ *είναι μη αρνητικοί, άρα (δείτε το Πρόβλημα 2.6) το δεύτερο ολοκλήρωμα στην* (24.7) *είναι μη αρνητικό αφού είναι ο μηδενικός συντελεστής Fourier της συνάρτησης. Το πρώτο ολοκλήρωμα στην* (24.7) *ισούται με 1 αφού εύκολα βλέπουμε ότι ο μηδενικός συντελεστής Fourier της* $K_{N-1}(x)K_M(4Nx)$ *ισούται με* 1 *(και πάλι αναφερθείτε στο Πρόβλημα 2.6 και στο Σχήμα 15). Άρα το* (24.6) *είναι* $\le 1/2$.

∎

25 Τρ, 11/1/2011: Η ανισότητα Bernstein.

Ξαναποδείξαμε σήμερα στο μάθημα την ανισότητα του Bernstein μια και υπήρχαν προβλήματα με την πρώτη παρουσίαση της απόδειξης στην ταξη.

26 Πέ, 13/1/2011: Λύση ασκήσεων

27 Βιβλιογραφία

[1] Y. Katznelson, *An introdction to Harmonic Analysis*, John Wiley, New York (1968). 43

[2] E. Stein and R. Shakarchi, *Fourier Analysis, an introduction*, Princeton University Press, 2003.