ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Πρόοδος-Εαρινό Εξάμηνο 2024

Επιτρέπεται μία σελίδα με σημειώσεις. Διάρκεια 2 ώρες. Καλή επιτυχία!!

(**1**) (3.5 μονάδες) Έστω $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ και $f\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \cdot e^{i(\pi - x)\alpha}$.

(**i**) Δείξτε ότι

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{n + \alpha}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(**ii**) Δείξτε ότι για κάθε $x \in (0, 2\pi)$ έχουμε

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n + \alpha}.$$

(**iii**) Υπολογίστε τα αθροίσματα

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + \alpha} \quad \text{και} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n + \alpha)^2}.$$

(**2**) (3.5 μονάδες) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-περιοδική, *Riemann* ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

(**i**) Δείξτε ότι

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x + \pi/n)) e^{-inx}\, dx, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

(**ii**) Εαν για κάποιο $a \in (0, 1]$ η f είναι Lip_a-συνεχής, δείξτε ότι υπάρχει $C > 0$ ώστε

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{C}{|n|^a}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

(**iii**) Έστω $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με τύπο

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2^n x)}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι η g είναι συνεχής, όμως για κάθε $a \in (0, 1)$ η g **δεν** είναι Lip_a-συνεχής.

(**3**) (3.5 μονάδες) (**i**) Έστω $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς, 2π-περιοδικές συναρτήσεις. Δείξτε ότι

$$\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n) \cdot \hat{g}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(**ii**) Δείξτε ότι για κάθε $N \in \mathbb{N}$ υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο g_N, τέτοιο ώστε για κάθε συνεχή 2π-περιοδική συναρτήση f ισχύει

$$\widehat{f * g_N}(n) = \hat{f}(n), \quad n = -N, \ldots, N.$$

(**iii**) Δείξτε ότι **δεν** υπάρχει συνεχής 2π-περιοδική συναρτήση g, τέτοια ώστε για κάθε συνεχή 2π-περιοδική συναρτήση f ισχύει

$$f * g = f.$$
