ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ(Μεταπτυχιακό)

7ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2016
Παράδοση: Πέμπτη 2 Ιουνίου.

(**1**) Έστω $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και 1-1. Δείξτε ότι $f'(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \Omega$.

(**2**) Έστω Ω απλά συνεκτικό χωρίο το οποίο είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει σύμμορφη απεικόνιση $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$.

(**3**) Δείξτε ότι για κάθε $c > 0$ έχουμε

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iN}^{c+iN} \frac{a^s}{s}\, ds = \begin{cases} 1 & \text{εάν } \ a > 1, \\ \frac{1}{2} & \text{εάν } \ a = 1, \\ 0 & \text{εάν } \ 0 \leq a < 1. \end{cases}$$

(**4**) Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μιγαδικών αριθμών με φραγμένα μερικά αθροίσματα. Δείξτε ότι η σειρά *Dirichlet*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

συγκλίνει και ορίζει ολόμορφη συνάρτηση για $Re(s) > 0$.

Υπόδειξη: Άθροιση κατά μέρη.

(**5**) (i) Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$\tilde{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$

είναι ολόμορφη για $Re(s) > 0$ και ότι για $Re(s) > 0, s \neq 1$, ισχύει

$$\tilde{\zeta}(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s).$$

(ii) Δείξτε ότι η ζ συνάρτηση του *Riemann* δεν μηδενίζεται για $s \in \mathbb{R}$ με $0 < s < 1$.

(**6**) Δείξτε ότι αν για κάποιο $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ έχουμε

$$\psi(x) = x + O(x^{1-\delta}),$$

τότε η ζ συνάρτηση του *Riemann* δεν έχει ρίζες στο χωρίο $\{s \in \mathbb{C}\colon 1 - \delta < Re(s) < 1\}$

Υπόδειξη: Αρχικά δείξτε ότι εάν $Re(s) > 1$, τότε

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{s}{s-1} - \int_1^{\infty} \frac{s}{x^{s+1}}(\psi(x) - x)\, dx.$$

$\psi(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n)$ όπου Λ είναι η συνάρτηση *von Mangoldt*.