

## ΕΡΓΟΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ (Μεταπτυχιακό)

---

7ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2017

Παρακαλώ να μου παραδώσετε τις λύσεις σας την Παρασκευή 19 Ιανουαρίου.

---

(1) (2 μονάδες) Έστω  $T: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  άρρητη στροφή με το μέτρο *Haar*. Δείξτε ότι η διαμέριση  $\mathcal{P} = \{[0, 1/2), [1/2, 1)\}$  είναι *T-generating*.

---

(2) (2 μονάδες) Δείξτε ότι κάθε ρητή στροφή  $T: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  με το μέτρο *Haar* έχει εντροπία μηδέν όμως δεν έχει πεπερασμένη *T-generating* διαμέριση.

---

(3) (2 μονάδες) Έστω  $X = [0, 1]^{\mathbb{Z}}$  με το μέτρο γινόμενο  $\prod_{i=-\infty}^{+\infty} m_{[0,1]}$ , όπου  $m_{[0,1]}$  το μέτρο *Lebesgue* στο  $[0, 1]$ , και τον μετασχηματισμό  $(T_{sh}x)(i) = x(i+1)$ . Δείξτε ότι η εντροπία του συστήματος είναι  $+\infty$ . Υπάρχει πεπερασμένη *T-generating* διαμέριση;

---

(4) (2 μονάδες) Βρείτε παράδειγμα δύο εργοδικών αντιστρέψιμων δυναμικών συστημάτων τα οποία έχουν την ίδια εντροπία, είναι θετική, όμως τα συστήματα δεν είναι ισόμορφα.

---

(5) (2 μονάδες) (i) Έστω  $T_2: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  ο μετασχηματισμός  $T_2x = 2x \pmod{1}$  με το μέτρο *Haar*. Βρείτε μία (μονόπλευρη) *T<sub>2</sub>-generating* διαμέριση και υπολογίστε την εντροπία του συστήματος.

(ii) Κάντε το ίδιο για τον μετασχηματισμό  $T_3x = 3x \pmod{1}$  και αποδείξτε ότι τα συστήματα  $(\mathbb{T}, T_2)$  και  $(\mathbb{T}, T_3)$  δεν είναι ισόμορφα.

---

(6) (2 μονάδες) Έστω  $\mathcal{P} = \{[0, 1/3), [1/3, 1)\}$  διαμέριση του  $\mathbb{T}$ . Για  $x \in \mathbb{T}$  έστω  $P_n(x)$  το κομμάτι της διαμέρισης  $\bigvee_{i=0}^{n-1} T_2^{-i}\mathcal{P}$  στο οποίο ανήκει το  $x$ , όπου  $T_2$  όπως στην προηγούμενη άσκηση. Δείξτε ότι υπάρχει  $a > 0$  ώστε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\log(m_{\mathbb{T}}(P_n(x)))}{n} = a$$

σχεδόν για κάθε  $x \in \mathbb{T}$ .

---