

(1) Έστω $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ μετρήσιμη συνάρτηση και $\alpha \in \mathbb{R}$. Για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε την συνάρτηση $f^{(n)}: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ με τύπο $f^{(n)}(x) = f(x) + f(x + \alpha) + \dots + f(x + (n-1)\alpha)$. Δείξτε ότι σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{T}$, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, ώστε $\|n\alpha\| + \|f^{(n)}(x)\| \leq \varepsilon$, όπου $\|x\|$ η απόσταση του x από τον πλησιέστερο ακέραιο.

(Θεωρήστε κατάλληλο δυναμικό σύστημα στον \mathbb{T}^2 .)

(2) Έστω (X, \mathcal{B}, μ, T) δυναμικό σύστημα και $A \in \mathcal{B}$ σύνολο με $\mu(A) > 0$. Για $x \in X$ ορίζουμε το σύνολο

$$\Lambda_x = \{n \in \mathbb{N}: T^n x \in A\}.$$

Δείξτε ότι $\mu(\{x \in X: \bar{d}(\Lambda_x) > 0\}) > 0$.

(Υπενθυμίζω ότι $\bar{d}(\Lambda) = \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{|\Lambda \cap [1, N]|}{N}$.)

(3) (i) Εάν $R \subset \mathbb{N}$ είναι σύνολο επαναφοράς, δείξτε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ το σύνολο $R \cap (m\mathbb{N})$ είναι επίσης σύνολο επαναφοράς.

(ii) Έστω

$$R = \{n \in \mathbb{N}: \{n\sqrt{2}\} \in [1/4, 3/4]\}.$$

Δείξτε ότι $R \cap (m\mathbb{N}) \neq \emptyset$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$, όμως το σύνολο R δεν είναι σύνολο επαναφοράς.

(Χρησιμοποιήστε ότι για $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ η ακολουθία $(\{n\alpha\})_{n \in \mathbb{N}}$ είναι πυκνή στο $[0, 1]$.)

(4) Έστω (X, \mathcal{B}, μ, T) δυναμικό σύστημα και $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση ώστε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(T^n x) = 0 \quad \text{σχεδόν για κάθε } x \in X.$$

Τι μπορείτε να συμπεράνετε για την f ;

(5) (i) Έστω R σύνολο ακεραίων το οποίο περιέχει οσοδήποτε μεγάλα διαστήματα ακεραίων (δηλαδή για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n, n+1, \dots, n+k \in R$), ή οσοδήποτε μεγάλες αριθμητικές προόδους που ξεκινούν από το μηδέν (δηλαδή για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n, 2n, \dots, kn \in R$). Δείξτε ότι το R είναι σύνολο επαναφοράς.

(ii) Δείξτε ότι η τομή δύο συνόλων επαναφοράς δεν είναι υποχρεωτικά σύνολο επαναφοράς.

(6) Έστω (X, \mathcal{B}, μ, T) δυναμικό σύστημα και $A \in \mathcal{B}$ με $\mu(A) > 0$. Δείξτε ότι το σύνολο

$$R = \{r \in \mathbb{N}: \mu(A \cap T^{-r} A) > 0\}$$

έχει φραγμένα κενά, δηλαδή, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $R \cap \{i, i+1, \dots, i+k\} \neq \emptyset$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.