Εισαγωγή στην Εργοδική Θεωρία

4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2024

(**1**) Δείξτε ότι το σύστημα που ορίζεται από το μετασχηματισμό $T\colon \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_m$ με τύπο $Tx = x + a \pmod m$ είναι εργοδικό αν και μόνο αν $(a, m) = 1$ ($\mathbb{Z}_m := \mathbb{Z}/(m\mathbb{Z})$).

(**2**) Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ εργοδικό κανονικό δυναμικό σύστημα. Υποθέτουμε ότι $\mu(O) > 0$ για κάθε O μη κενό ανοιχτό. Δείξτε ότι σχεδόν για κάθε $x \in X$ η τροχιά $\{T^n x, n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνή στον X. Δείξτε επίσης ότι δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε την υπόθεση '$\mu(O) > 0$ για κάθε O μη κενό ανοιχτό' και τη λέξη 'σχεδόν'.

(**3**) Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ και $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη. Ορίζουμε τον $T\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ με τύπο

$$T(x, y) = (x + \alpha, y + g(x)) \pmod 1.$$

Δείξτε ότι το δυναμικό σύστημα $(\mathbb{T}^2, \mathcal{B}, m_{\mathbb{T}^2}, T)$ είναι εργοδικό αν και μόνο αν ο α είναι άρρητος *και* για κάθε $m \in \mathbb{N}$ η συναρτησιακή εξίσωση

$$mg(x) = h(x + \alpha) - h(x) \pmod 1$$

δεν έχει μετρήσιμη λύση $h\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$.

(Υπόδειξη: Θεωρήστε ανάπτυγμα της μορφής $f(x, y) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(x) e^{2\pi i k y}$.)

(**4**) Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ δυναμικό σύστημα και $k \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός T^k είναι εργοδικός αν και μόνο αν οι μόνες συναρτήσεις $f \in L^\infty(\mu)$ που ικανοποιούν $Tf = \lambda f$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\lambda^k = 1$ είναι σταθερές. (Υπόδειξη: Αποδείξτε το πρώτα για $k = 2$.)

(**5**) Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ δυναμικό σύστημα $f \in L^2(\mu)$ και σ_f το αντίστοιχο φασματικό μέτρο[1].

(*i*) Δείξτε ότι για κάθε $t \in [0, 1)$ έχουμε $\sigma_f(\{t\}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{-2\pi i n t} \int T^n f \cdot \bar{f}\, d\mu$.

(*ii*) Δείξτε ότι $\sigma_f(\{0\}) \geq |\int f\, d\mu|^2$.

(*iii*) Δείξτε ότι $\sigma_f(\{0\}) = 0$ αν και μόνο αν η f είναι ορθογώνια σε όλες τις T-αναλλοίωτες συναρτήσεις.

(**6**) Δείξτε ότι το σύνολο $R \subset \mathbb{Z}$ είναι σύνολο επαναφοράς αν και μόνο αν για κάθε $\Lambda \subset \mathbb{N}$ με $\bar{d}(\Lambda) > 0$ υπάρχει $r \in R$, $r \neq 0$, τέτοιο ώστε $\bar{d}(\Lambda \cap (\Lambda - r)) > 0$.

---

[1] Δηλαδή θετικό και φραγμένο μέτρο στο $[0, 1]$ ώστε $\int T^n f \cdot \bar{f}\, d\mu = \int_0^1 e^{2\pi i n t}\, d\sigma_f(t)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.