

ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Τελικό Διαγώνισμα-Σεπτέμβριος 2014-Διδάσκων:Νίκος Φραντζικινάκης

Διάρκεια τρεις ώρες. Καλή επιτυχία!!

(1) (2 Μονάδες) Δώστε παράδειγμα (με σύντομη επεξήγηση)

- (i) Μη διαχωρίσιμου χώρου *Banach*.
 - (ii) Χώρου με νόρμα που δεν είναι χώρος *Banach*.
 - (iii) Μη φραγμένου γραμμικού τελεστή $T: c_{00} \rightarrow c_{00}$.
-

(2) (2 Μονάδες) Έστω $T: (C[0, 1], \|\cdot\|_{\infty}) \rightarrow (C[0, 1], \|\cdot\|_{\infty})$ τελεστής με τύπο

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(y)dy, \quad x \in [0, 1].$$

- (i) Δείξτε ότι ο T είναι $1-1$ αλλά δεν είναι επί.
 - (ii) Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και υπολογίστε την νόρμα του.
-

(3) (2 Μονάδες) Έστω X χώρος *Banach* και $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία γραμμικά ανεξάρτητων στοιχείων του X . Ορίζουμε τους υπόχωρους $V_n = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, και $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$.

- (i) Είναι οι υπόχωροι V_n πάντα κλειστοί;
 - (ii) Δείξτε ότι ο υπόχωρος V δεν είναι ποτέ κλειστός.
-

(4) (2 Μονάδες) Έστω V γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο.

(i) Αν $v, w \in V$ και $v \neq w$ δείξτε ότι

$$\left\| \frac{v+w}{2} \right\|^2 < \frac{\|v\|^2 + \|w\|^2}{2}.$$

(ii) Δείξτε ότι κάθε κυρτό υποσύνολο του V έχει το πολύ ένα στοιχείο με ελάχιστη νόρμα.

(5) (2 Μονάδες) Έστω $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ορθοκανονική ακολουθία σε χώρο *Hilbert* H και $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε τον τελεστή $T: H \rightarrow H$ με τύπο

$$Tv = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle v, e_n \rangle e_n.$$

- (i) Δείξτε ότι η σειρά που ορίζει τον τελεστή συγκλίνει σε στοιχείο του H .
 - (ii) Δείξτε ότι ο τελεστής είναι φραγμένος.
-

(6) (2 Μονάδες) Έστω X απειροδιάστατος χώρος *Banach*.

- (i) Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία γραμμικά ανεξάρτητων στοιχείων του X και $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών. Δείξτε ότι υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(x_n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$.
 - (ii) Κάνοντας χρήση του (i) δείξτε ότι υπάρχει μη φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $f: X \rightarrow \mathbb{R}$.
-