ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Πρόοδος-Άνοιξη 2014-Διδάσκων:Νίκος Φραντζικινάκης

Διάρκεια δύο ώρες. Καλή επιτυχία!!

(**1**) Δείξτε προσεκτικά ότι

$$\ell_1 \subset \ell_2 \subset c_0 \subset \ell_\infty$$

και ότι οι εγκλεισμοί είναι γνήσιοι. Είναι σωστό ότι $c_0 = \bigcup_{p=1}^{\infty} \ell_p$;

(**2**) Έστω X χώρος *Banach* και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων του X ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\| < +\infty.$$

Δείξτε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει.

(**3**) Έστω

$$X = \Big\{(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}\colon \text{ υπάρχει } C > 0 \text{ τ.ω. } |\xi_k| \leq \frac{C}{k^2}, \text{ για } k = 1, 2, \dots\Big\}$$

(**i**) Δείξτε ότι ο X είναι γραμμικός υπόχωρος του ℓ_1 και πυκνός στον ℓ_1.

(**ii**) Είναι ο X πλήρης με την ℓ_1-νόρμα;

(**4**) (**i**) Έστω X γραμμικός χώρος και Y γραμμικός υπόχωρος του X με μη κενό εσωτερικό. Δείξτε ότι $Y = X$.

(**ii**) Έστω X πλήρης γραμμικός χώρος και $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ όπου X_n κλειστοί γραμμικοί υπόχωροι του X. Δείξτε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $X_n = X$.

(**5**) Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο $P_n = \{p\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ πολυώνυμο βαθμού $\leq n\}$ με νόρμα

$$\|p\| = \max_{t\in[0,1]} |p(t)|.$$

(**i**) Είναι ο X πλήρης;

(**ii**) Ορίζουμε τον γραμμικό τελεστή $T\colon P_n \to P_n$ με τύπο

$$T(a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1}t^{n-1} + a_n t^n) = a_n + a_{n-1}t + \cdots + a_1 t^{n-1} + a_0 t^n.$$

Να δειχθεί ότι ο T είναι φραγμένος.

(**6**) Έστω $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών. Στον χώρο c_{00} (ακολουθίες που είναι τελικά 0) με την ℓ_1-νόρμα ορίζουμε το συναρτησοειδές $F\colon c_{00} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$F((\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi_k.$$

Δείξτε ότι το F είναι φραγμένο αν και μόνο αν $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$ και υπολογίστε την $\|F\|$.
