ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (Μεταπτυχιακό)

Πρόοδος-Άνοιξη 2015-Διδάσκων: Νίκος Φραντζικινάκης

Διάρκεια 3.5 ώρες. Καλή επιτυχία!!

(**1**) (i) Είναι ο c_0 ή ο c_{00} κλειστός υπόχωρος του ℓ_∞; Είναι ο c_0 ή ο c_{00} πλήρης;

(ii) Έχει ο c_0 βάση *Schauder*; Έχει ο ℓ_∞ βάση *Schauder*;

(iii) Υπάρχει πλήρης νόρμα στον χώρο c_{00} ;

(**2**) (i) Έστω X χώρος *Banach*, Y χώρος με νόρμα, και $T_n\colon X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, φραγμένοι γραμμικοί τελεστές. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in X$ το όριο $\lim_{n\to\infty} T_n x$ υπάρχει. Δείξτε ότι ο γραμμικός τελεστής $T\colon X \to Y$ με τύπο $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ είναι φραγμένος.

(ii) Δείξτε ότι το συμπέρασμα του (i) δεν ισχύει αν δεν υποθέσουμε ότι ο χώρος X είναι *Banach*. (Υπόδειξη. Κατασκευάστε αντιπαράδειγμα για $X = Y = c_{00}$.)

(**3**) Έστω $B = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη$\}$ και $C = \{f \in B\colon \lim_{x\to\infty} f(x)$ υπάρχει$\}$. Δείξτε ότι υπάρχει φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $F\colon B \to \mathbb{R}$ ώστε $F(f) = \lim_{x\to\infty} f(x)$ για κάθε $f \in C$. (Χρησιμοποιούμε την νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ στον χώρο B.)

(**4**) Για $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τον γ.χ. $P_n = \{p\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ πολυώνυμο βαθμού $\leq n\}$ με νόρμα

$$\|p\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |p(t)|.$$

Ορίζουμε τον γραμμικό τελεστή $T\colon P_n \to P_n$ με τύπο

$$T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n) = a_1 t + 2a_2 t^2 + \cdots + n a_n t^n.$$

(i) Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

(ii) Δείξτε ότι η $\|\cdot\| : P_n \to [0,\infty)$ με τύπο

$$\|p\| = \|Tp\|_\infty + |p(0)|, \quad p \in P_n,$$

είναι πλήρης νόρμα στον χώρο P_n.

(iii) Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά C_n ώστε για όλα τα $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\left\|a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n\right\|_\infty \leq C_n \left\|a_1 t + 2a_2 t^2 + \cdots + n a_n t^n\right\|_\infty.$$

(**5**) Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα.

(i) Δείξτε ότι υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $F\colon X \to \mathbb{R}$ το οποίο **δεν** είναι φραγμένο.

(ii) Δείξτε ότι υπάρχουν κυρτά και πυκνά $A, B \subset X$ ώστε $A \cup B = X$ και $A \cap B = \emptyset$. (Υπόδειξη. Δείξτε ότι το σύνολο $\{x\colon F(x) \geq 0\}$ είναι πυκνό.)
