ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ

Τελικό διαγώνισμα-Χειμερινό Εξάμηνο 2010
Διδάσκων: Νίκος Φραντζικινάκης

Επιτρέπεται μόνο μία σελίδα με σημειώσεις. Διάρκεια 4 ώρες. Καλή επιτυχία!!

(**1**) Δώστε παράδειγμα η αποδείξτε ότι δεν υπάρχει τέτοιο παράδειγμα:

(**i**) Μετρήσιμο σύνολο $E \subset \mathbb{R}$ με $m(E \cap [a,b]) = (b-a)/2$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$.

(**ii**) Μετρήσιμο σύνολο $E \subset [0,1] \times [0,1]$ με $m_{\mathbb{R}^2}(E) = 1/2$ και $m_{\mathbb{R}}(E_y) = 1/3$ για κάθε $y \in [0,1]$, όπου $E_y = E \cap (\mathbb{R} \times \{y\})$.

(**iii**) Συνεχής συνάρτηση f με $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ και $\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} = +\infty$ για κάθε $p > 0$.

(**iv**) Μέτρο *Borel* μ με $\mu \ll m_{\mathbb{R}}$ και $\mu([0,1]) = +\infty$.

(**2**) Έστω $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη. Να δειχθεί ότι:

(**i**) $\|f\|_{L^1[0,1]} \leq \|f\|_{L^p[0,1]} \leq \|f\|_{L^\infty[0,1]}$ για κάθε $p > 1$.

(**ii**) $\lim_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p[0,1]} = \|f\|_{L^\infty[0,1]}$.

(**3**) (**i**) Εάν $f \in L^1(\mathbb{R})$ δείξτε ότι σχεδόν για κάθε $x \in [0,1]$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(x+n)$ συγκλίνει.

(**ii**) Εάν $f \in L^1(\mathbb{R})$ υπολογίστε το όριο $\lim_{t\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)|\, dx$. (Εξετάστε πρώτα την περίπτωση που η f έχει συμπαγή φορέα. Προσοχή, $t \to +\infty$.)

(**4**) Έστω $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι:

(**i**) Σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση h_x με τύπο $h_x(y) = f(x-y) \cdot g(y)$ είναι ολοκληρώσιμη.

(**ii**) Ορίζουμε $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \cdot g(y) dy$. Δείξτε ότι $\|f*g\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}$.

(5) **(i)** Έστω $\mu_1, \mu_2, \ldots$ πεπερασμένα μέτρα ορισμένα στην ίδια σ-άλγεβρα. Κατασκευάστε ένα πεπερασμένο μέτρο μ τέτοιο ώστε $\mu_i \ll \mu$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

(ii) Κάντε το ίδιο υποθέτοντας ότι τα μέτρα $\mu_1, \mu_2, \ldots$ είναι σ-πεπερασμένα.

(6) **(i)** Ποιές από τις συναρτήσεις $f(x) = 1/x$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x^2$ είναι απόλυτα συνεχείς στο $(0, +\infty)$;

(ii) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ απόλυτα συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $f' \in L^2(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι για κάποια $A, B \in \mathbb{R}$ ισχύει $|f(x)| \leq A\sqrt{|x|} + B$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(7) **(i)** Κατασκευάστε μετρήσιμο σύνολο $E \subset [0,1]$ με $m_{\mathbb{R}}(E) < 1$ και $m_{\mathbb{R}}(E \cap I) > 0$ για κάθε διάστημα $I \subset [0,1]$.

(ii) Κατασκευάστε συνάρτηση $f\colon [0,1] \to [0,1]$ η οποία είναι *γνησίως* αύξουσα, απόλυτα συνεχής, και ικανοποιεί $m_{\mathbb{R}}(\{x\colon f'(x) = 0\}) > 0$.