ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 1 (24/09/10)

Να μου επιστρέφετε τις ασκήσεις 1, 2, 3, 7, 8, **μέχρι την Παρασκευή 1 Οκτωβρίου.**

Δώρο: +1 μονάδα (από σύνολο 100 του τελικού σας βαθμού) για την άσκηση 10. **Μπορείτε να την φέρετε μέχρι τις 10 Δεκεμβρίου.**

(1)* **(i)** Δείξτε ότι κάθε κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ είναι G_δ (δηλαδή αριθμήσιμη τομή ανοιχτών) και κάθε ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ είναι F_σ (δηλαδή αριθμήσιμη ένωση κλειστών).

(ii) Δείξτε ότι το σύνολο των ρητών είναι F_σ αλλά όχι G_δ (για το δεύτερο μπορείτε να κάνετε χρήση του θεωρήματος *Baire*). Επίσης δώστε ένα παράδειγμα G_δ υποσυνόλου του $\mathbb{R}$ το οποίο δεν είναι F_σ.

(2)* Έστω $E \subset \mathbb{R}^d$.

(i) Δείξτε ότι $m_*(E) = \inf\{m_*(O) \colon O \text{ ανοιχτό } E \subset O\}$.

(ii) Δείξτε ότι υπάρχει G_δ υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ το οποίο περιέχει το E και έχει το ίδιο εξωτερικό μέτρο με το E.

(3)* Δείξτε ότι κάθε αριθμήσιμη ένωση ευθειών στο επίπεδο έχει εξωτερικό μέτρο 0.

(4) Έστω $E \subset \mathbb{R}$ με εξωτερικό μέτρο 0. Δείξτε ότι το σύνολο $E^2 = \{x^2 \colon x \in E\}$ έχει επίσης εξωτερικό μέτρο 0.

(5) Έστω $E \subset R$ με εξωτερικό μέτρο 0.

(i) Δείξτε ότι το συμπλήρωμα του E είναι πυκνό στους πραγματικούς.

(ii) Δείξτε ότι για κάθε $A \subset \mathbb{R}$ έχουμε $m_*(E \cup A) = m_*(A) = m_*(A \setminus E)$.

(6) Έαν $E \subset \mathbb{R}$, ορίζουμε

$$J_*(E) = \inf\Big\{\sum_{j=1}^{N} |I_j| \colon E \subset \bigcup_{j=1}^{N} I_j,\ I_j \text{ κλειστά διαστήματα}, N \in \mathbb{N}\Big\}.$$

(i) Δείξτε ότι $J_*(E) = J_*(\overline{E})$.

(ii) Δείξτε ότι $m_*(E) \le J_*(E)$ και δώστε παράδειγμα όπου $m_*(E) < J_*(E)$.

(7)* Έαν $E_k \subset \mathbb{R}^d$, $k = 1, 2 \ldots$, ορίζουμε

$$\limsup_k (E_k) = \{x \in \mathbb{R}^d \colon x \in E_k \text{ για άπειρα } k \in \mathbb{N}\}.$$

(i) Δείξτε ότι $\limsup_k (E_k) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} E_k$.

(ii) Εάν $\sum_{k=1}^{\infty} m_*(E_k) < \infty$, δείξτε ότι $m_*(\limsup_k (E_k)) = 0$.

(iii) Δώστε παράδειγμα συνόλων $E_k \subset \mathbb{R}$, $k = 1, 2 \ldots$, τέτοια ώστε $\sum_{k=1}^{\infty} m_*(E_k) = \infty$ αλλά $\limsup_k (E_k) = \emptyset$.

(8)* Για κάθε $\delta \in (0, 1)$ κατασκευάζουμε ένα σύνολο C_δ, τύπου *Cantor*, αφαιρώντας από κάθε διάστημα που παραμένει στο k βήμα διάστημα μήκους $\delta 3^{-k}$. Να δειχθεί ότι το C_δ είναι τέλειο σύνολο (δηλαδή κλειστό και δεν έχει μεμονωμένα σημεία), δεν περιέχει κανένα διάστημα, και $m_*(C_\delta) = 1 - \delta > 0$.

(9) Έστω C το σύνολο *Cantor*. Εάν I_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι διαστήματα με $|I_n| < 1/3^n$, δείξτε ότι $C \not\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.

(10)♠ Έστω C το σύνολο *Cantor*.

(i) Είναι το $C \cap \mathbb{Q}$ πυκνό στο C;

(ii) Δείξτε ότι $C + C = [0, 2]$, δηλαδή κάθε αριθμός στο $[0, 2]$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο αριθμών στο C.