ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

Τελικό Διαγώνισμα-Σεμπτέμβρης 2013, Διδάσκων: Νίκος Φραντζικινάκης

Διάρκεια 3 ώρες. Μπορείτε να φύγετε μετά 1 ώρα. Καλή επιτυχία!!

(**1**) (2 μονάδες) (**i**) Για ποιά $z \in \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμες οι συναρτήσεις $f(z) = |z|^2$ και $g(z) = (\overline{z})^{2013}$;

(**ii**) Βρείτε συνάρτηση $v \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με τύπο

$$f(x+iy) = y^3 - 3x^2y + iv(x,y)$$

να είναι παραγωγίσιμη (ως μιγαδική συνάρτηση) για όλα τα $x + iy \in \mathbb{C}$.

(**2**) (2.5 μονάδες) (**i**) Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_\Delta (e^{z^2} + \overline{z})\, dz$$

όπου Δ το θετικά προσανατολισμένο τρίγωνο με κορυφές $0, 1, i$.

(**ii**) Για $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C \frac{1}{z^n(z-2)}\, dz$$

όπου C ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος με κέντρο $z_0 = 0$ και ακτίνα $R = 1$.

(**3**) (2.5 μονάδες) (**i**) (Θεωρία) Κάνοντας χρήση του τύπου *Cauchy* για παραγώγους ολόμορφων συναρτήσεων αποδείξτε ότι εάν η συνάρτηση $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη και $z_0 \in \mathbb{C}$, τότε για κάθε $R > 0$ και $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ έχουμε

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq n!\, \frac{M_R}{R^n}$$

όπου $M_R = \max_{|z-z_0|=R} |f(z)|$.

(**ii**) Έστω $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση ώστε

$$|f(z)| \leq |z|^{3/2} + 1$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Δείξτε ότι υπάρχουν σταθερές $a, b \in \mathbb{C}$ ώστε $f(z) = az + b$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

(**4**) (2 μονάδες) (**i**) Ταξινομήστε τις ιδιομορφίες της συνάρτησης $f(z)$ με τύπο

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z-2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}, \quad z \neq 0, 2.$$

(**ii**) Έστω f όπως στο (*i*). Για $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C z^k f(z)\, dz$$

όπου C ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος με κέντρο $z_0 = 0$ και ακτίνα $R = 1$.

(**5**) (2.5 μονάδες) (**i**) Εάν $\alpha \in \mathbb{R}$ και $R > 0$, δείξτε ότι

$$\int_{C_R} \frac{e^{\alpha z}}{1+e^z}\, dz = -2\pi i e^{\alpha\pi i}$$

όπου C_R το θετικά προσανατολισμένο παραλληλόγραμμο με κορυφές $-R$, R, $R + 2\pi i$, $-R + 2\pi i$.

(**iii**) Εάν $\alpha \in (0, 1)$, υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x}\, dx.$$