

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Εξεταστική Σεπτεμβρίου 2011-Διδάσκων: Νίκος Φραντζικινάκης

Επιτρέπεται μόνο μία σελίδα με σημειώσεις. Διάρκεια 3 ώρες. Καλή επιτυχία!!

(1) (i) Χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου δείξτε ότι το σύνολο των ρητών αριθμών έχει εξωτερικό μέτρο 0.

(ii) Περιγράψτε προσεκτικά ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο των πραγματικών με μέτρο 0.

(iii) Περιγράψτε προσεκτικά ένα μη μετρήσιμο υποσύνολο των πραγματικών.

(2) Έστω $E \subset \mathbb{R}$ μετρήσιμο σύνολο με $m(E) < +\infty$.

(i) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = m(E \cap [-x, x])$ είναι συνεχής.

(ii) Εάν $m(E) = 1$, δείξτε ότι υπάρχει $K \subset E$ μετρήσιμο τέτοιο ώστε $m(K) = 0.99$.

(3) (i) Δώστε ένα παράδειγμα μετρήσιμης συνάρτησης που είναι παντού ασυνεχής και ένα παράδειγμα μη μετρήσιμης συνάρτησης.

(ii) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η παράγωγος της f είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

(4) (i) Δώστε παράδειγμα ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n \rightarrow 0$ σχεδόν παντού και $\int_{\mathbb{R}} f_n \rightarrow 1$.

(ii) Έστω $f: [0, 1] \rightarrow (-1, 1)$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (f(x))^n dx = 0.$$

(5) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)| dx = 2 \int |f(x)| dx.$$

(Υπόδειξη: Δείξτε το πρώτα όταν $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$ όπου $a, b \in \mathbb{R}$.)