Στοχαστικές Ανελίξεις

Τελικό διαγώνισμα, Ιούνιος 2018
Διάρκεια 3 ώρες. Μπορείτε να φύγετε μετά μία ώρα.
Δεν επιτρέπεται να έχετε ηλεκτρονικές συσκευές δίπλα σας ή πάνω σας.
Παρακαλώ παραδώστε τα θέματα και το πρόχειρο. Καλή επιτυχία!

(**1**) (2 μονάδες) Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $D = \{1, 2, 3\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε:

(i) Τα όρια $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2)$ και $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2|X_0 = 1)$.

(ii) Το όριο $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2, X_{n+2} = 1)$.

(iii) Τη συχνότητα επισκέψεων στην κατάσταση 3.

(**2**) (2 μονάδες) (i) Υπολογίστε τον αναμενόμενο αριθμό φορών που πρέπει να ρίξουμε ένα ζάρι μέχρι το άθροισμα των ενδείξεων να είναι πολλαπλάσιο του 6.

(ii) Δείξτε ότι ο αναμενόμενος αριθμός φορών που πρέπει να ρίξουμε ένα ζάρι μέχρι το άθροισμα των ενδείξεων να είναι πολλαπλάσιο του 2018 είναι πεπερασμένος.

(**3**) (2 μονάδες) Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $D = \mathbb{N}_0$ και πιθανότητες μετάβασης $p(x, x+1) = \frac{1}{3}$ και $p(x, 0) = \frac{2}{3}$ για $x = 0, 1, 2, \ldots$. Υπολογίστε:

(i) Τον αναμενόμενο χρόνο επιστροφής στο 0 (δηλαδή το $\mathbb{E}_0 T_0^+$).

(ii) Τον αναμενόμενο αριθμό αφίξεων στο 0 μεταξύ δύο διαδοχικών επιστροφών στο 2018.

(iii) Το όριο $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 0)$.

(iv) Τη συχνότητα επισκέψεων στο 0.

(**4**) (2 μονάδες) Σωματίδια προσπίπτουν σε ανιχνευτή με κατανομή *Poisson* και ρυθμό αφίξεως 1 σωματίδιο ανά δευτερόλεπτο. Υποθέτουμε ότι τα πρώτα 2 δευτερόλεπτα είχαμε ακριβώς 3 αφίξεις. Υπολογίστε:

(i) Την πιθανότητα το πρώτο δευτερόλεπτο να είχαμε ακριβώς 2 αφίξεις.

(ii) Τον αναμενόμενο αριθμό αφίξεων το πρώτο δευτερόλεπτο.

(**5**) (3 μονάδες) Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ και $(X'_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ανεξάρτητες μαρκοβιανές αλυσίδες με χώρο καταστάσεων D, D' και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P, P' αντίστοιχα.

(i) Εάν $Z_n = (X_n, X'_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, δείξτε ότι η $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μαρκοβιανή αλυσίδα με πιθανότητες μετάβασης $\tilde{p}((x, x'), (y, y')) = p(x, y)\, p'(x', y')$ για $x, y \in D, x', y' \in D'$.

(ii) Υποθέτουμε επιπλέον ότι οι $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ και $(X'_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μη υποβιβάσιμες, γνήσια επαναληπτικές, και απεριοδικές. Δείξτε ότι $\mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N}\colon X_n = x, X'_n = x') = 1$ για κάθε $x \in D, x' \in D'$.
